

**М. Е. Лустенков**

**ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ  
ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
И МИНИМИЗАЦИЯ ПОТЕРЬ  
МОЩНОСТИ**

Монография

Могилев  
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»  
2010

УДК 621.83.06:004

Рекомендовано к опубликованию Советом Белорусско-Российского университета «24» сентября 2010 г., протокол № 1

Рецензенты: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры «Основы проектирования машин» Белорусско-Российского университета Л. А. Борисенко ; д-р техн. наук, проф., проф. кафедры «Технология и оборудование машиностроительного производства» Полоцкого государственного университета В. А. Данилов

**Лустенков, М. Е.**

Передачи с промежуточными телами качения: определение и минимизация потерь мощности : монография / М. Е. Лустенков. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2010. – 274 с. : ил.  
ISBN 978-985-492-037-5.

В монографии исследуются процессы качения со скольжением в механизмах, использующих тела качения для передачи нагрузки. Теоретически определен качественный и количественный состав потерь мощности. Приведены фрагменты теории зацепления посредством промежуточных тел качения, рассмотрены вопросы проектирования некоторых типов шариковых и роликовых механических передач.

Монография предназначена для специалистов, разрабатывающих малогабаритные механические приводы. Может быть полезна аспирантам и студентам вузов.

УДК 621.83.06:004

ISBN 978-985-492-037-5

© Лустенков М. Е., 2010  
© ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2010

## Введение

Перед современным машиностроением стоят такие задачи, как освоение новых конструкций машин и механизмов, средств автоматизации, позволяющих использовать высокопроизводительные энерго- и материалосберегающие технологии, обеспечение необходимой надежности и долговечности машин и механизмов для различных областей народного хозяйства, повышение их экономичности и производительности.

В условиях жесткой конкуренции на рынке энергоресурсов необходимо тщательно анализировать, сводя к минимуму, потери энергии в используемых машинах и механизмах путем их совершенствования либо разработок конструкций.

В машинах, механизмах и приборах осуществляется взаимное перемещение контактирующих деталей, сопровождаемое потерями мощности, зачастую с местным нагревом, усталостным и хрупким разрушением. Данное взаимодействие осуществляется посредством процессов скольжения и качения, характер протекания которых, по сути, определяет долговечность машины.

Наиболее характерны эти процессы для механизмов, использующих тела качения для передачи нагрузки и осуществления перемещений узлов машин: шариковинтовых передач, ШРУСов, обгонных муфт, подшипников качения, направляющих качения и др. Качение со скольжением сопровождается затратами энергии, и необходимость их минимизации вызывает необходимость создания соответствующей теории. Разработка этой теории представляет собой научную проблему, т. к. охватывает широкий спектр аспектов (геометрические, кинематические, силовые), влияющих на исследуемые процессы, а также вопросы, связанные с качеством контактирующих поверхностей, выбором их материалов, видом термообработки, технологией изготовления, смазывания и т. д. Вопросы исследования процессов качения со скольжением при тяжелых режимах нагружения элементов трансмиссий и приводов несомненно очень важны, т. к. напрямую связаны с актуальными задачами снижения энергопотребления машин, повышения их долговечности и безопасности.

Над этой проблемой работали такие ученые, как Ш. Кулон (С. А. Coulumb), О. Рейнольдс (O. Reynolds), Н. И. Глаголев, А. Ю. Ишлинский, С. В. Пинегин и др. Анализ этих исследований, несмотря на большую значимость полученных результатов, приводит к выводу о

необходимости продолжения работ в этом направлении с учетом нынешних реалий в развитии машиностроения.

Механические передачи широко применяются во всех отраслях промышленности. Создание надежных и малогабаритных редукторов как наиболее характерный пример реализации механических передач, повышение их нагрузочной способности, снижение материалоемкости, трудоемкости изготовления при одновременном снижении их стоимостных показателей – все это является комплексом актуальных задач, стоящих перед конструкторами и технологами, связанными с разработкой новой техники. Для создания механических передач и редуцирующих узлов на их основе чаще всего применяют зубчатые зацепления, которые имеют многовековую историю развития и проверенные практикой методики проектных и проверочных расчетов. Многими исследователями признается тот факт, что зубчатые передачи в традиционном исполнении исследованы досконально и резервы повышения их эксплуатационных характеристик если не исчерпаны, то близки к исчерпанию. При этом процессы качения со скольжением осуществляются и при работе зубчатых передач всех типов.

Нами в качестве объекта исследования для реализации разработанных теоретических положений был выбран класс механических *передач с промежуточными телами качения (ППТК)* в зацеплении. Эти передачи обладают рядом достоинств, таких как малые габариты, вес, многопоточность при передаче нагрузки и др. Однако существующий серьезный недостаток большинства конструкций – низкий КПД – ограничивает их применение в современной технике, хотя, на наш взгляд, их возможности еще не реализованы в полной мере. Исследованием передач аналогичных типов занимались А. Е. Беляев, Р. М. Игнатищев, М. Ф. Пашкевич, А. И. Бостан и др. Ими проведены несколько фундаментальных успешно завершившихся исследований. Однако их эффективность не в полной мере удовлетворяет современному уровню развития механических передач.

Решению проблемы разработки и совершенствования теории минимизации потерь мощности в механизмах и передачах с телами качения на примере ППТК, а также разработке научных основ расчета этих передач с использованием данной теории, их создания и внедрения в промышленность посвящена настоящая работа.

В монографии обоснован выбор объекта исследования, сформулированы цели и задачи работы. Проведен структурный анализ ППТК,

предложено несколько новых конструкций. На основе кинематического и динамического анализа планетарных механизмов разработаны методики прочностных расчетов. Рассмотрены вопросы технологического обеспечения производства передач данного типа. Исследованы процессы качения и скольжения. Разработаны алгоритмы для определения потерь мощности, сформулированы рекомендации по их минимизации.

Результаты работы апробированы на созданных механизмах и редукторах, которые нашли практическое применение на производстве.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту НАН Беларуси, доктору технических наук, профессору О. В. Берестневу за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы и повлиявшие на выбор направлений исследований.

Значительная помощь в проведении экспериментальных исследований оказывалась инженером А. П. Прудниковым. Совместно с ним написан подразд. 3.4 монографии. Совместно с кандидатом физико-математических наук, доцентом И. И. Маковецким проводились некоторые теоретические исследования, результаты которых отражены в подразд. 4.1, 4.2 и в п. 6.1.2 и в совместных публикациях.

Автор благодарит кандидата технических наук, доцента Д. М. Макаревича за помощь в практической реализации результатов работы, рецензентов рукописи монографии – докторов технических наук, профессоров Л. А. Борисенко и В. А. Данилова, а также доктора технических наук, профессора А. Т. Скойбеду за ряд ценных замечаний.

За оказание поддержки во время проведения исследований автор выражает глубокую признательность ректору Белорусско-Российского университета, доктору технических наук, профессору И. С. Сазонову и коллегам-преподавателям.

# 1 Состояние вопроса и концепция исследований

## 1.1 О развитии теории сопротивления качению

Наличием только трения скольжения (силы сцепления  $F_{сц}$ , трения покоя) в контакте невозможно объяснить равномерное качение (равновесие) по плоскости катка радиусом  $R$  и весом  $G$ , к центру которого приложена некоторая горизонтальная сдвигающая сила  $F$ , т. к. в этом случае не выполняется одно из уравнений равновесия, а именно не равна нулю сумма моментов всех внешних сил относительно точки  $A$  контакта катка и опорной плоскости при рассмотрении плоской системы сил (рисунок 1.1, а).

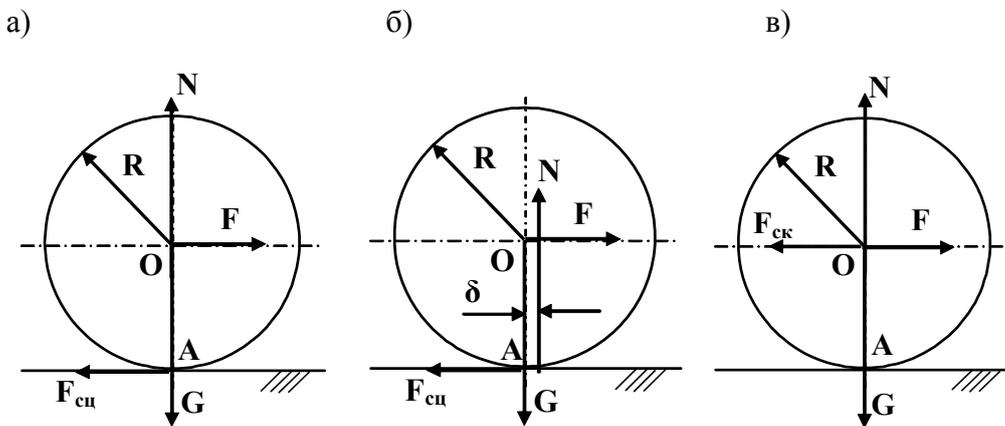


Рисунок 1.1 – К объяснению равновесия (равномерного качения) катка

В современных курсах теоретической механики и теории механизмов и машин предполагается, что движению (перекатыванию) катка препятствует момент сопротивления качению, т. к. момент пары сил ( $F$  и  $F_{сц}$  с плечом  $R$ ) может быть уравновешен только моментом другой пары сил. Его возникновение вызвано смещением реакции опорной поверхности в направлении качения на некоторую величину  $\delta$ , называемую коэффициентом трения качения (рисунок 1.1, б). Момент пары сил  $N$  и  $G$  с плечом  $\delta$  согласно теории пар сил можно произвольно переносить в любую точку плоскости действия пары и поворачивать на произвольный угол. Заменяем этот момент эквивалентным (пара сил  $F_{ск}$  с плечом  $R$ ). При этом одна из сил  $F_{ск}$  пары приложена в точке  $O$  и направлена в сторону, обратную направлению силы  $F$ , а другая – в точке  $A$ , и ее направление противоположно направлению силы  $F_{сц}$ . Таким образом,

$$FR \equiv F_{cy}R \equiv N\delta \equiv F_{ck}R \Rightarrow F_{ck} = F_{cy}. \quad (1.1)$$

Согласно следствию одной из аксиом статики равновесную систему сил  $F_{ck}$  и  $F_{cy}$ , равных по модулю и противоположных по направлению, приложенных в точке  $A$ , можно исключить из рассмотрения. В результате, вновь добавив равновесную систему сил  $N$  и  $G$ , получим эквивалентную схему нагружения (рисунок 1.1, в). Из тождеств (1.1) следует зависимость

$$F_{ck} = \frac{\delta N}{R}. \quad (1.2)$$

Данная формула эмпирическим путем была получена Ш. Кулоном (С. А. Coulomb) и описана в [1, 2]. Сила сопротивления качению  $F_{ck}$  условно прикладывалась Кулоном в центре катка (см. рисунок 1.1, в). В теории качения со скольжением вводится также понятие коэффициента сопротивления качению  $f_{ck}$  ( $f_{ck}$  – безразмерная величина).

$$f_{ck} = \frac{\delta}{R} = \frac{F}{N}. \quad (1.3)$$

Формула (1.2), полученная Кулоном более двухсот лет назад, удовлетворяет инженерным расчетам и по сегодняшний день. Однако природы возникновения силы сопротивления качению  $F_{ck}$  (момента сопротивления качению  $M_{ck}$ ) она не раскрывает. По данному вопросу к настоящему времени разработано множество теорий. Первопричиной сопротивления качению практически всеми исследователями признается неабсолютная твердость материалов контактирующей пары (контакт тел не по линиям и в точках, а на площадках), что отражено в университетских курсах теоретической механики [3, с. 177]. На процесс сопротивления качению также оказывают влияние свойства материала и состояние поверхности катка [4, с. 79]. Примеры из учебной литературы характерны тем, что они в краткой и доступной форме отражают современный уровень исследований, признанный большинством специалистов. Отмечается, что сдвиг реакции поверхности  $N$  следует из асимметричной эпюры давлений на площадке контакта. Наиболее наглядно возникновение момента сопротивления качению продемонстрировано в [5, с. 176], где изображен погруженный в опорную поверхность каток с нагруженной только передней частью контакта.

При этом в курсах теоретической механики трение качения рассматривается как особый вид трения (трение второго рода), независимый от трения скольжения. Основные допущения обобщены в

[6, с. 74–75], где отмечено, что момент сопротивления качению (наибольший) не зависит от радиуса катка, угловой скорости и его скорости скольжения, хотя делается оговорка, что такие допущения применимы для «не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформирующихся материалов катка и плоскости».

Рассматривая причины, вызывающие сопротивление качению, следует отметить несколько существующих на сегодняшний день теорий. Все они опирались на результаты исследований Кулона, подтвержденные и дополненные его современниками (Морэн (A. Morin), Дюпьюи (A. J. E. J. Dupuit) и др.). В [7, 8] они классифицированы следующим образом: теория качения колеса по грунту, теория продольного проскальзывания, теория дифференциального проскальзывания, молекулярная теория, теория упругих несовершенств и так называемые комплексные теории.

Теория качения колеса по грунту носит специфический характер. Грандвуайэ (J. Grandvoinet) [9] получил зависимость, связывающую силу сопротивления качению аналогично кулоновской, но в другой степенной взаимосвязи параметров и с учетом влияния ширины колеса и податливости почвы. Это направление развивали также Мейер (H. Meyer), Ленгсфельд (J. Lengsfeld), Морэн (A. Morin), Резаль (H.-A. Resal), Уотсон (G. N. Watson), Н. П. Раевский, В. В. Шульц, В. П. Горячкин, М. Н. Летошнев, Е. М. Гутияр и др. Исследователями этого направления отмечено, что давление в любой точке обода колеса пропорционально глубине погружения (полным деформациям). Примечательны также различия в подходах к нагруженности (ненагруженности) задней части контакта. Признавая большую практическую значимость данного направления и, безусловно, присутствующие общие закономерности, следует отметить, что не все зависимости, применимые для пары «колесо (в том числе пневматическая шина)–податливый грунт» подходят для деталей машин из машиностроительных материалов (в частности, для стальных тел качения) и нагрузок, на порядки превышающих удельные нагрузки, действующие на колесо.

Теория продольного проскальзывания впервые обоснована О. Рейнольдсом [10]. Согласно этой теории существует различие в растяжениях поверхности катка и основания, что приводит к скольжению между ними. Скольжение поверхностей сопровождается трением, сила сопротивления качению, таким образом, пропорциональна работе сил трения и, следовательно, коэффициенту трения скольжения. Установлено, что скольжение присутствует не на всей контактной площадке, сущест-

вуют области скольжения и сцепления, где скольжение отсутствует. Данная теория не объясняет сопротивление качению при одинаковой податливости материалов катка и опорной поверхности, предполагает отсутствие сопротивления качению при больших значениях коэффициента трения скольжения. Однако ее основные постулаты послужили толчком для дальнейших исследований, особенно связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния вблизи контакта. Развитие этой теории осуществляли Фромм (H. Fromm), Н. И. Глаголев, Фёпль (L. Förpl), В. С. Щедров, Поритски (H. Poritsky), А. Ю. Ишлинский, Буфлер (H. Bufler), Р. В. Вирабов, В. И. Моссаковский, З. З. Рудаков и др.

Гипотеза, выдвинутая Хиткоутом (H. L. Heathcote) [11], названная в [7], теорией дифференциального проскальзывания, на наш взгляд, рассматривает лишь частный случай взаимодействия обкатываемых тел. Основная идея гипотезы не противоречит ни одной из рассматриваемых теорий, т. к. речь в ней идет о геометрическом трении. При взаимодействии макрогеометрии тел хотя и предполагается не линейный контакт, а контакт по площадке, деформации тел не рассматриваются. Таким образом, теория не объясняет природы возникновения сопротивления качению, не затрагивает причины сопротивления качению при точечном контакте (например, шар-плоскость). Однако разработчиками приводится важное предположение пропорциональности работы силы сопротивления качению объему эпюры давлений на площадке контакта.

Гипотеза молекулярного взаимодействия поверхностей позволяет объяснить наличие сопротивления качению даже при сверхточном изготовлении тел качения и высоком качестве контактирующих поверхностей. Молекулярную теорию качения выдвинул Томлинсон (J. A. Tomlinson) [12], который по амплитуде затухающих колебаний на экспериментальных установках маятникового типа определял коэффициент сопротивления качению. Схожие и аналогичные предположения развивали А. С. Ахматов, Б. В. Дерягин и др.

Теория несовершенной упругости, развиваемая А. Ю. Ишлинским, Пальмгрэном (A. Palmgren) [13], Тэйбором (D. Tabor) [14], предполагает основное влияние на процесс сопротивления качению гистерезисных потерь, связанных с различием в скорости деформации материала на передней и задней частях контакта при качении. В [15] приводятся зависимости по определению момента сопротивления качению, вызванного гистерезисными потерями. Тэйбор признает, что выводы этой теории в основном справедливы для относительно мягких материалов: резины, бронзы и др.

Д. В. Конвисаров в [16] привел критический анализ существовавших теорий и предположил совместное влияние нескольких причин. Такой же оценки придерживается и С. В. Пинегин [7, 8, 17]. На современном этапе исследований это является очевидным; преобладающее влияние того либо иного фактора проявляется в зависимости от внешних условий, сопровождающих качение. Так, например, межмолекулярное взаимодействие тел может оказывать ощутимое влияние в условиях вакуума, гистерезисные потери преобладают в контакте мягких материалов. Необходимо также учитывать возможные микропластические деформации и шероховатость поверхности.

Интерес представляет [18], в которой доказывается, что «сопротивление качению шара плоскости определяется работой, затраченной на пластические контактные деформации в процессе качения». При этом в расчетах рассматривается только половина деформированного объема поверхности и не допускается возможность проскальзывания. Однако, на наш взгляд, потери на пластические деформации являются хоть и важным, но не единственным аспектом, влияющим на сопротивление качению, т. к. трение качения должно отсутствовать при возникновении только упругих деформаций и стремиться к нулю при многочисленных прокатываниях.

Большинство теорий рассматривает контакт сухих поверхностей. Если на ранних этапах исследований считалось, что смазка изменяет величину, но не изменяет характер зависимостей сопротивления качению, то в настоящее время признано, что смазочный материал в контакте как один из факторов приобретает значимое, если не подавляющее влияние на процесс качения [19]. Это связано с ростом скоростей и удельных нагрузок на детали машин в современном машиностроении, при которых для объяснения причин сопротивления качению необходимо привлечение гидродинамической теории смазки. В [20] отмечается, что механические потери в смазочном материале определяются усилиями на перемешивание смазочного материала и образование гидродинамического клина.

Решение задачи качения цилиндра конечных размеров по поверхности, покрытой слоем вязкого вещества, приведено в [21]. Теоретическое исследование качения цилиндра и шара по криволинейной поверхности впервые осуществил П. Л. Капица [22]. Влияние пластичной смазки на процесс качения исследовано в [23]. Значимые результаты экспериментальных исследований получены С. В. Пинегиним и В. Ф. Решиковым.

Фактор смазочного материала имеет существенное и неоднозначное влияние на процесс качения, и именно поэтому разработку теории минимизации потерь мощности при качении со скольжением, на наш взгляд, следует начинать, исследуя взаимодействие сухих поверхностей, а затем отдельно изучать влияние смазочного материала.

### **1.2 Обоснование выбора ППТК в качестве объекта исследования**

Большинство механизмов и кинематических соединений, где используются тела качения для снижения потерь на трение, можно условно разделить на несколько групп (рисунок 1.2).

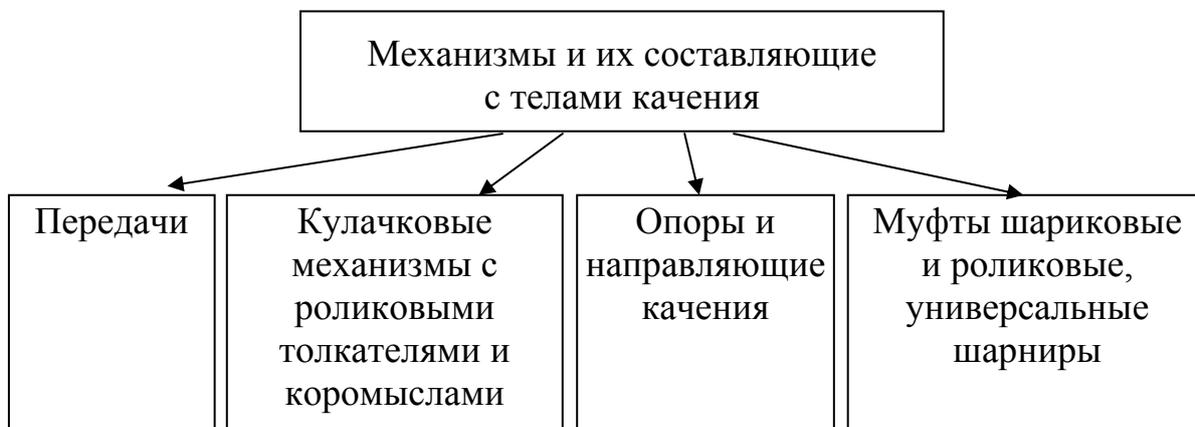


Рисунок 1.2 – Классификация механизмов с телами качения

Данная классификация носит условный характер, т. к. ШРУС может рассматриваться как муфта и как передача (редуцирующий узел). Наиболее значимой группой является группа механических передач. ППТК являются относительно новым типом механических передач, исследования которых продолжаются в настоящее время. Кроме наличия всех факторов, влияющих на сопротивление качению в ППТК, они были выбраны для исследования также и потому, что обладают определенными преимуществами по сравнению с традиционными зубчатыми передачами, а именно:

1) потенциально имеют высокую нагрузочную способность при небольших габаритах вследствие больших значений коэффициента перекрытия;

2) обладают широкими кинематическими возможностями, в том числе обеспечивают возможность получения разнонаправленности

вращения ведущего и ведомого валов при использовании определенных кинематических схем, позволяют создавать коробки передач при поочередном торможении разных звеньев, осуществлять преобразование вращательного движения в возвратно-поступательное, могут работать в режимах дифференциала и мультипликатора и др.;

3) имеют относительно низкую себестоимость изготовления, ремонта и сборки.

ППТК в большинстве вариантов соосны, обладают свойством самоторможения. На основе этих передач возможно создание малогабаритных редуцирующих узлов, легко встраиваемых в различные машины, механизмы и приспособления. Указанные выше достоинства присущи в той или иной мере другим видам механических передач, поэтому кратко исследуем данный вопрос.

Прежде всего следует оценить преимущества планетарных зубчатых передач. История развития зубчатых передач исчисляется столетиями, теория эвольвентного зубчатого зацепления была предложена Л. Эйлером еще в 1750–1762 гг. К тому же зубчатые колеса выпускаются промышленностью серийно. Планетарные и дифференциальные механизмы широко исследованы Виллисом (R. Willis), В. Л. Кудрявцевым [24], а также В. Ф. Крайневым, Ф. Л. Литвиным, Л. П. Смирновым, С. Н. Кожевниковым, М. Д. Генкиным, Э. Л. Айрапетовым, Л. Н. Решетовым, О. В. Бересневым, Ю. А. Шацем, В. Н. Шанниковым, Кляйном (H. Klein), Неменом (G. Niemann), Э. Б. Вулгаковым и многими др. Применение различных видов зацеплений: циклоидального, круговинтового, спироидного и др. – позволило получить определенные преимущества, однако потребовало усложнения технологии изготовления и удорожания производства. В частности, известны планетарные прецессионные передачи [25] и планетарные передачи с квазиэвольвентным внутренним зацеплением сателлитов [26]. Традиционные схемы планетарных передач позволяют реализовывать любые диапазоны передаточных чисел, однако следует отметить резкое снижение КПД при их больших значениях и относительно низкий коэффициент перекрытия.

Широко известны волновые передачи (фрикционные и зубчатые). В США и Японии налажено серийное производство волновых редукторов общего назначения. В СССР также они выпускались серийно, с типоразмерами, начиная с 50,8 мм (диаметр делительной окружности гибкого элемента). Значительный вклад в развитие теории волнового зацепления внесли М. Н. Иванов, Е. И. Гинзбург, Н. И. Левитский, В. К. Рубцов и др. Слабым элементом в конструкции волновых передач

является гибкое звено. В этой связи интересны попытки заменить в волновой передаче гибкий элемент на связанные тела качения (роликовая цепь), предпринятые в [27] и затем в [28]. В [29] с помощью цепи создан аналог планетарной передачи. Цепные передачи в классическом исполнении (с роликовой цепью) также имеют тела качения, предназначенные, однако, для передачи мощности на большие расстояния и не обеспечивающие создание малогабаритных приводов и больших передаточных отношений. Данному типу передач посвящено много специальных исследований.

Передаточное отношение всех рассмотренных выше передач зависит от диаметральных габаритов. Однако технологические сложности являются основной причиной, сдерживающей широкое использование того или иного типа планетарных передач. На наш взгляд, ППТК *цилиндрического типа* (с осевым перемещением центров тел качения, траектории которых расположены на цилиндрической поверхности) также обладают рядом преимуществ и на основе предварительного анализа способны занять свою нишу среди планетарных передач других типов. В частности, их применение оправдано при работе в условиях стесненных диаметральных габаритов (в трубах, скважинах). Однако на современном этапе развития ППТК их потенциал раскрыт не полностью и очевидна необходимость продолжения исследований с целью увеличения их КПД и снижения затрат на производство.

### ***1.3 Анализ развития ППТК***

Применение шариков и роликов в механических передачах и системное исследование этих передач начались в начале 60-х гг. прошлого века, хотя многочисленные попытки в этой области исследований предпринимались и ранее. Множество различных конструкций передач, разработанных на сегодняшний день с учетом структуры, конструкции и кинематики, могут рассматриваться в пределах отдельных групп.

ППТК могут быть разделены на фрикционные передачи и передачи зацеплением.

**Фрикционные передачи с телами качения.** К передачам с нежесткими кинематическими связями можно отнести шариковые фрикционные передачи, или шарикоподшипниковые передачи. В них используют тела качения, которые помещаются в сепаратор и при помощи нажимных устройств прижимаются к беговым дорожкам

[30, 31]. За счет сил трения они получают вращение вокруг общей оси совместно с сепаратором, который является ведомым звеном такой передачи. Научные работы о шарикоподшипниковых передачах появились еще в 30-х гг. прошлого столетия [32]. Исследователи Л. И. Гасюк [33], В. И. Стадниченко [34], Черни (Černý) [35] и др. отмечают низкую металлоемкость таких передач, невысокую трудоемкость их изготовления, бесшумность работы. Основные недостатки: фрикционные передачи имеют непостоянное передаточное отношение, стабильность которого определяется надежностью нажимного устройства, низкую нагрузочную способность, ограниченную максимальной силой сцепления, и в одной ступени способны реализовывать небольшие передаточные числа. К тому же эти передачи имеют в несколько раз больший вес по сравнению с зубчатыми промышленными аналогами и низкий КПД. На базе фрикционных передач с телами качения разработаны многочисленные конструкции вариаторов.

*Шарико- и роликовинтовые передачи.* Их можно выделить в отдельную группу фрикционных передач, близкостоящую к группе кинематических соединений (подшипников качения, направляющих). Чаще всего их применяют для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное. В Советском Союзе впервые конструкции шариковинтовых механизмов были разработаны в 30-х гг. XX-го столетия И. Р. Неменом и Г. В. Никоновым [36]. Простейший шариковинтовой механизм представлен на рисунке 1.3. Он состоит из двух основных звеньев: винта 1 и гайки 5. Тела качения перемещаются по винтовым беговым дорожкам во время рабочего хода и по возвратному каналу 3 во время холостого хода, где 4 – вход в возвратный канал, 2 – выход из возвратного канала.

В настоящее время шариковинтовые и роликовинтовые механизмы стандартизованы и выпускаются централизованно. Как отмечается в [37], «... ролико- и шариковинтовые передачи относительно дороги требуют исполнителей очень высокой квалификации и доступны не каждому машиностроительному заводу». Технология изготовления таких передач сложна, и для ее реализации необходимо специальное оборудование.

**ПШТК с принципом зацепления.** В структуре передач зацеплением следует выделить группу передач с промежуточными телами.

Передачи с промежуточными телами исследователи часто относят к зубчатым передачам, т. к. в них предусмотрены *два основных звена, непосредственно участвующих в зацеплении (контактирующих с телами качения), – шестерня и колесо.* Основное в этих передачах – частичная

замена трения скольжения трением качения, при котором потери мощности гораздо меньше.

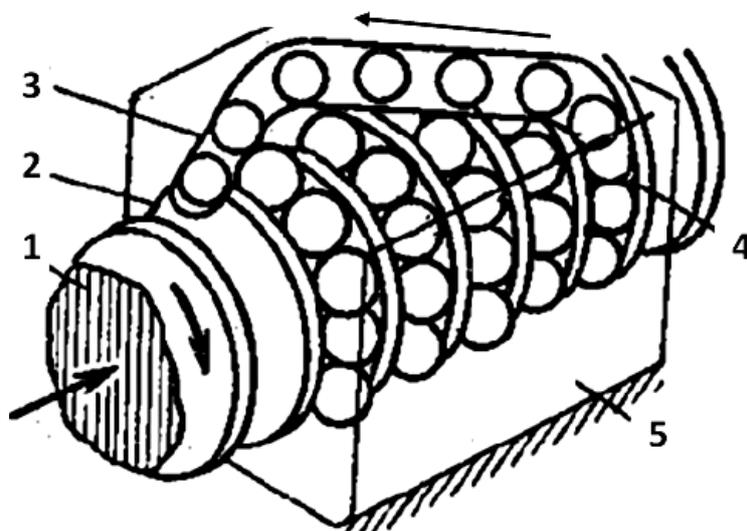


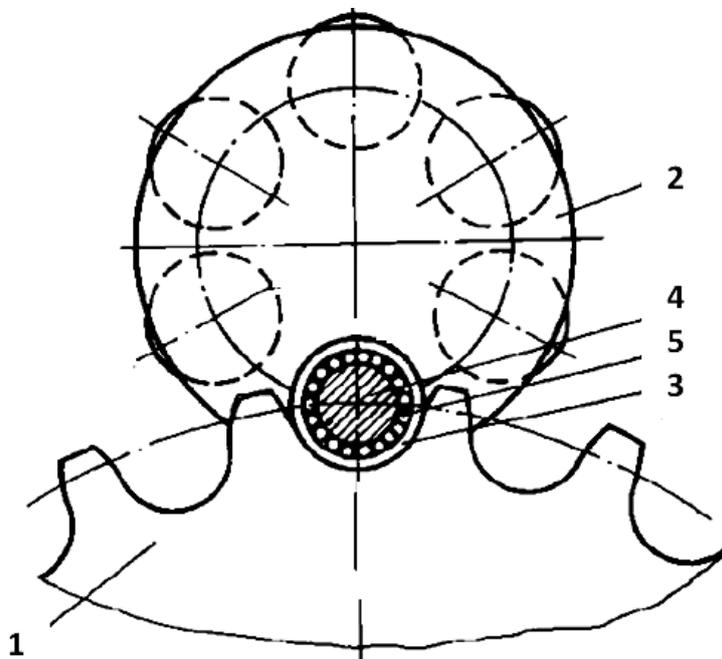
Рисунок 1.3 – Схема шариковинтовой передачи

Простейшая конструкция такой передачи представляет собой зацепление двух колес, у которых (у обоих или у одного из них) зубья заменены на ролики, установленные на осях, либо на шарики, установленные в сферических углублениях на цилиндрических поверхностях колес. Появившиеся три степени свободы у каждого шарика и одна у каждого ролика позволяют телам качения самоустанавливаться и повышать контактную выносливость передачи в целом.

На рисунке 1.4 приведена простейшая конструкция передачи [38], в которой зубья одного колеса взаимодействуют с роликами другого. Аналогичный принцип действия имеют передачи [39, 40].

Передача для параллельных валов с промежуточными телами была предложена П. А. Зараном в 1961 г. [41]. Передача содержала два набора зацепляющихся шариков, связанных с ведущим и ведомым валами посредством шайб. Позже, в 1968 г., появляются шариковые передачи для валов с пересекающимися осями и многоступенчатые передачи с шариковыми промежуточными телами для параллельных валов более сложных конструкций. Отечественными исследователями А. И. Нечаевым, А. Е. Беляевым, В. В. Гуриным, Ан И-Кан, В. Н. Кунделем, Э. Б. Гиндиным, зарубежными учеными Родмела Ладиславом (Podmela Ladislav), Эдвардом С. Тиббальсом (Edward C. Tibbals) и др. было доказано, что нагрузочная способность таких передач примерно в 1,3 раза

выше, чем у зубчатых, за счет низких изгибных напряжений, КПД этих передач примерно соответствует КПД эвольвентных зубчатых передач при снижении уровня шума при работе.



1 – колесо с зубьями, очерченными циклоидами; 2 – колесо; 3 – ролик; 4 – ось (цапфа); 5 – подшипник

Рисунок 1.4 – Схема передачи

На рисунке 1.5 изображена схема одной из конструкций шариковой передачи с параллельными осями. Она состоит из шестерни-обоймы 1 со сферическими углублениями на торцевой поверхности, в которых находятся шарики, и колеса 2, на торцевой поверхности которого выполнены зубья в виде канальных поверхностей сложной формы. Тела качения (шарики) обозначены индексом 3.

Однако рассмотренные передачи имеют небольшой коэффициент перекрытия (см. рисунок 1.4) и малые значения передаточных чисел (см. рисунок 1.5).

В Томском политехническом институте в 80-х гг. была сформирована научная школа под руководством А. Е. Беляева, исследовавшая передачи с промежуточными телами (в том числе и с параллельными валами) [42]. Отметим, что передачи с промежуточными телами сложны в изготовлении: формообразование профилей зубьев на колесах, особенно сложной формы, в 70–80-х гг. прошлого века было связано с опреде-

ленными технологическими трудностями, увеличивавшимися требованиями повышенной точности.

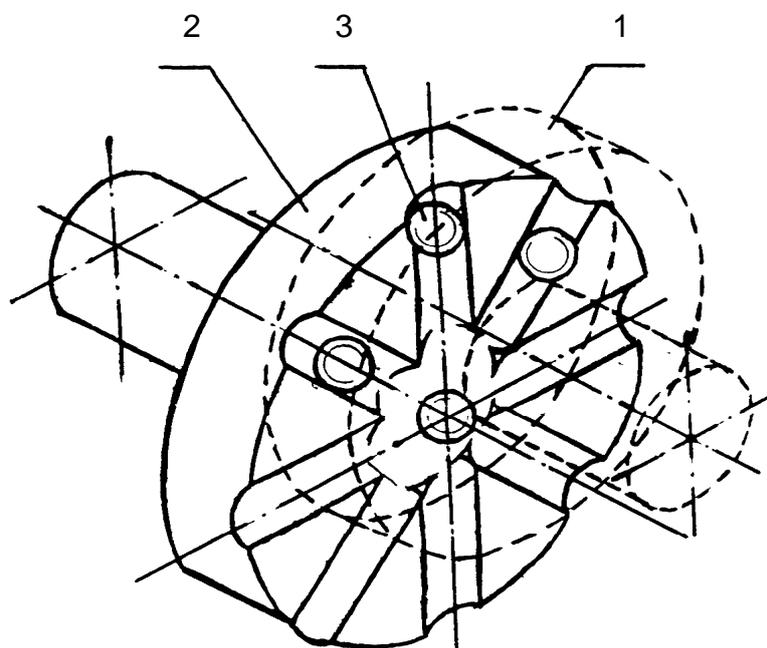
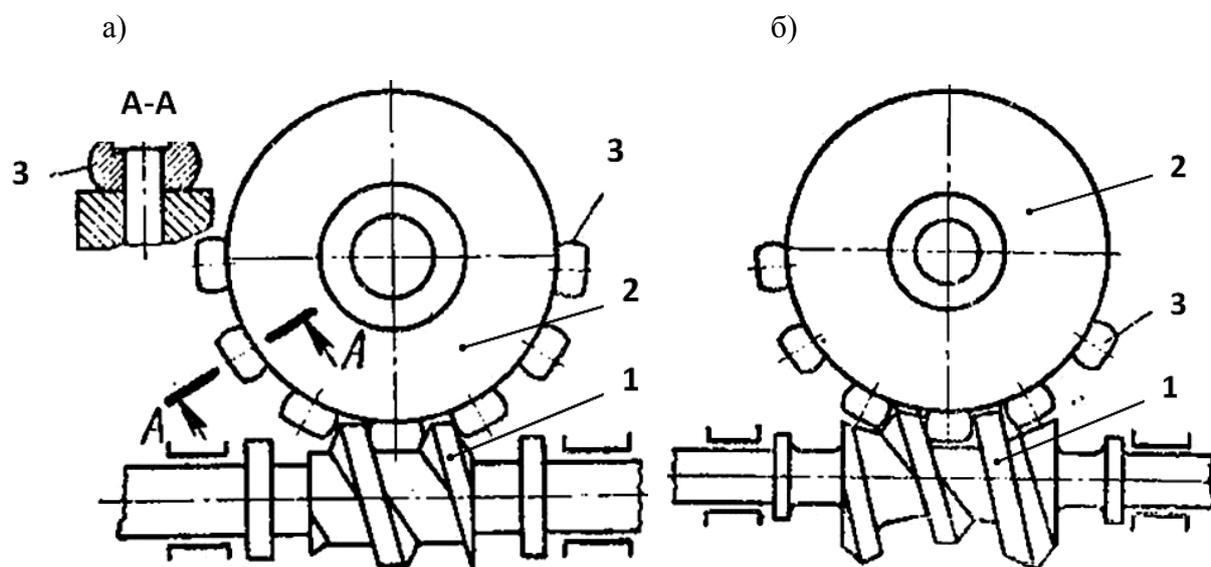


Рисунок 1.5 – Передача с параллельными осями с передаточным отношением  $u = 2$

Известны также червячные передачи [43, рисунки 3.46 и 3.48], в которых зубья червячных передач заменены цевками с вращающимися на них роликами (рисунок 1.6). Исследованиям червячных передач, в которых червяк (цельный либо в виде пружины) взаимодействует с цевками с установленными на них подшипниками качения, посвящена [44].

Одним из наиболее перспективных типов передач следует признать планетарные цевочные передачи с циклоидальным зацеплением. Как отмечают многие специалисты, по показателям надёжности, долговечности и компактности редукторы, созданные на основе цевочных передач, во много раз превосходят другие известные образцы редукторов как отечественного, так и зарубежного производства. Одним из первых конструкцию редуктора такого типа предложил Карл Хаманн (Carl Hamann) в 1900 г. [45].

Рассмотрим конструкцию и принцип работы данных передач подробнее. Главными компонентами планетарной цевочной передачи являются быстроходный вал с эксцентриками, внутренний фланцевый тихоходный вал, циклоидальные диски и корпус редуктора (рисунок 1.7).



а – цилиндрическая передача; б – глобоидная передача; 1 – червяк; 2 – червячное колесо; 3 – ролики

Рисунок 1.6 – Схемы червячной передачи с роликами

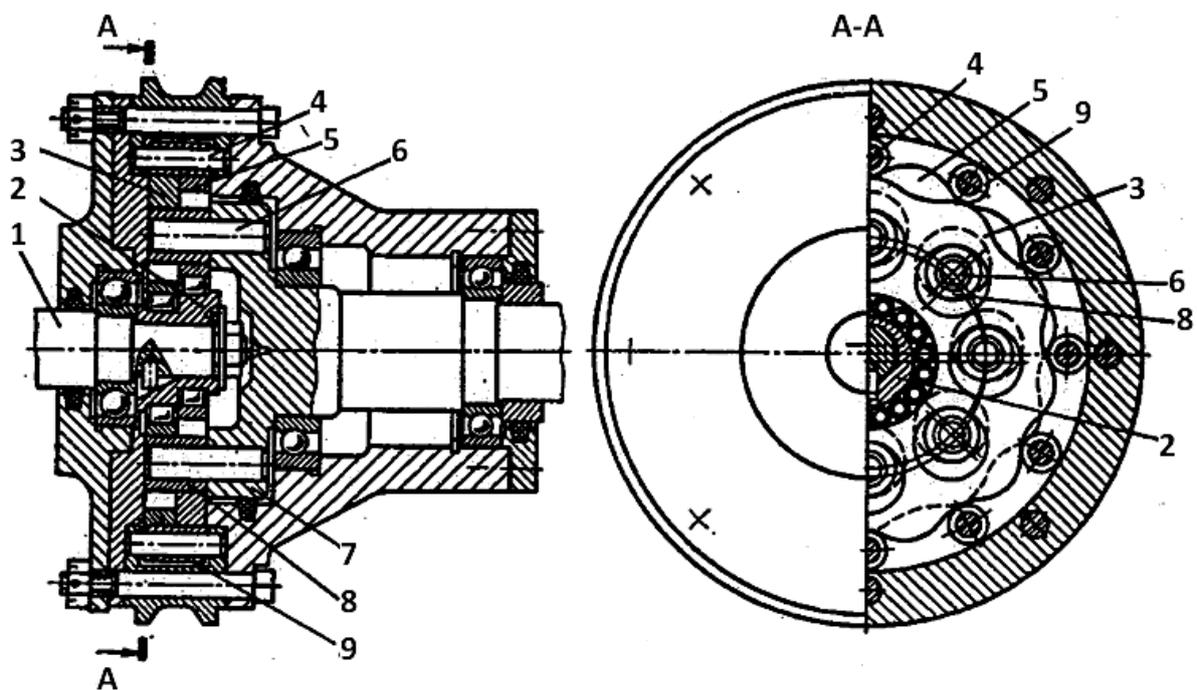


Рисунок 1.7 – Планетарно-цевочный редуктор

На ведущем валу 1 установлен сдвоенный эксцентрик 2 со смещением эксцентриситета по фазе на  $180^{\circ}$ . Циклоидальный диск 3 установлен на одном эксцентрике, а циклоидальный диск 5 – на втором. Зубья дисков находятся в зацеплении с цевками 9, оси 4 которых закреплены в корпусе редуктора. На диске 7 ведомого вала закреплены пальцы 6 с роликами 8. Ролики 8 входят в отверстия дисков 3 и 5. Вращающийся эксцентрик прокатывает циклоидальные диски по внутренней периферии стационарного зубчатого венца. Циклоидальные диски вращаются в корпусе зубчатого венца и при этом поворачиваются вокруг своей оси в обратном направлении. В этой системе циклоидальный профиль диска постепенно входит в зацепление с роликами неподвижного внутреннего зубчатого венца, чтобы произвести обратное вращение на малой скорости. За каждый полный оборот быстроходного вала циклоидальный диск поворачивается на один шаг циклоидального зубчатого зацепления в противоположном направлении.

Обычно на диске имеется на один циклоидальный зуб меньше, чем роликов в неподвижном корпусе зубчатого венца, что определяет передаточное отношение редуктора, численно равное количеству циклоидальных зубьев на диске. Замедленное вращение циклоидальных дисков передаётся на тихоходный вал редуктора с помощью приводных пальцев, которые входят в зацепление с отверстиями, расположенными симметрично вокруг оси каждого диска. Система из двух циклоидальных дисков, используемая совместно со сдвоенным эксцентриковым кулачком, увеличивает нагрузочную способность редуктора, увеличивает плавность работы, снижает вибрации. Исследователи данных передач отмечают высокую износоустойчивость, надёжность и прочность конструкции этих редукторов.

Цевки могут быть установлены на сателлите [46]. При этом сателлит является входным звеном, цевки которого обкатываются по поверхности внутренних зубьев неподвижного колеса и по наружным зубьям колеса, связанного с выходным валом.

Планетарная цевочная передача широко известна. В российской научной литературе подробно описаны все теоретические аспекты её реализации, а попытки практического воплощения были предприняты в бывшем СССР ещё в 50–70-х гг. прошлого столетия. Известен патент [47], в котором сателлит выполнен с отверстиями, в которых размещены ролики, контактирующие с эксцентриком и неподвижным колесом. Однако технические методы производства того времени не позволяли добиваться требуемой точности изготовления компонентов планетарных

цевочных передач. И лишь сейчас, когда на рынке появилось принципиально новое технологическое оборудование зарубежного производства (Япония, Швейцария и др.), задача создания и производства этих передач стала осуществимой. Однако очевиден также тот факт, что такое оборудование на данный момент доступно не всякому машиностроительному предприятию.

Среди преимуществ данных передач следует отметить (по данным ЗАО «НТЦ „Редуктор”» [48]) следующие:

- малые габариты и низкая относительная масса (от 0,03 до 0,08 кг/Н·м);
- широкий диапазон передаточных отношений одной ступени;
- высокий коэффициент полезного действия (до 92 %);
- высокие надёжность и долговечность (до 15 лет работы в одну смену с постоянной нагрузкой);
- высокая устойчивость к перегрузкам (до 500 %);
- малая инерционность и низкий уровень шума (до 70 дБА).

В Республике Беларусь известны работы по совершенствованию планетарного цевочного зацепления, проводимые в ИМИНМАШ НАН Беларуси под руководством О. В. Берестнева [49]. Среди фирм дальнего зарубежья наибольшую известность приобрели редукторы японского производства и фирмы «Твинспин» [50].

В последнее время исследования планетарных зубчатых передач различных типов продолжают. Однако встроить силовую планетарную зубчатую передачу в ограниченный диаметральный размер (особенно менее 50 мм) весьма проблематично, высокие требования предъявляются к точности изготовления зубчатых колес и к точности сборки.

Аналогом цевочных передач являются планетарные зубчатые передачи, сконструированные по схеме КН-V, с той лишь разницей, что вместо зубьев одного из колес (с внутренним зацеплением сателлитов) используются ролики (тела качения), установленные на пальцы, а эвольвентный зубчатый профиль зубьев заменен циклоидальным. При этом в зацеплении участвует ограниченное число зубьев (цевок).

**Планетарные передачи с телами качения.** Данная структурная группа отличается от предыдущей тем, что эти передачи имеют три основных звена, в процессе работы контактирующих с телами качения и способных, кроме редукторов, образовывать дифференциалы. Работая в режиме редуктора, шариковая (роликовая) планетарная передача имеет три основных звена (ведущее, ведомое и заторможенное), а также

промежуточные звенья в виде тел качения, выполняющие функции сателлитов.

Отличительной особенностью передач данного типа является то, что тела качения образуют систему, которую можно рассматривать как отдельное звено. Относительные движения центров тел качения внутри этой системы взаимосвязаны, а движение всей системы аналогично движению гибкого звена волновой передачи. На наш взгляд, термин «передачи со свободными телами качения» [51] не вполне применим для данных механизмов, т. к. тела качения не свободны, а перемещаются под действием наложенных на них связей.

При дальнейшем рассмотрении планетарных передач с телами качения необходимо разделить их на несколько групп: цилиндрические, плоские сферические и конические. Теоретически, беговые дорожки могут образовываться на любых поверхностях, однако ввиду сложности изготовления таких передач наибольшее распространение получили передачи с беговыми дорожками, исполненными на цилиндре и плоскости.

Рассмотрим сначала цилиндрические передачи. Одна из подгрупп этой разновидности явилась развитием двухзвенных шарико- и роликвинтовых передач, которые с добавлением в конструкцию третьего звена превратились в передачи зацеплением. Примером использования принципа клина в передаче вращения является шариковый редуктор москвича Ф. П. Сопрунова, предложенный в 1910 г. [52] и явившийся прообразом современной шаровинтовой передачи. Передача вращательного движения осуществлялась путем взаимодействия трех тел вращения через подвижные элементы (шарики), расположенные в направляющих этих тел (рисунок 1.8).

Л. Макта (L. Mackta) в 1953 г. также предложил конструкцию [53] шариковинтового редуктора, сложного в изготовлении.

За рубежом известны планетарные роликвинтовые передачи, разработкой которых на уровне серийного производства занимается концерн SKF (Швеция). Их особенность – наличие тел качения в виде резьбовых роликов, расположенных между винтом и гайкой и совершающих планетарное движение относительно оси ходового винта. В [54] отмечается КПД этих передач – более 80 %, грузоподъемность при тех же габаритах, что и у шаровинтовых передач – в 3 раза больше. Фирма SBC (Франция) выпускала роликвинтовые передачи для желез-

нодорожных тележек-домкратов с электроприводом от аккумуляторных батарей, предназначенных для подъема локомотивов и вагонов [55].

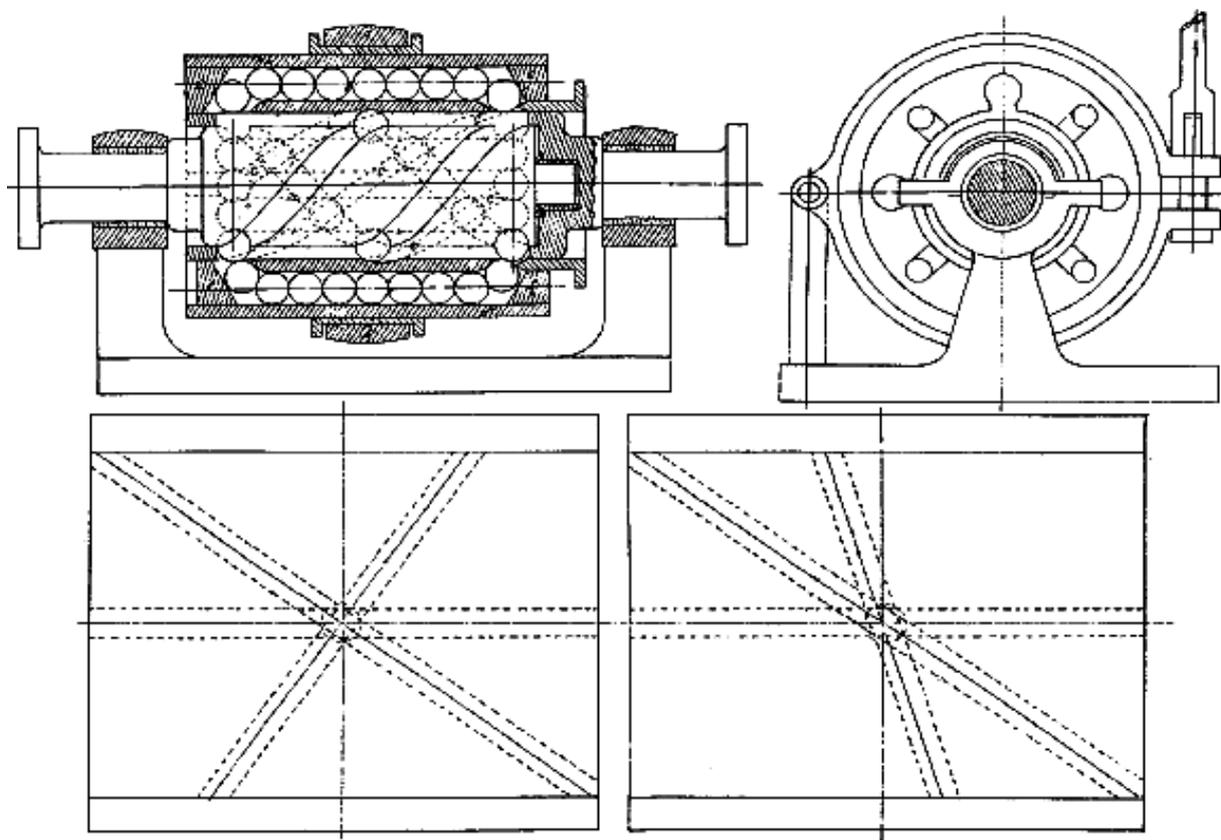
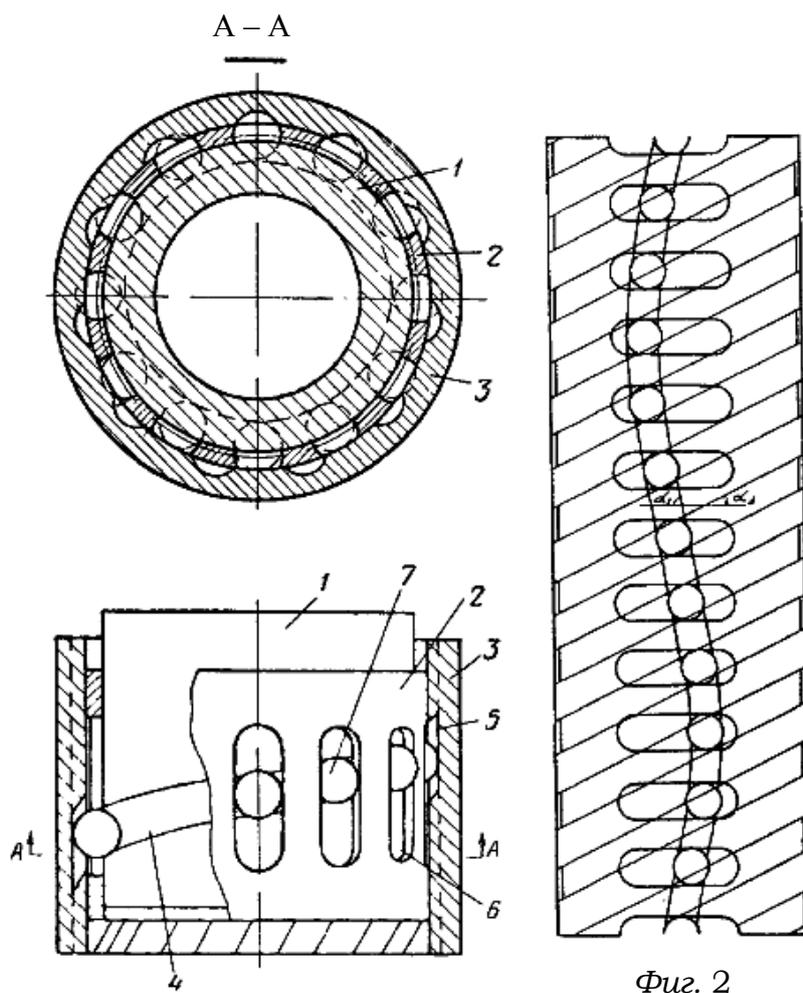


Рисунок 1.8 – Фигуры 1, 2 и 3 пат. Ф. П. Сопрунова

В 1964 г. В. В. Воробьев предложил конструкцию шаровинтовой передачи [56] для создания редуктора, отличающуюся другим механизмом возврата шаров, нежели редуктор Сопрунова. Передача содержала три коаксиальных обоймы 1, 2 и 3 (рисунок 1.9), крайние из которых (1 и 3) на поверхностях, обращенных к средней обойме, снабжены винтовыми пространственными дорожками (4 и 5) для шаровых сателлитов 7, размещенных в прорезях 6 промежуточной обоймы 2.

Беговая дорожка одной из обойм, помимо своей рабочей части, имеет участок возврата шаров в исходное положение. Этот участок выполнен в виде винтовой линии, наклоненной в другую сторону, и имеет глубину, обеспечивающую выход шаров из зацепления с другой крайней обоймой.



Фиг. 1

Фиг. 2

Рисунок 1.9 – Конструкция шаровинтовой передачи В. В. Воробьева (а. с. 295927, СССР)

При вращении одной (например, внутренней) обоймы и торможении другой (наружной) шары сателлиты, выполняя планетарное движение, увлекают за собой третью обойму. Передаточное отношение такой передачи определяется соотношением между шагами винтовых дорожек или между тангенсами углов их подъема. Для обеспечения постоянства передаточного отношения передачи винтовые линии 5 с постоянным углом подъема должны взаимодействовать с винтовой линией 4. Изготовление паза с профилем, состоящим из двух отрезков винтовых линий с переменной глубиной, представляет определенные технологические трудности. К недостаткам данной конструкции также можно отнести ненагруженность половины шариков во время работы и

относительную нереверсивность передачи: при изменении направления вращения ведущей обоймы меняется характер клинового взаимодействия и, следовательно, нагрузочная способность.

Широкие исследования передач с пространственными дорожками для шариков и каналами их возврата в исходное положение в 70–80-х гг. XX в. были проведены В. Н. Стрельниковым [57]. Одна из конструкций передач сферического типа [58] показана на рисунке 1.10. Передача состоит из сферических ведущей обоймы 1, ведомой обоймы 2 и остановленной обоймы 3. Канавка 4 ведущей обоймы 1 при вращении перемещает шары 7 вдоль канавки 6, шары при этом давят на криволинейную канавку 5, заставляя обойму 2 вращаться. Возврат шаров осуществляется с помощью каналов возврата. Изменение передаточного отношения осуществляется изменением угла между осями обойм 1 и 2.

При этом очевидна сложность изготовления и сборки передачи, конструкция которой приведена на рисунке 1.10.

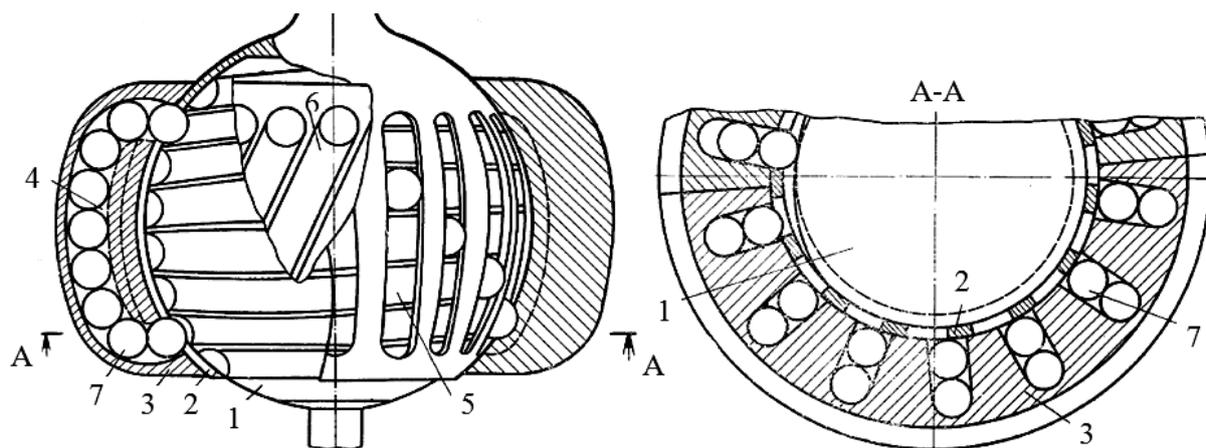


Рисунок 1.10 – Схема шаровинтовой передачи (а. с. 494550, СССР)

Применение замкнутых пространственных периодических беговых дорожек позволило обеспечить нагруженность тел качения в процессе работы передачи и уменьшить холостые пробеги сателлитов. Первые попытки в данном направлении предпринимались еще около века назад. На рисунке 1.11 приведена схема редуктора с роликовыми сателлитами [59]. Конструкция предусматривает две цилиндрические втулки, имеющие зигзагообразные пазы, обращенные друг к другу, и промежуточное звено с осевыми пазами.

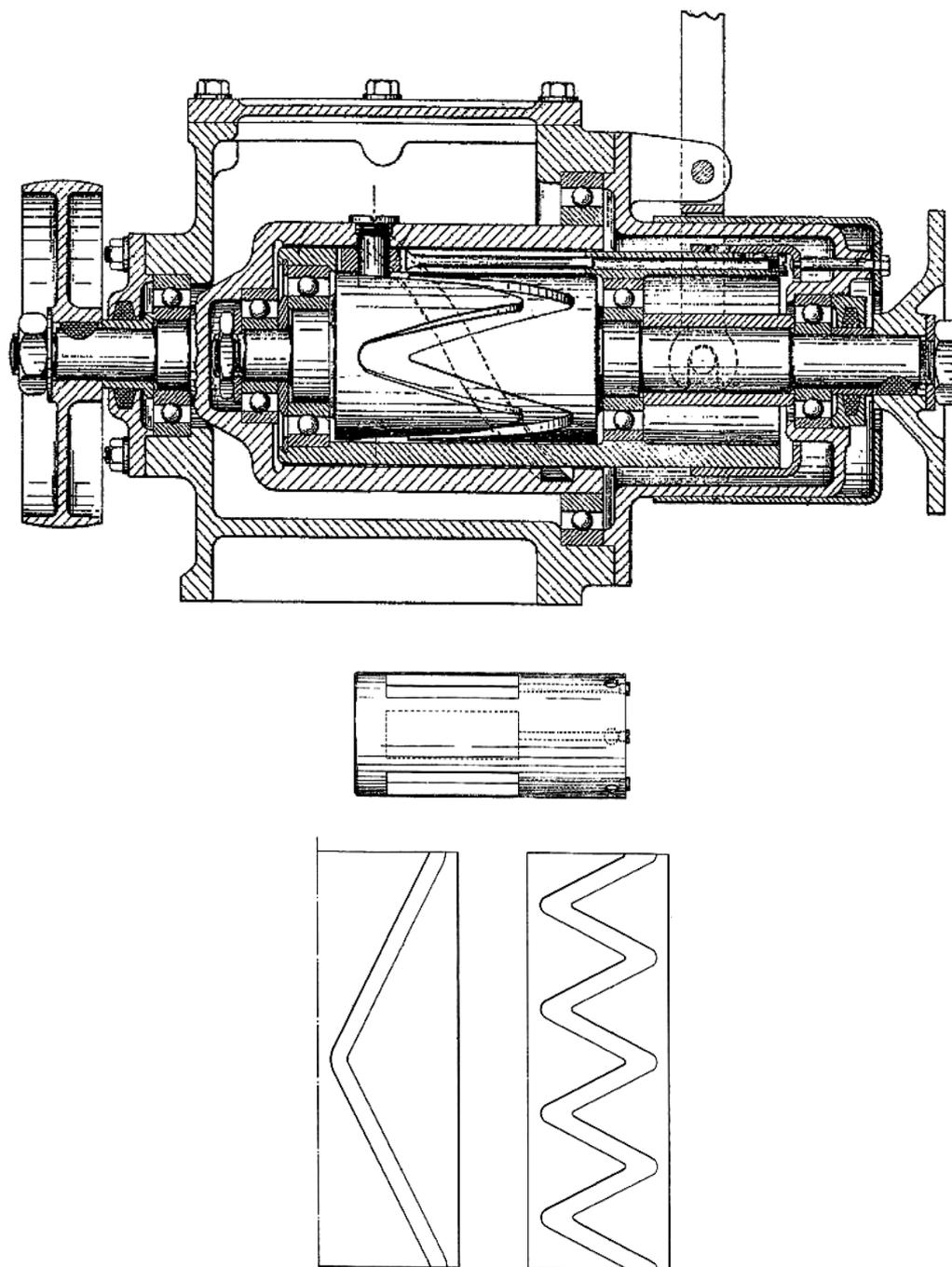


Рисунок 1.11 – Фигуры 1, 5, 6 и 7 пат. Великобритании 257052 (1926 г.)

Среди конструкций советских разработчиков следует отметить изобретение Д. С. Рабиновича [60], заявленное в 1951 г. В нем автор, критикуя недостатки планетарных передач с цевочно-циклоидальными профилями, предлагает зацепление, на деталях которого выполнены замкнутые одно- и многопериодные синусоидальные пазы, взаимодействующие с телами качения. Ошибочно полагая, что развертка на

плоскость окружности, расположенной на сфере, является синусоидальной кривой, изобретатель приводит вариант цилиндрической передачи (рисунок 1.12).

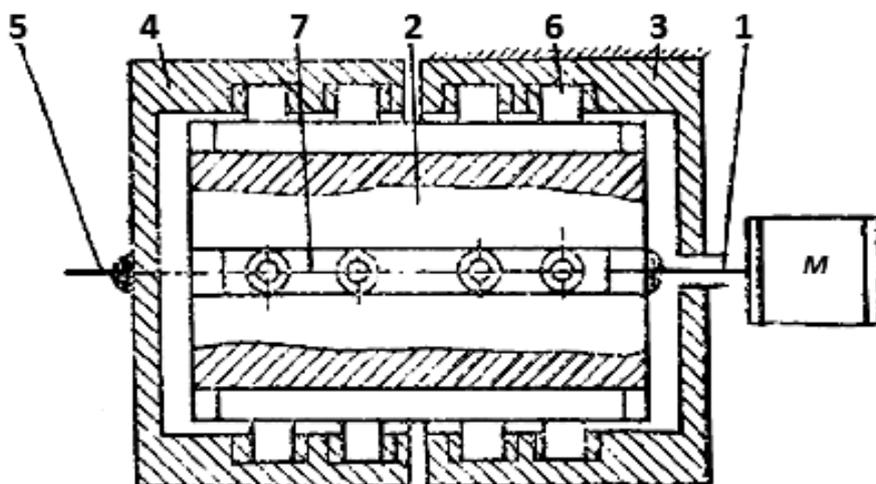


Рисунок 1.12 – Сфероидный зубчато-винтовой механизм (а. с. 109419, СССР)

Ведущий вал 1 соединен с четырехрядной роликовой обоймой 2, в пазах которой сухари 7 движутся «прямолинейно возвратно». На шипах сухарей закреплены ролики, которые взаимодействуют с двумя замкнутыми пазами 6, выполненными на внутренней поверхности неподвижной сферической обоймы 3, и двумя пазами обоймы 4, связанной с выходным валом 5. Конструкция передачи с ползунами была позже также предложена в [61], а ее усовершенствование – в [62].

Аналогичную [59] конструкцию имеет одна из разновидностей планетарного шарикового редуктора (рисунок 1.13), предложенная болгарским инженером В. К. Кировым [63].

Конструкция автомобильного дифференциала с шариковыми сателлитами [64] приведена на рисунке 1.14. Беговые дорожки, в отличие от изобретений [59–63], выполнены не зигзагообразными (кусочно-винтовыми), а синусоидальными («sinusformigen Kurven»), замкнутыми на наружной и внутренней поверхностях цилиндрических деталей. Промежуточное звено – сепаратор – имеет продольные пазы и связан с шестерней главной передачи. Шарик вводится в зацепление через осевые пазы во втулках 1 и 2, затем в зацепление вводится сепаратор 3.

Р. М. Игнатищев предложил синусошариковую передачу (СШП) для редукторов-вставок забойных машин для бурения скважин [65] с

аналогичным [63, 64] принципом работы. От рассмотренных конструкций синусошариковый редуктор (СШР) отличался возможностью закладывания шариков в радиальном направлении (через отверстие в наружной втулке) и использованием определенной группы точек пересечения кривых. На рисунке 1.15 приведены детали СШР, а также СШР в сборе. Преимуществом СШР являлось также то, что передачи можно изготавливать многорядными с параллельным распределением потока мощности, благодаря чему возможно значительное увеличение их несущей способности без увеличения диаметральных размеров [66, 67].

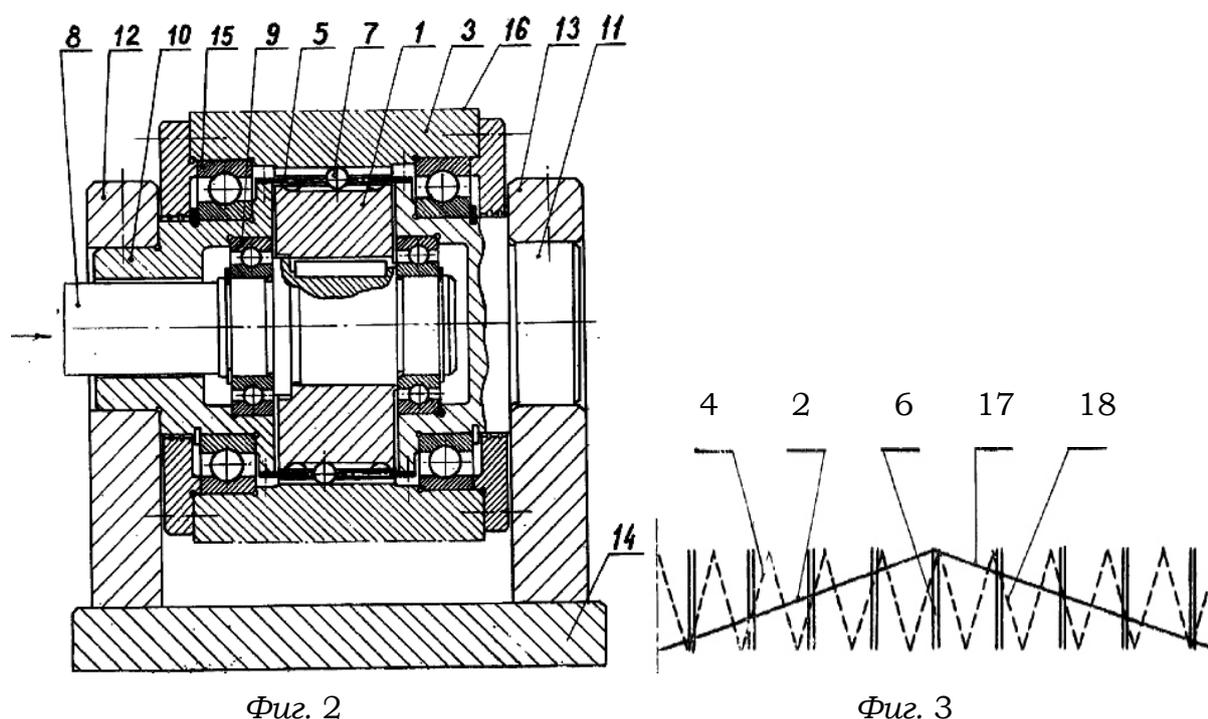
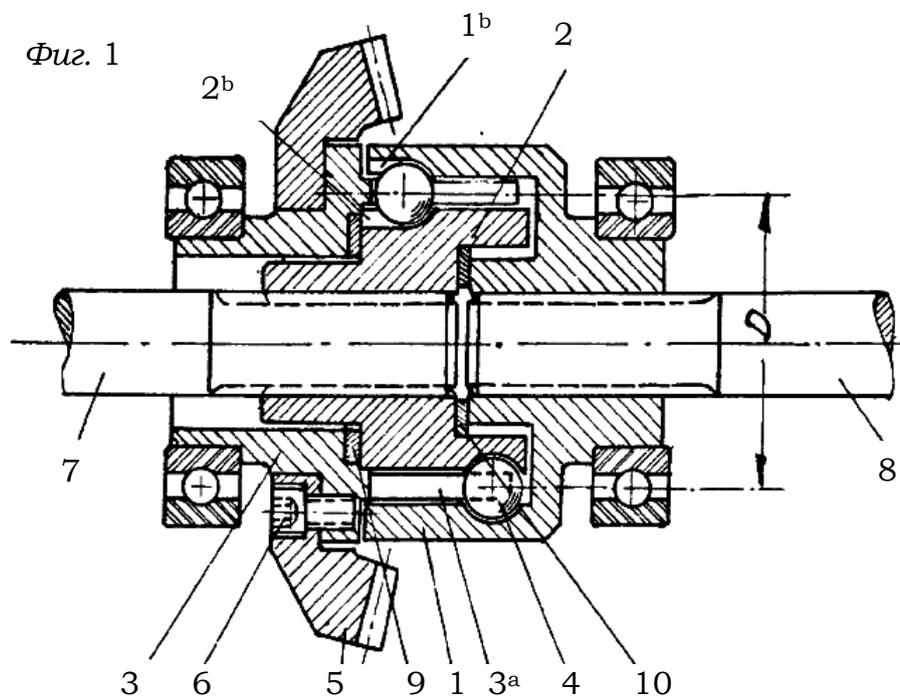


Рисунок 1.13 – Фигуры 2 и 3 а. с. 13751, НРБ

Р. М. Игнатищевым были разработаны основы теории синусошарикового зацепления, введена терминология (данная разновидность ППТК была названа синусными передачами) и, по-видимому, впервые найдена наиболее удачная область применения таких передач (ППТК цилиндрического типа) – техника для бурения нефтяных и газовых скважин [68, 69]. Во многом благодаря Р. М. Игнатищеву в 70-х гг. прошлого века была создана научная школа, исследовавшая ППТК, в Могилевском машиностроительном институте (с 2000 г. – Могилевский государственный технический университет, с 2003 г. – Белорусско-Российский университет). Среди первых значимых работ отечественных

ученых этой школы необходимо отметить кандидатскую диссертацию Д. М. Макаревича [70].



Фиг. 2

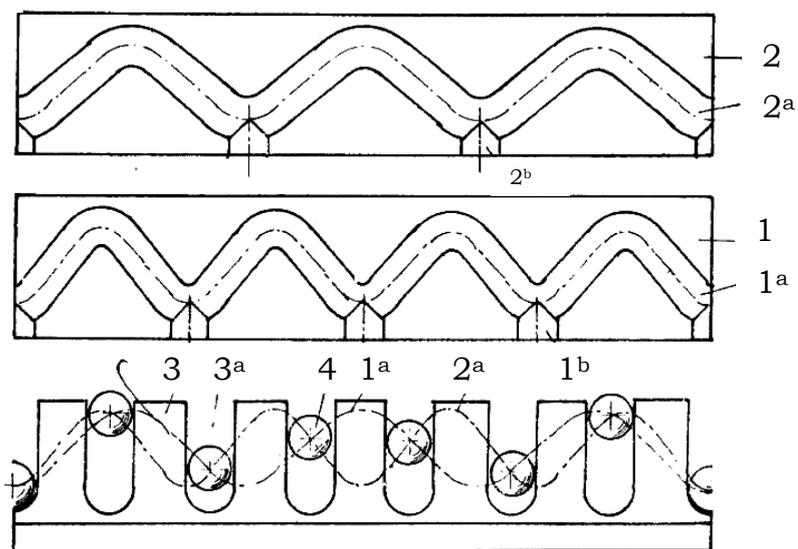


Рисунок 1.14 – Фигуры 1 и 2 пат. Германии 801421 (1951 г.)

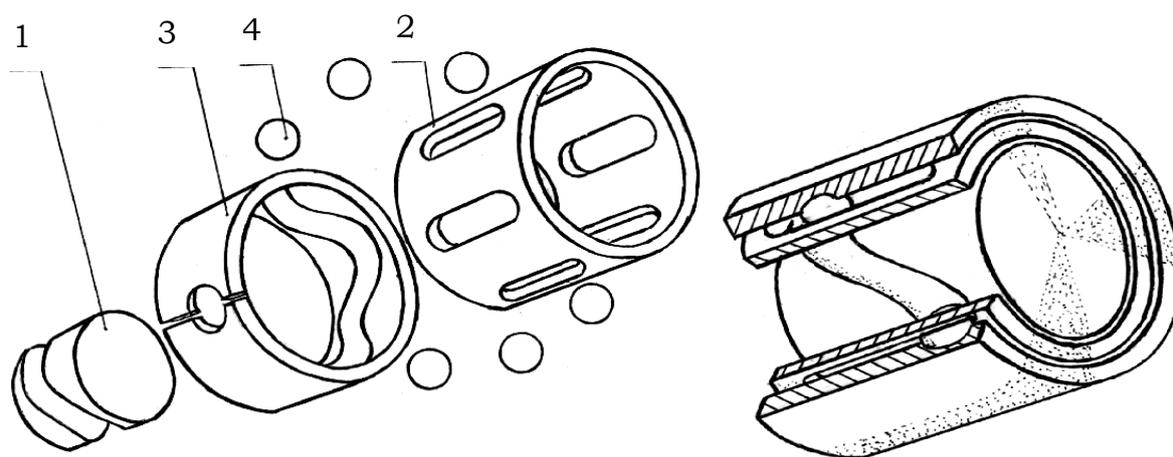


Рисунок 1.15 – Детали СШР и СШР в сборе

За рубежом исследования в данном направлении велись Геппертом (E. F'Geppert) [71], Хартли (J. A. Hartley) [72], Фолино (F. A. Folino), Брусалом (F. Brusal) [73] и др. На рисунке 1.16 показана схема передачи [71] с принципом работы, аналогичным принципу работы СШР.

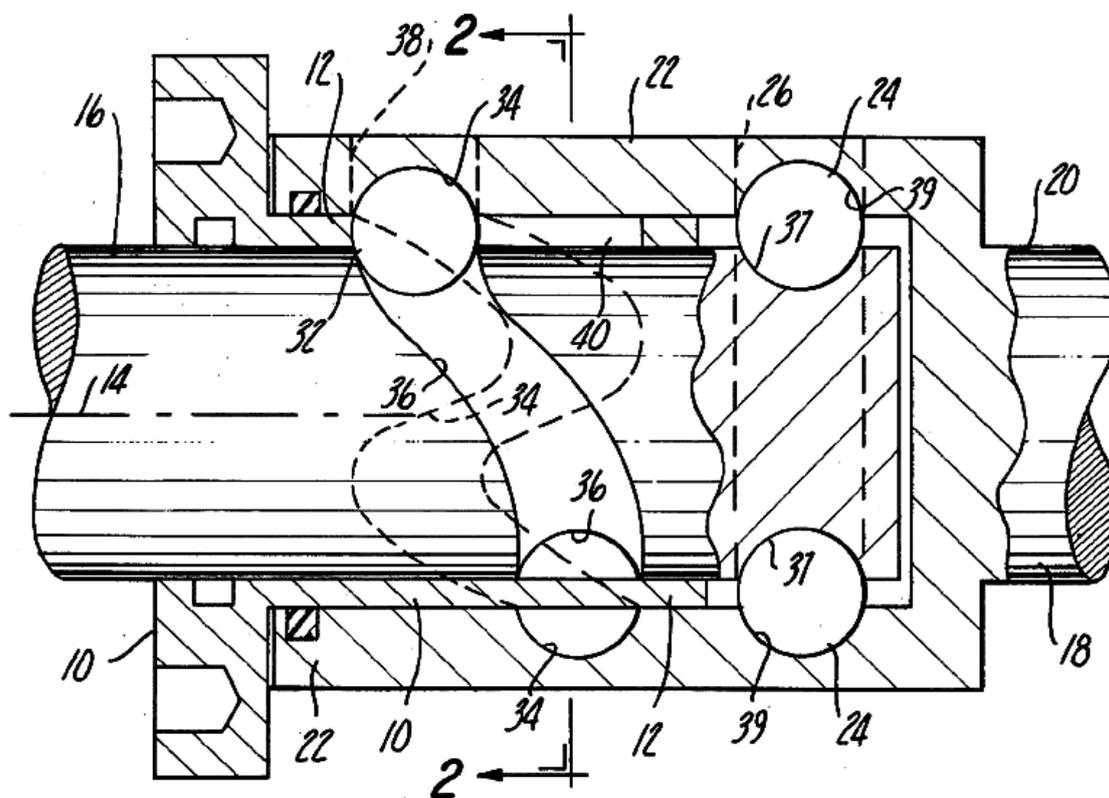


Рисунок 1.16 – Фигура 1 пат. США 4069718 (1978 г.)

Следует отметить, что подавляющее большинство научных работ по данной тематике являлись авторскими свидетельствами и патентами, т. е. несли в себе конструкторскую новизну. Исследования кинематики планетарных шариковых передач с цилиндрическими обоймами и замкнутыми периодическими дорожками на них в виде синусоид выполнил Леман (M. Lehmann) (ФРГ) [74], и его статья явилась одним из первых известных автору опубликованных теоретических исследований в области ППТК с замкнутыми периодическими беговыми дорожками.

Одно из основных преимуществ СШР и редукторов аналогичных конструкций заключается в том, что их передаточное отношение не зависит непосредственно от размеров сечения, перпендикулярного оси, т. е. от максимального диаметра редуктора. Это позволяло разрабатывать редукторы с максимальным наружным диаметром 195, 164, 127 мм и менее с высокой нагрузочной способностью, нашедших применение при создании буровой техники. Автор данной диссертации определенный период времени проводил исследования и оптимизацию СШР, основные результаты которых отражены в [75, 76] и др., а также в кандидатской диссертации [77], защищенной в 2001 г.

Работы над изучением передач цилиндрического типа продолжают по настоящее время. Известен патент РФ [78] на конструкцию передачи, включающую два цилиндра с эллипсообразными пазами и охватывающую втулку с продольными пазами. Передача является двухступенчатой, и в каждой ступени отсутствует третье основное звено. Она имеет фрикционный принцип действия и предназначена для передачи незначительных крутящих моментов. В конструкции передачи согласно описанию к патенту Японии 1984 г. № 59-180153 (рисунок 1.17), а также в конструкции [79], предложенной в 1987 г., используется принцип зацепления, однако передача, предложенная японскими разработчиками, и передачи, представленные в [78, 79], имеют увеличенные осевые габариты из-за того, что оба вала располагаются в корпусе последовательно.

В конструкции передачи [80] на ведущем и ведомом валах исполнены несколько параллельно расположенных эллипсообразных пазов. Сепаратор является промежуточным звеном. На фигурах описания к патенту изображены эллипсы с разным углом наклона. Недостатками данной конструкции является возможность заклинивания тел качения при попадании на вершины и ненадежность промежуточного звена, ослабленного пазами.

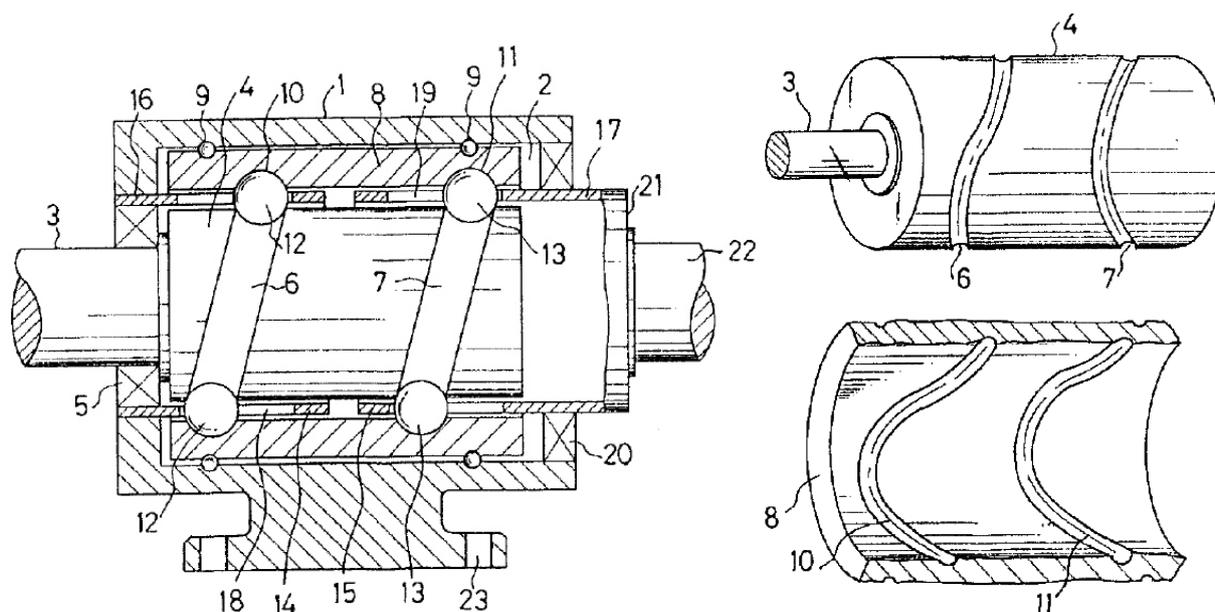


Рисунок 1.17 – Фигуры 1, 2 и 3 пат. 59-180153 JP

В СШП и рассмотренных передачах аналогичного типа тела качения относительно движение совершают вдоль оси передачи. При этом шарики перемещаются по беговым дорожкам, а сами передачи имеют вид трансформированного радиального подшипника качения. Из группы передач с осевым перемещением тел качения можно выделить большую группу передач с рабочими поверхностями, расположенными на торцах взаимодействующих деталей. Рассмотрим конструкцию волновой передачи [81] (рисунок 1.18).

Передача состоит из ведущего вала 1, корпуса 2, генератора 3, торцовая поверхность которого имеет зубья треугольного профиля; гибкое звено представлено телами качения 4; жесткое колесо 5 имеет отверстия для осевого перемещения тела качения и связано с выходным валом 6; жесткое колесо 7 также имеет торцовые зубья треугольного профиля. Как отмечается авторами, передаточное число определяется углами профиля треугольных зубьев генератора 3 и колеса 7.

Схожая схема передачи в многорядном исполнении была предложена в патенте ГДР 1984 г. [82]. Рядность передачи осуществлялась как в радиальном, так и в осевом направлении. В конструкции [83] предложено использование роликов для передачи нагрузки.

Конструкция, предложенная А. А. Рябцевым [84], представлена на рисунке 1.19.

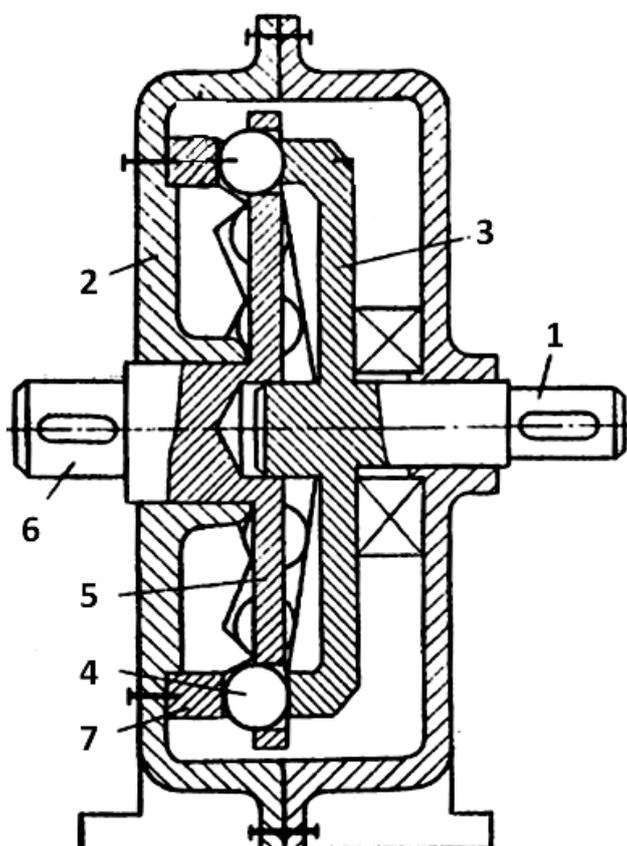
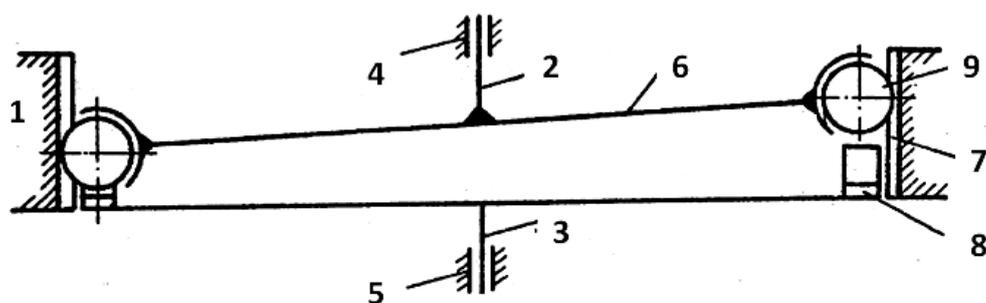


Рисунок 1.18 – Схема волновой передачи (а. с. 559052, СССР)



1 – корпус; 2 – входной вал; 3 – выходной вал; 4, 5 – опоры; 6 – водило; 7 – центральное колесо; 8 – коническое колесо с торцовыми зубьями; 9 – шарики

Рисунок 1.19 – Планетарная сферическая передача (а. с. 1025941, СССР)

Тела качения 9 взаимодействуют с тремя звеньями: входным валом 2 с кольцевым пазом эллипсовидной формы, зубчатым колесом 7 и колесом 8 с коническими зубьями. Колесо 7 жестко связано с корпусом. Таким образом, автор рассматривает только обращенную схему планетарной

передачи. Водилом в данной конструкции, на наш взгляд, было бы целесообразно назвать деталь 7, а не 6, выполняющую функцию генератора. В описании к изобретению не раскрывается сущность шарикового зацепления. Применение в данной конструкции эвольвентных зубчатых колес с исходным профилем по ГОСТ 13754-81, на наш взгляд, приведет к вибрациям или заклиниванию передачи.

При этом, как отмечается в описании к изобретению, связанное с корпусом колесо 7 также имеет зубья на внутренней поверхности, а не пазы. В [85] этот же автор заменил внутренние зубья колеса 7 на ролики.

Рассмотрим конструкцию схожей по принципу действия передачи, приведенную в [86]. Передача (рисунок 1.20) содержит ведущий барабан 1 с профильной торцевой поверхностью, образованной синусоидой с целым числом периодов, ведомый барабан 2 с аналогичной торцевой поверхностью, корпус 3 с пазами, параллельными оси вращения, равномерно распределенными по диаметру, и тела качения 4. Недостатки: малая жесткость из-за большого количества тел качения (большинство из которых не передает нагрузку), увеличенные осевые габариты, сложность изготовления кулачковых поверхностей.

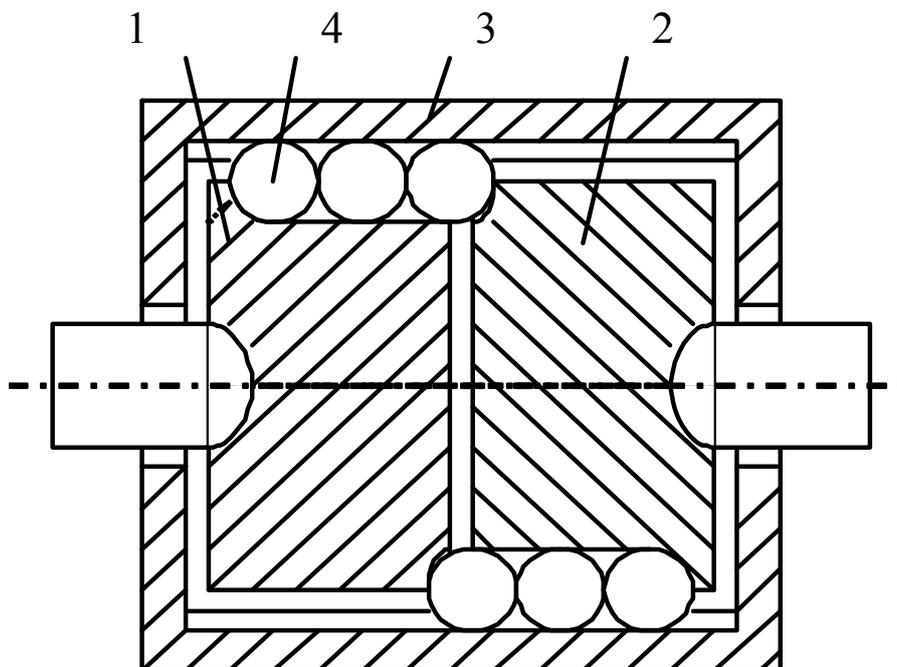


Рисунок 1.20 – Передача с телами качения (а. с. 1221418, СССР)

Рассмотрим развитие передач, в которых тела качения в процессе работы перемещаются в радиальном направлении. Бытовавшее ранее мнение о том, что они появились значительно позже цилиндрических передач, ошибочно. Анализ патентной литературы показал наличие множества конструкций плоских планетарных передач с промежуточными телами качения с односторонним контактом сателлитов с рабочими поверхностями основных звеньев. Некоторые конструкции передач, запатентованные в 20-х гг. прошлого столетия и явившиеся прототипами для современных конструкций, представлены на рисунках 1.21–1.23. На основе уже рассмотренных конструкций по рисункам 1.21–1.23 легко понять принцип работы запатентованных передач без дополнительных пояснений.

Роликовая передача с эксцентриковым генератором, перемещающим в процессе вращения ролики в углублениях неподвижного колеса и в пазах водила, вынуждая последнее вращаться с редукцией (см. рисунок 1.21), запатентована в 1922 г. [87].

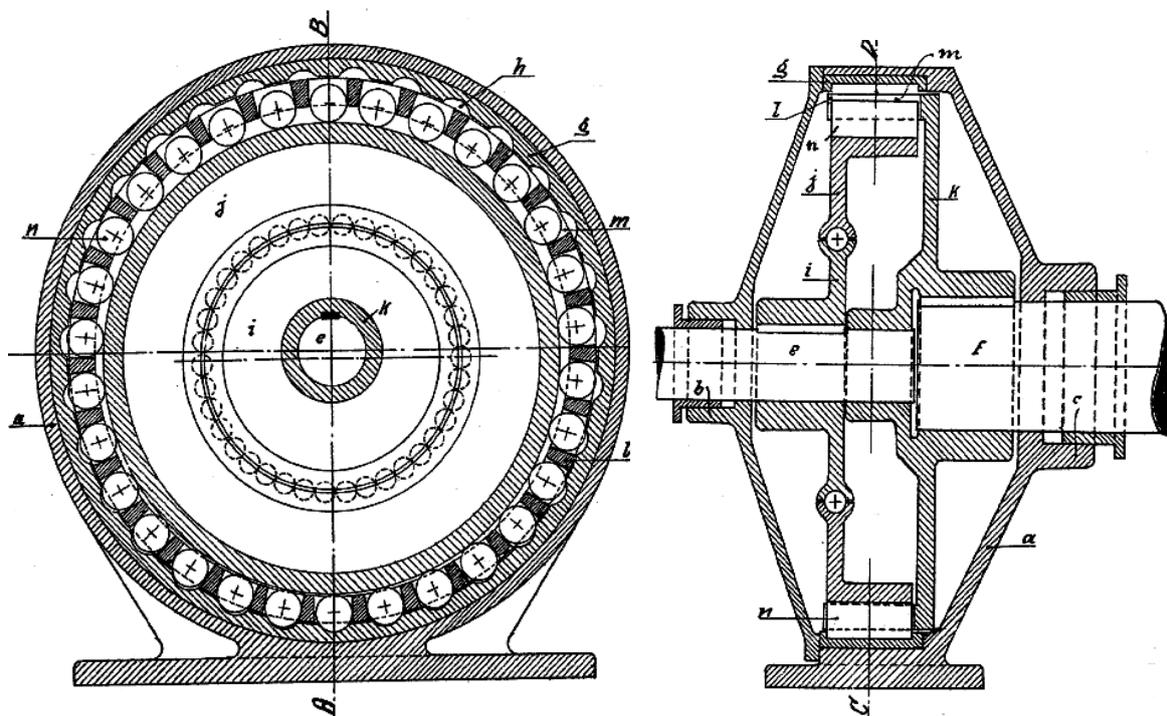


Рисунок 1.21 – Фигуры 1 и 2 пат. Германии DE 354350

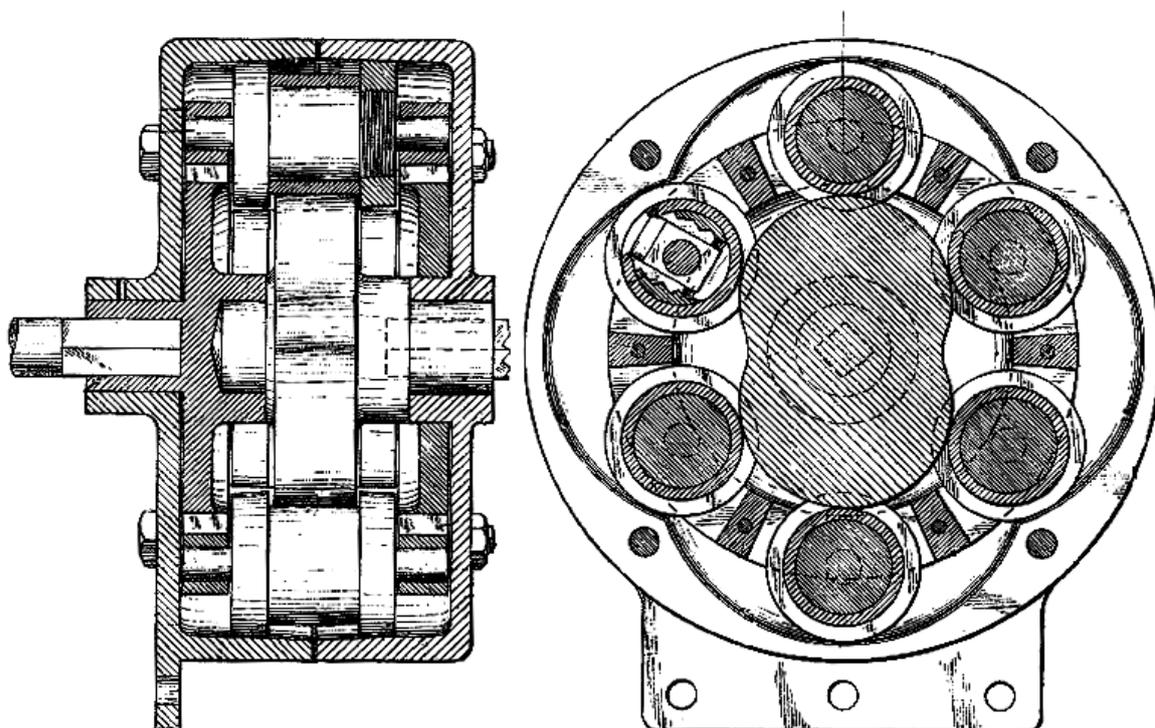


Рисунок 1.22 – Иллюстрация из описания к пат. США (US 1449352)

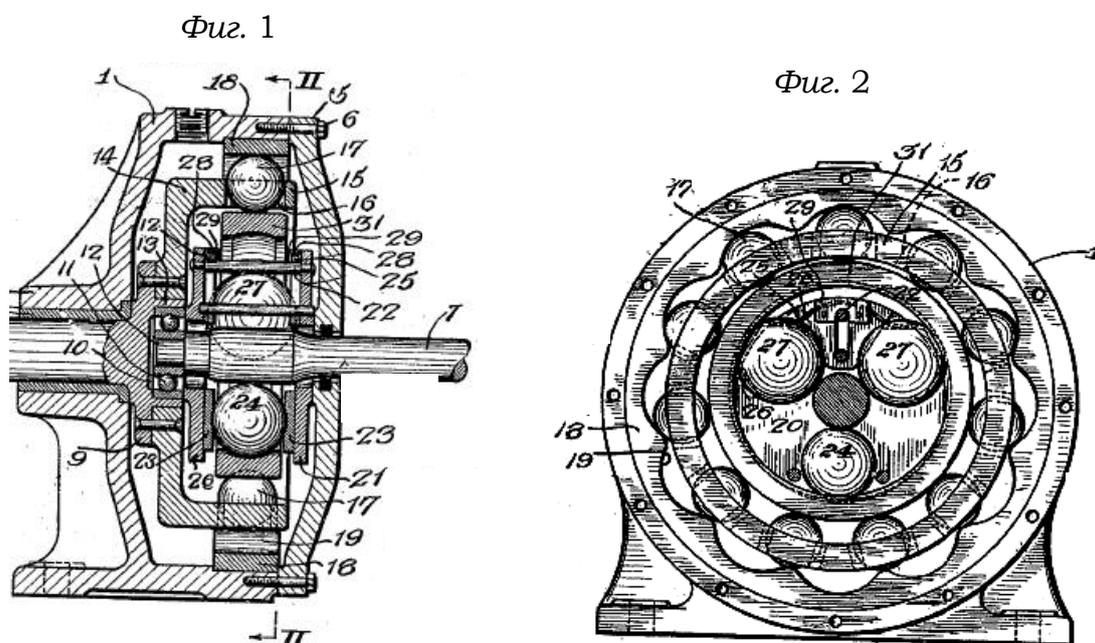


Рисунок 1.23 – Фигуры 1 и 2 из описания к пат. США (US 1735616)

Передача [88], состоящая из двухпериодного генератора, роликов и периодического венца, примечательна тем, что была предпринята попытка снизить потери на скольжение, т. к. ролики взаимодействовали с основными звеньями передачи посредством подшипников (см. рисунок 1.22). Сами же ролики закреплялись в сепараторе с возможностью радиального перемещения с помощью ползунов.

Шариковая конструкция передачи (см. рисунок 1.23) предложена Джорджем Смитом Морисоном (G. S. Morison) [89]. Конструкция этого же автора, приведенная в [90], отличается более сложным устройством генератора.

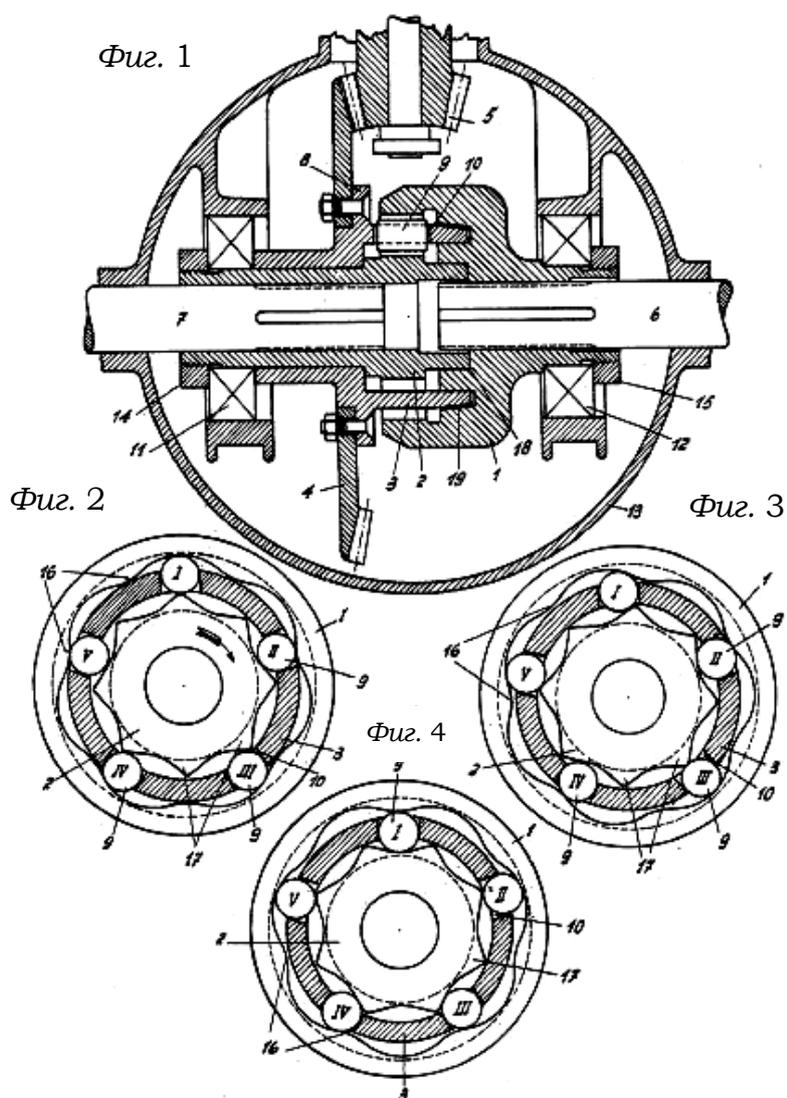


Рисунок 1.24 – Фигуры 1–4 из описания к пат. США (US 1689285)

Отдельно можно рассматривать конструкции автомобильных дифференциалов. В 1925 г. немецкий изобретатель Герман Кнаб (Hermann Knab) предложил конструкцию дифференциальной передачи для самоходного транспортного средства [91]. Как видно из рисунка 1.24, и внутреннее, и наружное звенья соединены с осями колес и имеют периодические поверхности с равным числом периодов (равным 7). Сепаратор связан с корпусом и главной передачей.

Аналогичные конструкции автомобильных дифференциалов запатентовали со сферическими поверхностями взаимодействующих звеньев [92] Порш (F. Porsche) и Рабе (K. Rabe) и др. Следует отметить, что плоские планетарные шариковые передачи (с радиальным перемещением тел качения), волновые передачи с промежуточными звеньями, несмотря на различные названия и некоторые конструктивные особенности, имеют общий принцип действия известных плунжерных передач [93]. Принцип планетарного зацепления с промежуточными телами был положен в основу при создании кулачкового (сухарного) автотракторного дифференциала повышенного трения. Одна из конструкций представлена на рисунке 1.25. Эта передача, по существу, не относится к классу передач с телами качения, т. к. качение там отсутствует, однако она использует аналогичные кинематические принципы.

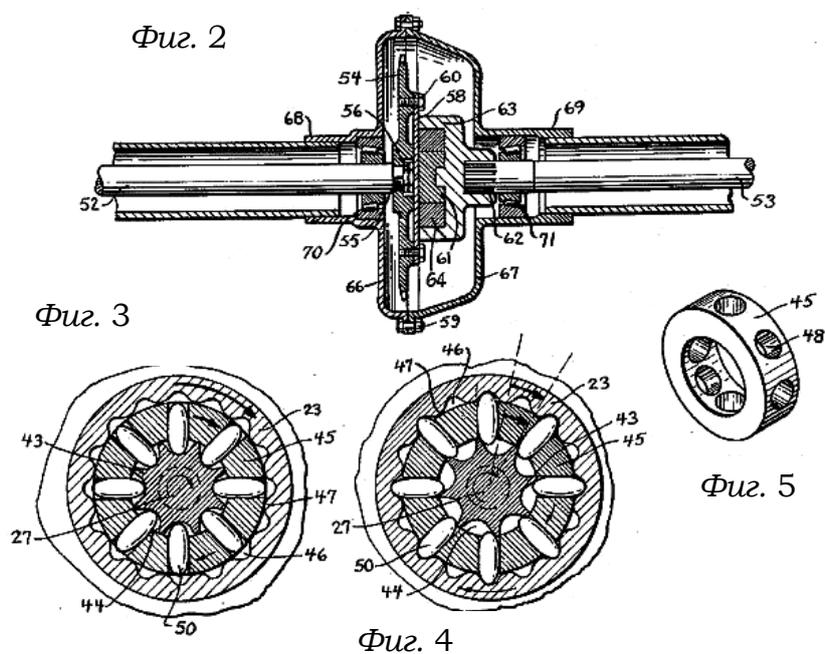


Рисунок 1.25 – Фигуры 2–5 из описания к пат. США (US 2700310)

Принцип действия данного дифференциала был рассмотрен в [94] и в настоящее время описан в многочисленной учебной и научной литературе по расчету трансмиссий автомобилей. Одна из конструкций этого дифференциала широко реализована на практике в автомобилях ГАЗ-62 (образца 1959 г. выпуска), ГАЗ-66. Кулачковые дифференциалы установлены также на бронетранспортерах БТР-60ПБ и БТР-70. Такой же принцип действия имеют и гидромоторы. Передатки этого типа являются торцовыми планетарными шариковыми (плунжерными) передачами (радиально-плунжерными). Общий, уже отмеченный недостаток данного типа передач – увеличенные размеры в диаметральном направлении. Также очевидно отсутствие возможности компенсации износа кулачков в радиальном направлении.

Конструкцию передачи данного типа с роликами в зацеплении и различными профилями впадин остановленного колеса предложил бельгиец Патрик Джорж Леесон (P. G. Leeson) в 1975 г. [95]. Современные конструкции передач включают сдвоенный ведущий эксцентрик для снижения динамических нагрузок и увеличения нагрузочной способности (рисунок 1.26).

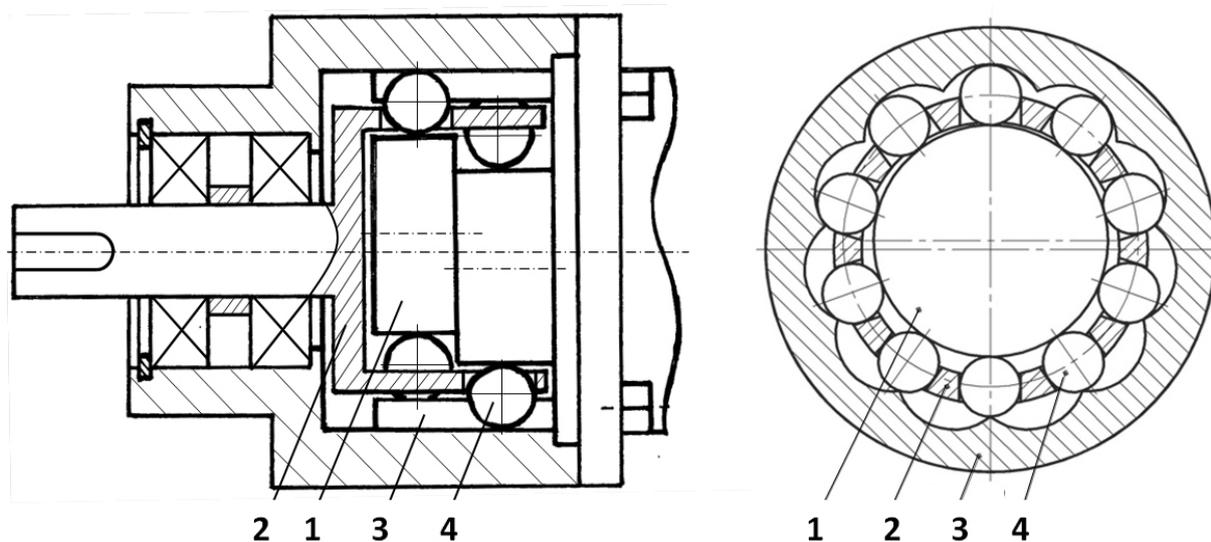


Рисунок 1.26 – Схема двухрядной эксцентриковой передачи, реализуемой фирмой «Симако» (РФ)

Передача состоит из четырех основных элементов: приводного вала с эксцентриком 1, сепаратора 2, тел качения 4 и венца кулачковых секторов 3. Эксцентриковый вал 1, вращаясь, вызывает радиальное перемещение тел качения 4 в пазах сепаратора 2. Тела качения, контактируя с

рабочими поверхностями венца кулачковых секторов 3, вызывают его вращение. Каждый полный оборот эксцентрикового вала поворачивает венец на один кулачковый сектор. Таким образом, передаточное отношение определяется количеством кулачковых секторов венца. Для повышения динамической уравновешенности и нагрузочной способности эксцентрик выполнен сдвоенным.

В СССР передачи подобного типа были широко исследованы В. П. Брюховецким [96]. Ученые ММИ начали исследования аналогичных передач в середине 80-х гг. прошлого века [97]. Недостатками рассмотренной конструкции эксцентриковой передачи являются пониженная нагрузочная способность, обусловленная ограниченным числом шариков, несущих нагрузку, невозможность компенсации износа рабочих поверхностей и технологические сложности изготовления профильных торцовых поверхностей. Последний недостаток группой разработчиков под руководством профессора М. Ф. Пашкевича преодолевается упрощением циклоидального профиля кулачковых секторов и заменой его на сопряженные прямолинейные участки.

Несмотря на отмеченные недостатки, среди всех типов ППТК данный тип передач в настоящее время получил наибольшее распространение. Эти передачи также применяются во вспомогательных механизмах в добывающей промышленности [98]. Широкие исследования геометрии передач с зацеплением центроидно-гипоциклоидального типа были проведены Ю. В. Ершовым в 2007 г. [99]. В 2005 г. в [100] была экспериментально исследована передача с промежуточными телами качения в составе привода запорной арматуры. В 2009 г. была защищена кандидатская диссертация [101], в которой разработана методика расчета данных передач, как шариковых, так и роликовых, с однопериодным и многопериодным генератором применительно к приводам летательных аппаратов. Эти передачи выпускаются серийно и успешно реализуются некоторыми российскими компаниями [102, 103]. За рубежом известна фирма «Синкинетикс Инк.» [104], основанная в начале 90-х гг. Франком А. Фолино (F. A. Folino).

В 80-х гг. прошлого столетия особое развитие (во многом благодаря стараниям ученых ММИ) получили кругосинусоидные передачи (шариковые и роликовые торцовые планетарные передачи) [105]. Передача (рисунок 1.27) состоит из трех дисков 1, 2 и 3, причем на дисках 1 и 3 на торцовых поверхностях, обращенных друг к другу, исполнены замкнутые периодические беговые дорожки: на диске 1 – однопериодная дорожка 5, на диске 3 – многопериодная дорожка 6. Промежуточный диск 2

является сепаратором и содержит радиальные прорезы 7, в которых перемещаются тела качения 4.

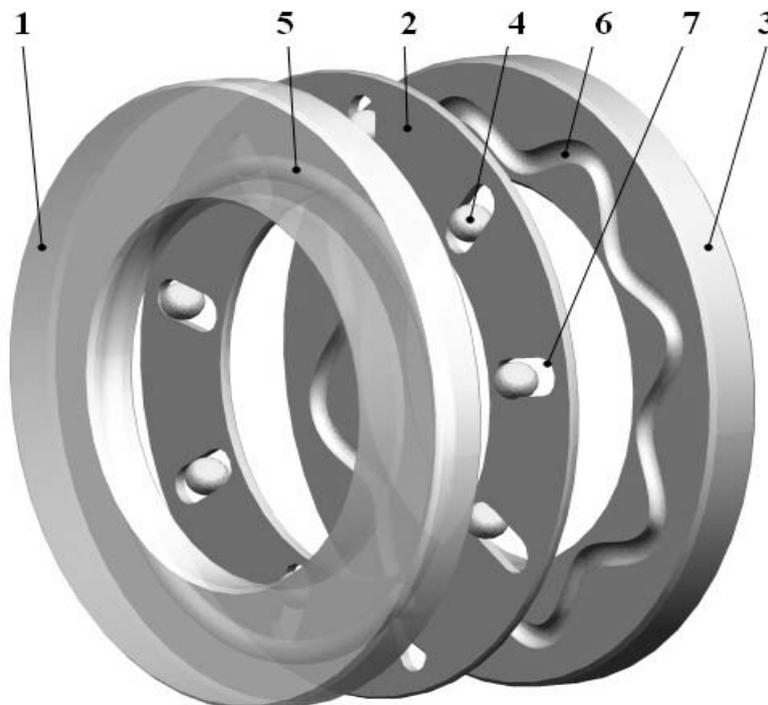


Рисунок 1.27 – Схема плоской планетарной шариковой передачи

Широкие исследования по данному направлению были проведены М. Ф. Пашкевичем [106, 107]. Над развитием плоских планетарных передач с телами качения также плодотворно трудились Р. М. Игнатищев, П. Н. Громыко, А. И. Дерученко, В. И. Довженко, А. В. Капитонов, С. А. Жигунов и др. исследователи. Среди зарубежных исследователей следует отметить коллектив специалистов из Технического университета Клюя Напока (Румыния) Бара (M. Bara) [108], Хандра-Лука (V. Handra-Luca), Тейтана (E. Teutan) и др. Различные типы плоских и цилиндрических передач были предложены в [106] (автор – Франк А. Фолино (F. A. Folino), заявитель – фирма «Синкинетикс Инк.») (рисунок 1.28).

Схожие конструкции приведены в [79, 110], а также в патентах Японии JP59133863 (1984 г.), JP60168964 (1985 г.). Недостатком плоских передач являются их увеличенные диаметральные размеры (соизмеримые с размерами планетарных зубчатых редукторов) и нецелесообразность их использования вследствие этого в качестве редукторов общемашиностроительного назначения, а также в нефтегазовой промышленности (для работ в скважинах).

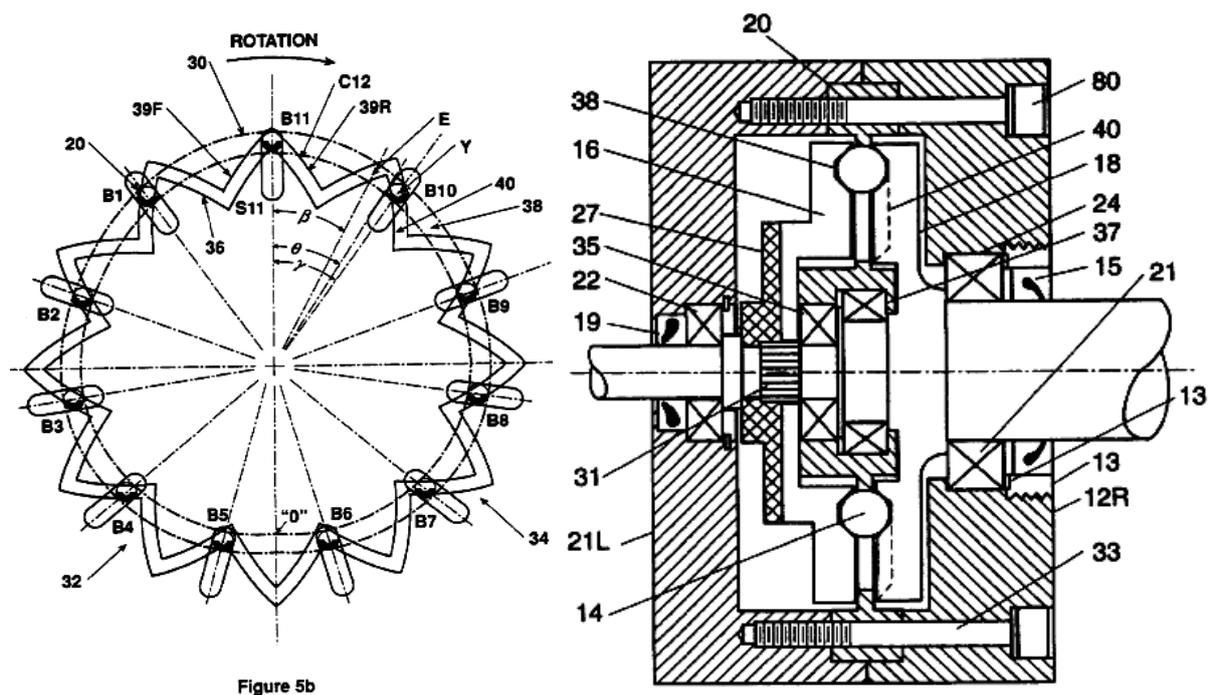


Figure 5b

Рисунок 1.28 – Схема плоской планетарной передачи по пат. США (US 5312306)

В большинстве рассмотренных выше конструкций передач тела качения (их центры) в процессе работы перемещаются по траекториям, лежащим либо на цилиндре, либо на плоскости.

Рассмотрим несколько конструкций сферических передач, например, уже упомянутую конструкцию «шарнирной дифференциальной передачи, особенно для двигательных транспортных средств» [92], предложенную в 1932 г. Фердинандом Порш (F. Porsche) и Карлом Рабе (Karl Rabe) (рисунок 1.29). Отличие её в том, что контактирующие с телами качения (шариками) поверхности деталей были выполнены сферическими, что позволяло осям колес совершать взаимные перемещения.

Интерес представляет еще одна конструкция [111]. Контакт посредством шариков осуществляется двумя звеньями со сферической поверхностью. У одного звена выполнена многопериодная беговая дорожка, а у второго – кольцевой паз. Причем второе звено установлено так, чтобы кольцевой паз был наклонен к плоскости, перпендикулярной оси передачи. Функцию остановленного звена выполняет зубчатое колесо с коническими зубьями на торце, по которому обкатывается колесо, совершая прецессионное движение, связанное со вторым звеном.

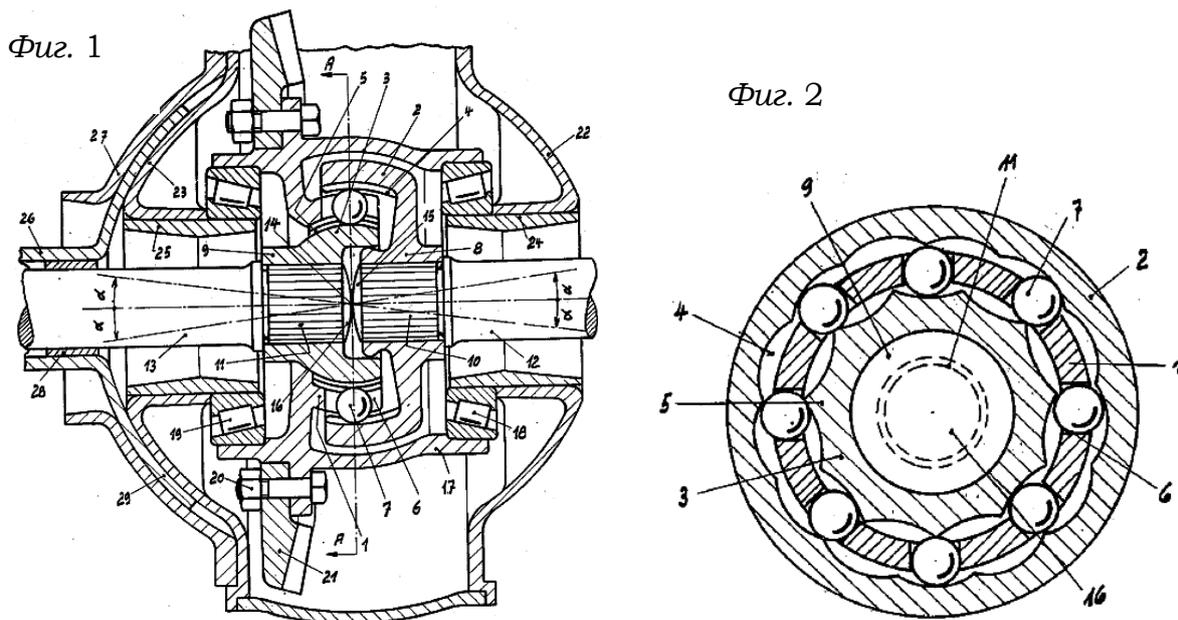


Рисунок 1.29 – Фигуры 1 и 2 пат. США (US 1956358)

К передачам сферического типа относят уже рассмотренную передачу [58], а также планетарные прецессионные передачи с телами качения.

Аналогом прецессионных передач с телами качения является зубчатый механизм [112], в котором спутник совершает сферическое движение, обкатывается одновременно и по неподвижному колесу, и по колесу, закрепленному на выходном валу.

Передача [113] (рисунок 1.30) состоит из корпуса 1, в котором на подшипниках 2 размещен ведомый вал 3, имеющий внутренние зубья, входящие в зацепление с наружными зубьями спутника 4, установленного с помощью конических подшипников 5 на кривошипный вал 6. Кривошипный вал 6 посажен на консольный участок вала привода 7 и центрирован подшипником 8 в крышке 9 редуктора и подшипником 10 в ведомом валу 3. В корпусе 1 выполнена кольцевая дорожка 13 для шариков 11. Шарик 11 размещен в сепараторе 12. На периферийной части спутника 4 выполнены зубья 14, количество которых на единицу больше или меньше, чем шариков 11. На зубьях выполнена профильная дорожка 15 для шариков 11. Вращательное движение вала привода 7 посредством кривошипного вала 6 и конических подшипников 5 передает спутнику 4 колебательное движение относительно точки пересечения осей приводного вала и кривошипа (точки прецессии). Благодаря

наличию зубьев с профильной дорожкой и шариков колебательное движение преобразуется в колебательно-вращательное, т. е. прецессионное. Вращательное движение сателлитного колеса передается ведомому валу 3.

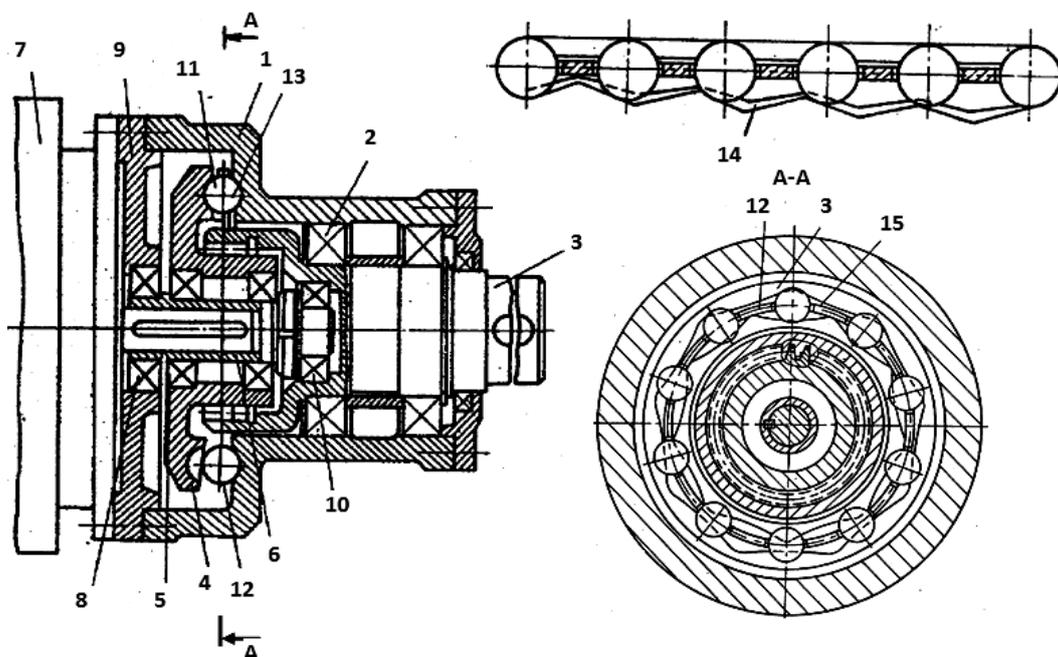


Рисунок 1.30 – Схема прецессионной передачи с телами качения

Конструкция передачи [114] интересна тем, что в ней последовательно соединены две передачи – синусошариковая и прецессионная. При этом используются конические ролики.

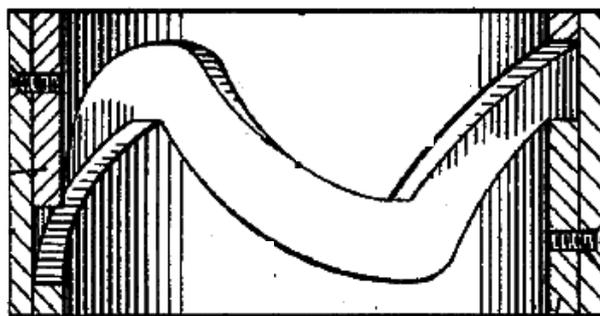
Схема конической синусошариковой передачи предложена в [69]. В [115] приводится схема эксцентриковой передачи с промежуточными телами качения, перемещающимися по конической поверхности. На конической поверхности также располагаются беговые дорожки в одном из вариантов конструкций передачи, описанном в [105].

### **Применение различных кривых зацепления.**

Анализ вышеприведенных схем показывает, что принцип работы планетарных передач с телами качения основан на взаимодействии трех основных звеньев с телами качения, причем беговые дорожки или рабочие поверхности двух из них образованы по некоторым замкнутым периодическим кривым. Наиболее распространены кусочно-винтовые кривые (кривые пилообразной формы, составленные из наклонных

участков прямых) и синусоиды. В [79] предложены уравнения сопряженных кривых для передач цилиндрического типа, обеспечивающих нулевые скорости и ускорения тел качения, при попадании последних на вершины кривых, что приводит к снижению динамических нагрузок в передаче. В [116] предложена конструкция плоской передачи с беговой дорожкой в виде спирали Архимеда.

Конструкция механизма силовой передачи, предложенная англичанином Адольфом Эдвардом Гуллом (A. E. Gull) в 1948 г. [117], сложна и труднореализуема на практике, однако примечательна оригинальным профилем беговых дорожек (циклоидального типа), при котором выпуклые ветви сопрягаются с вогнутыми (рисунок 1.31).



Фиг. 6

Рисунок 1.31 – Выпукло-вогнутый тип беговой дорожки по пат. США (US 2512272)

**Тела качения.** Использование роликов в качестве тел качения повышает несущую способность передач благодаря увеличению длины контактной линии. Однако чувствительность этих передач к перекосам вызывает их повышенную склонность к заеданию и заклиниванию, что требует дополнительных конструктивных мер по центрированию осей роликов в процессе работы. К недостаткам передач с роликами в зацеплении можно также отнести увеличенные размеры передачи в осевом либо радиальном направлении.

По КПД шариковых и роликовых конструкций получены противоречивые данные. В [37] отмечается, что шариковые передачи имеют более высокий КПД – у шариковинтовых механизмов КПД на 10–15 % выше, чем у роликовинтовых. При этом рассматриваются передачи фрикционного типа. По данным, полученным В. И. Довженко

[118], роликовые планетарные передачи имеют более высокий КПД. Нами это подтверждается в связи с невозможностью обеспечить чистое качение в контакте тела качения сферической формы с тремя основными звеньями передач экспериментально.

В [84] автор предлагает использовать конические ролики с закругленными концами. В патенте китайских разработчиков [119] рассмотрена конструкция передачи с составными роликами (рисунок 1.32).

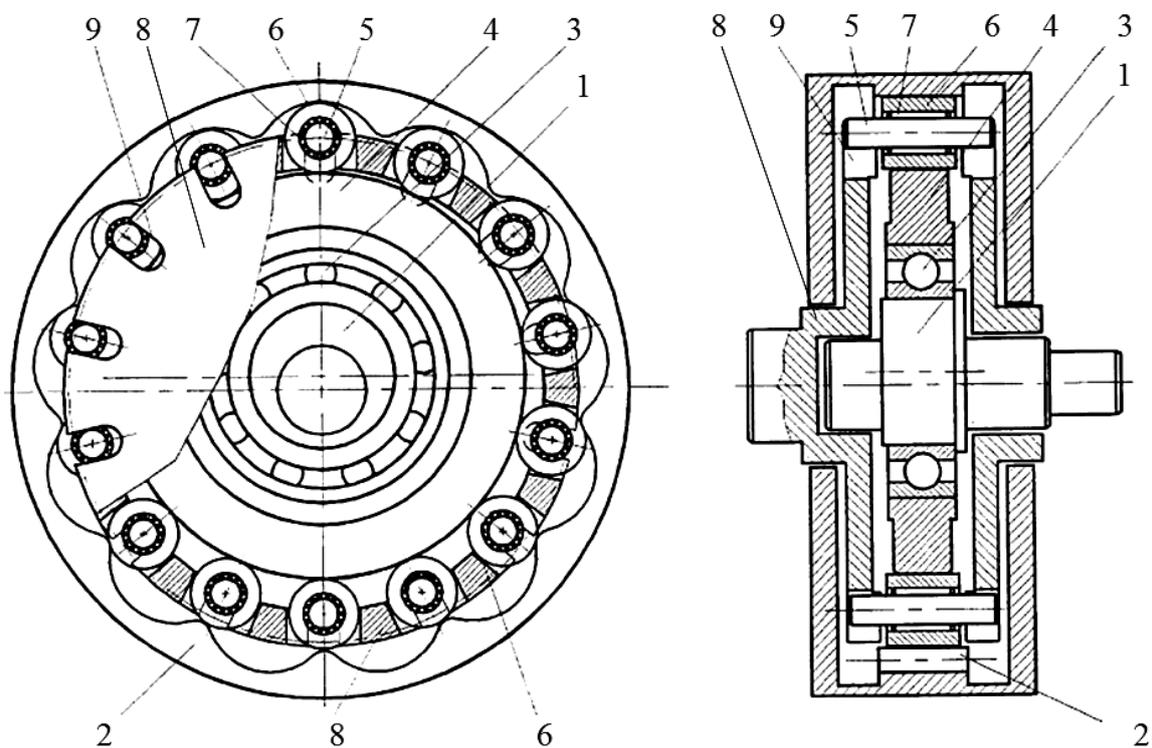


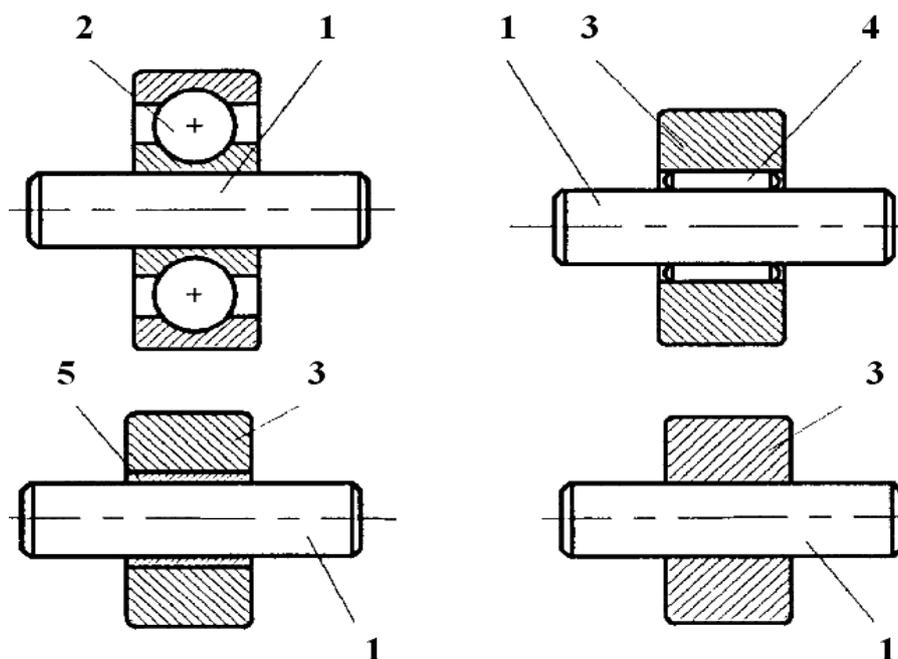
Рисунок 1.32 – Схема эксцентриковой передачи с составными роликами

Передача состоит из входного вала с эксцентриком 1, на котором посредством подшипника 3 установлен диск 4. Он контактирует с роликами, которые состоят из стержня 5, втулки 6 и промежуточных тел качения – тонких роликов (игл) 7. Втулка 6 контактирует с внутренними выступами колеса 2, закрепленного в корпусе. Концы стержня ролика 5 контактируют с пазами 9 сепаратора 8.

В [119] возможные варианты конструкции составных роликов (рисунок 1.33).

Данное решение позволяет снизить потери на трение скольжения. Также составные ролики применены в конструкции, описанной в [120].

При этом на общем стержне-основании ролика установлены три втулки, каждая из которых предназначена для контакта с рабочей поверхностью соответствующего звена. Для устранения перекосов оси роликов генератор контактирует с двумя втулками, установленными на концах стержня-основания своими двумя рабочими поверхностями.



1 – стержень; 2 – подшипник качения; 3 – втулка; 4 – промежуточные тела качения; 5 – промежуточная втулка

Рисунок 1.33 – Различные варианты конструкций составных роликов по пат. США (US 5989144)

### **Передачи, основанные на взаимодействии трех кривых.**

В 1984 г. Р. М. Игнатищев предложил схему синусошариковой передачи, в которой водило вместо вдольосевых прорезей имело третью беговую дорожку [121]. Данная дорожка разделяла водило на две детали, поэтому они были связаны с корпусом, выполняя функцию торцовых кулачков. Наружная втулка являлась выходным звеном.

Рассмотрим конструкцию [122], представленную на рисунке 1.34. Передача содержит корпус 1, входной вал 2, выходной вал 3, диск 7 с кольцевой дорожкой, посаженный с возможностью свободного вращения на входной вал с помощью эксцентрика 8. Тела качения 4 перемещаются по кольцевой дорожке диска 7, по многопериодным беговым дорожкам,

выполненным на торцах дисков 5 и 6. Диск 5 связан с корпусом, а диск 6 – с выходным валом.

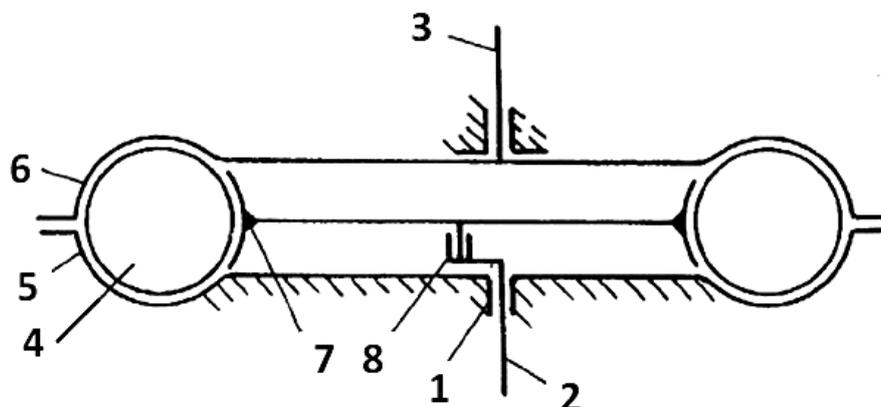


Рисунок 1.34 – Схема трехсинусоидной передачи

Идею трехсинусоидных передач развивает коллектив из Томска под руководством В. В. Становского. В [123] представлено семейство передач, основанных на взаимодействии двух и трех многопериодных кривых. При этом колебания тел качения осуществляются на плоскости, а также на конической, цилиндрической и сферической поверхностях. Само описание к [123] носит характер исследования. Однако, кроме того, что для изготовления передач такого типа необходимо высокоточное дорогостоящее оборудование, геометрические параметры зацепления зависят от размеров тел качения. Амплитуда (и размах) колебаний шариков незначителен, что приводит к большим значениям углов давления при больших числах периодов и возникновению больших расклинивающих усилий. Эти идеи развиваются в конструкциях [124, 125]. Причем в [125] вследствие характера сопрягаемых кривых – эксцентрично размещенной окружности и многопериодной циклоидальной кривой – пазы в сепараторе носят тороидальный характер. В [126] рассматриваются преимущества синусоэксцентриковых передач (развитие идеи трехсинусоидного зацепления), которые представляют собой планетарные передачи с цевочным зацеплением. На наш взгляд, недостатком синусоэксцентриковых передач является то, что одно из звеньев передачи опирается только на цевки или шарики, участвующие в зацеплении, что при малых перекосах деталей редуктора может привести к заклиниванию. В [118, с. 31] при рассмотрении результатов экспериментальных исследований по определению КПД различных вариантов

ПШТК применительно к одному из редукторов указано следующее: «не запускается, т. к. звено S базируется на сателлитах зацепления, а не на подшипниках корпуса».

О важности центрирования роликов свидетельствует конструкция (рисунок 1.35), приведенная в [118].

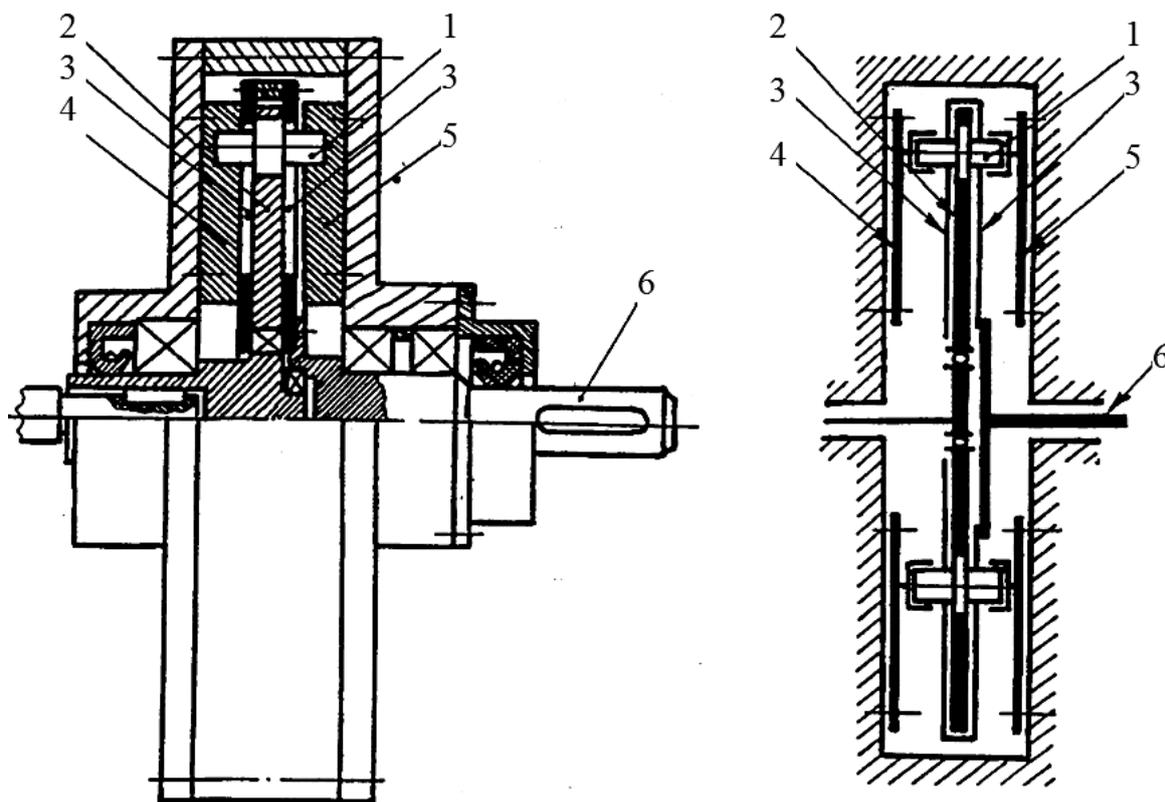


Рисунок 1.35 – Конструкция роликовой передачи с синхросепаратором

Ступенчатый ролик 1 контактирует с закрепленными в корпусе дисками 4 и 5 с многопериодными беговыми дорожками. Диск 2 эксцентрично установлен на входном валу посредством подшипника качения. Сепаратор состоит из двух соединенных дисков 3 с радиальными пазами, образующими так называемый «синхросепаратор». Особое отличие данной конструкции состоит в том, что звено, несущее однопериодную кривую, осуществляет двухсторонний контакт с роликом. Диск 2 имеет дугообразные пазы, т. к. установлено, что за полный оборот входного вала каждый из центров тел качения совершает ограниченное движение относительно оси передачи. Данная особенность конструкции позволяет повысить нагрузочную способность редуктора.

Подводя итог обзору ППТК, можно констатировать, что разработаны сотни различных конструкций передач данного типа. Они имеют ряд преимуществ перед традиционными зубчатыми передачами. Однако до настоящего времени подавляющее большинство данных разработок не было реализовано. Это объяснялось технологическими трудностями в изготовлении деталей ППТК. Для воспроизведения замкнутых периодических дорожек: синусоиды, кусочных функций циклоиды, винтовой линии, спирали Архимеда и др. – на цилиндрических поверхностях (особенно на внутренних) требуются специальные приспособления, копиры либо станки с ЧПУ с возможностью пространственной обработки. Кроме того, необходимы специальный режущий инструмент, точная наладка станочного оборудования, высокая квалификация исполнителей. В настоящее время с появлением металлорежущего оборудования нового поколения данный недостаток был преодолен.

Основной недостаток многих конструкций и созданных опытных образцов связан с низким КПД данных передач. Значительные потери мощности вызваны не только неточностью изготовления и сборки. Клиновой характер взаимодействия, как в червячных передачах, предполагает потери на скольжение, процесс движения тел качения сопровождается проскальзыванием, иногда значительным. Повышение КПД передач данного типа является одной из целей данной работы.

В Российской Федерации Сибирская машиностроительная компания «Симако», ООО НПО «Сибирский машиностроитель», ЗАО «Томские трансмиссионные системы» и др. серийно выпускают и реализуют различные механизмы и устройства на базе ППТК. ООО НПО «Сибмаш», например, серийно выпускает взрывозащищенные электроприводы запорной и запорно-регулируемой арматуры [127]. В дальнем зарубежье работы в направлении создания редукторов с телами качения проводят фирмы и исследователи: «Синкинетикс» и «Адвансед Энерджи Концептс 81» (США), «Больман Гидравлик» (Германия), «Аксиал Вэйв Драйв» (Нидерланды), «Спиная» (Словакия) и др.

### 1.4 Концепция исследований

В областях исследования явления сопротивления качению и неразрывно связанной с ним контактной прочности разработано множество теорий, проверенных практикой. Исследователи стремились, используя ряд допущений и применяя возможности математического аппарата того времени, получить в конечном итоге инженерные зависимости для практического применения. Из-за громоздкости отдельных вычислений зачастую принимались допущения, значительно упрощавшие реальную картину процессов. В конце 80-х гг. в связи с бурным ростом и развитием компьютерных технологий ограничения, связанные с математической сложностью многих задач, длительностью процессов вычислений, были сняты, и уклон в исследованиях произошел в сторону решения частных задач с использованием численных методов решения (метода конечных элементов и т. д.). Однако и на сегодняшний день, на наш взгляд, потребность в совершенствовании общей теории не потеряла актуальность. Наоборот, с использованием потенциала ЭВМ появляется возможность проведения исследований на новом уровне и достижения значимых результатов. Концепция исследований с учетом прямых и обратных связей представлена на схеме (рисунок 1.36).

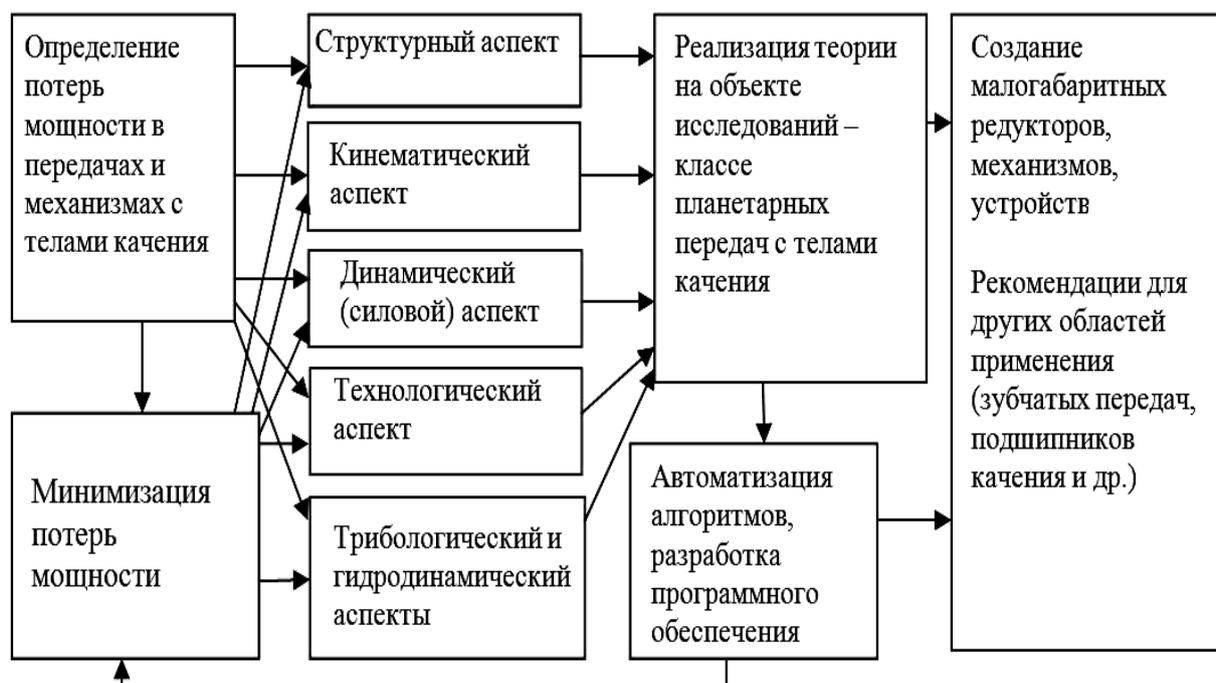


Рисунок 1.36 – Концепция исследований

Одним из основных этапов в теории минимизации потерь мощности при качении со скольжением является алгоритм их определения, который схематично представлен на рисунке 1.37. Одна из конечных целей работы – это разработка, изготовление и промышленное использование малогабаритных редуцирующих узлов, созданных на основе передач с телами качения в зацеплении. Алгоритм проектирования этих передач, а также других механизмов, использующих тела качения для передачи нагрузки, изображен на рисунке 1.38.



Рисунок 1.37 – Алгоритм определения потерь мощности в передачах и механизмах с телами качения



Рисунок 1.38 – Алгоритм проектирования ППТК

## 2 Определение и рекомендации по снижению потерь мощности в нагруженном контакте тел качения с поверхностями других тел

### 2.1 Определение коэффициентов трения скольжения и сопротивления качению при движении тела качения по поверхности

Рассмотрим тело сферической формы с радиусом образующей  $R$ , покоящееся на плоскости (на рисунке 2.1 изображены две проекции тела). Приведем все внешние силы (за исключением сил трения), действующие на него, к главному вектору  $\vec{R}_G^E$ , приложенному в центре масс  $O$ , и главному моменту  $\vec{M}_G^E$  и разложим эти векторы на три взаимно-перпендикулярные составляющие.

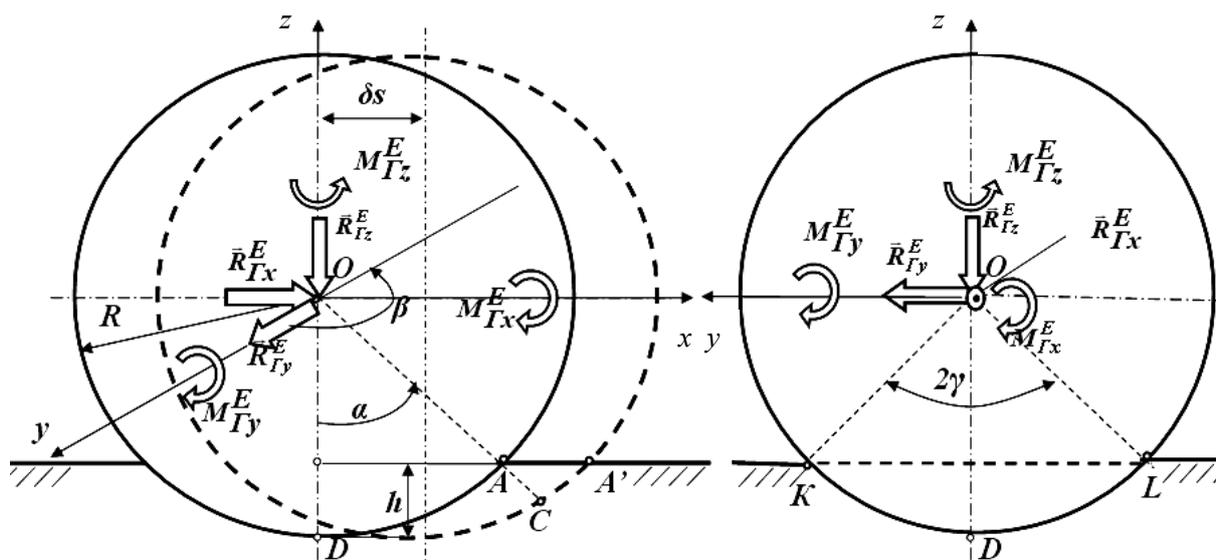


Рисунок 2.1 – Схема контакта сферы с опорной поверхностью

Перемещение центра масс тела будет происходить вдоль линии действия  $\vec{R}_G^E$  в плоскости  $xOy$ . Выберем систему координат так, чтобы выполнялось условие  $\vec{R}_{Gy}^E = 0$ , тогда движение центра масс будет происходить вдоль оси  $Ox$ .

Исследуем случай, когда шар – абсолютно твердое тело, взаимодействующее с деформируемой поверхностью. Под действием  $\vec{R}_{Gz}^E$  (в том

числе и веса шара) тело внедряется в опорную поверхность. Перемещение точек шара вдоль оси  $Oz$  характеризуется максимальным погружением  $h$  и углами  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Предположим, что в начальный момент времени под действием  $\vec{R}_{Gx}^E$  все точки тела получили бесконечно малое перемещение  $\delta s$  (на рисунке 2.1  $\delta s = AA'$ ) вдоль оси  $Ox$ .

Рассмотрим некоторые допущения, принятые для последующего анализа.

1 При качении сферы нагруженной оказывается только передняя часть поверхности контакта. После прокатывания шара поверхность восстанавливает свою первоначальную форму, т. к. считаем, что рассматриваемое прокатывание повторное и пластические деформации поверхности осуществились при первичном прокатывании.

2 Давления в точках контакта пропорциональны перемещениям этих точек.

Рассмотрим произвольную точку, находящуюся на поверхности тела, контактирующей с опорной поверхностью. Выделим около этой точки бесконечно малую площадку  $ds$  со сторонами  $Rd\alpha$  и  $Rd\beta$ . С использованием сферической системы координат ее площадь

$$ds = R^2 d\alpha \cdot d\beta. \quad (2.1)$$

Нормальное давление на эту площадку и по всей поверхности контакта

$$dN = pds = pR^2 d\alpha \cdot d\beta; \quad N = \iint_S pR^2 d\alpha d\beta, \quad (2.2)$$

где  $p$  – переменное нормальное удельное давление, причем  $p = f(\alpha)$ .

Сила трения скольжения на этой площадке и результирующая сила трения на всей поверхности контакта:

$$dF = fdN = fpR^2 d\alpha \cdot d\beta; \quad F = \iint_S fpR^2 d\alpha d\beta, \quad (2.3)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения для заданной пары материалов с известной твердостью и чистотой обработки поверхностей.

Составим дифференциальные уравнения движения тела, считая это движение плоскопараллельным.

$$m\ddot{x}_0 = R_{\Gamma x}^E - N \sin \alpha - F \cos \alpha = R_{\Gamma x}^E - \iint_S pR^2 \sin \alpha d\alpha d\beta - \iint_S fpR^2 \cos \alpha d\alpha d\beta; \quad (2.4)$$

$$m\ddot{y}_0 = -R_{\Gamma z}^E + N \cos \alpha - F \sin \alpha = -R_{\Gamma z}^E + \iint_S pR^2 \cos \alpha d\alpha d\beta - \iint_S fpR^2 \sin \alpha d\alpha d\beta; \quad (2.5)$$

$$J_y \ddot{\phi} = -M_{\Gamma y}^E - FR = -M_{\Gamma y}^E - \iint_S fpR^3 d\alpha d\beta. \quad (2.6)$$

где  $m$  – масса тела;

$\ddot{x}_0, \ddot{y}_0$  – проекции ускорения центра масс тела на соответствующие оси координат;

$\ddot{\phi}$  – угловое ускорение тела относительно оси  $Oy$ ;

$J_y$  – осевой момент инерции сплошной однородной сферы,  $J_y = 0,4mR^2$ .

Удельное давление в некоторой  $i$ -й точке контакта  $p_i$  будет прямо пропорционально перемещению этой точки тела  $\Delta_i(\alpha, \beta)$  с коэффициентом пропорциональности  $k_p$ .

$$p_i = k_p \cdot \Delta_i(\alpha, \beta). \quad (2.7)$$

Само перемещение  $\Delta(\alpha, \beta)$  является результатом составляющих перемещений вдоль оси  $Ox$  и  $Oz$ .

$$\Delta_i(\alpha, \beta) = \cos \beta \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = \cos \beta \sqrt{(\delta s \sin \alpha)^2 + (R(\cos \alpha - \cos \alpha_{\max}))^2}. \quad (2.8)$$

Предположим, что предварительное смещение  $\delta s$  пропорционально внедрению тела в опорную поверхность  $h$  (с учетом соотношения действующих сил):

$$\delta s = \frac{R_{\Gamma x}^E}{R_{\Gamma z}^E} h. \quad (2.9)$$

В формуле (2.8) также допущено предположение о том, что давление вдоль оси абсцисс неравномерно и увеличивается от 0 в нижней точке контакта к поверхности. Принимая во внимание зависимость  $h$  от  $\alpha_{\max}$ ,

$$h = R(1 - \cos(\alpha_{\max})), \quad (2.10)$$

удельное давление определится по следующим зависимостям (выраженное через  $\alpha_{\max}$  и  $h$ ):

$$\begin{aligned}
 p_i &= k_p \cos \beta \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = k_p R \cos \beta \times \\
 &\times \sqrt{(1 - \cos \alpha_{\max})^2 \left( \frac{R_{\Gamma x}^E}{R_{\Gamma z}^E} \right)^2 \sin^2 \alpha + (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max})^2} = \\
 &= k_p \cos \beta \sqrt{h^2 \left( \frac{R_{\Gamma x}^E}{R_{\Gamma z}^E} \right)^2 \sin^2 \alpha + (h - R(1 - \cos \alpha))^2}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Проанализируем характер изменения удельного давления, приняв для определенности  $k_p = 1 \text{ Н/мм}^3$ ,  $R = 5 \text{ мм}$ ,  $h = 0,0102 \text{ мм}$ , при изменении угла  $\alpha$  от 0 до  $\alpha_{\max}$ , а угла  $\beta$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  (рисунок 2.2).

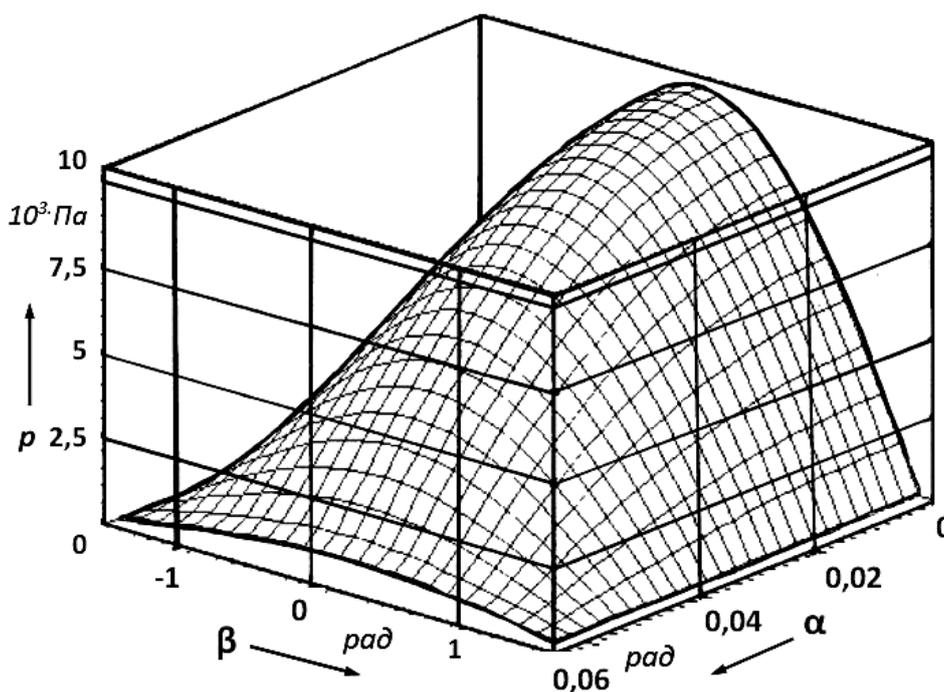


Рисунок 2.2 – Эпюра распределения напряжений по поверхности контакта

Функция (2.11) сложна для последующего использования в математических расчетах, а именно для дальнейшего двойного интегрирования, даже с помощью численных методов с применением современных математических программных пакетов. Поэтому была

найдена аппроксимирующая функция  $p_{ia}$ , которая использовалась далее. Функция эта была получена разложением исходной зависимости (2.11) в ряд Маклорена по переменной  $\alpha$ . Оставив в ряду члены не выше второго порядка, получим

$$p_{ia} = k_p \cos \beta \left( h - 0,5\alpha^2 \left( R - \frac{(R_{\Gamma x}^E)^2 h}{(R_{\Gamma z}^E)^2} \right) \right). \quad (2.12)$$

Математический анализ показал высокую сходимость результатов численного вычисления зависимостей (2.11) и (2.12) в широком диапазоне данных подстановки.

Рассмотрим случай предельного равновесия ( $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$ ,  $\ddot{\phi} = 0$ ) и исследуем уравнения статического равновесия, полученные из уравнений (2.4)–(2.6) с учетом выражений (2.7)–(2.10):

$$R_{\Gamma x}^E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \int_0^{\alpha_{\max}} pR^2 (\sin \alpha + f \cos \alpha) d\alpha; \quad (2.13)$$

$$R_{\Gamma z}^E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \int_0^{\alpha_{\max}} pR^2 (\cos \alpha - f \sin \alpha) d\alpha; \quad (2.14)$$

$$M_{\Gamma y}^E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \int_0^{\alpha_{\max}} fpR^3 d\alpha d\beta. \quad (2.15)$$

Величина двух неизвестных  $k_p$  и  $R_{\Gamma x}^E$  определяется из решения системы двух уравнений (2.13) и (2.14).

После взятия двойных интегралов данная система приводится к следующему виду:

$$R_{\Gamma x}^E = (R_{\Gamma x}^E)^2 k_p \left( \frac{R^2 h}{(R_{\Gamma z}^E)^2} \left( \cos(\alpha_{\max}) (-\alpha_{\max}^2 + 2 + 2f\alpha_{\max}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\alpha_{\max}) (2\alpha_{\max} + f\alpha_{\max}^2 - 2f) - 2 \right) \right) + \\ + k_p \left( R^2 \left( \cos(\alpha_{\max}) \left( \begin{array}{l} -2h + R\alpha_{\max}^2 - \\ -2R - 2Rf\alpha_{\max} \end{array} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\alpha_{\max}) \left( \begin{array}{l} 2hf - 2R\alpha_{\max} - \\ -Rf\alpha_{\max}^2 + 2Rf \end{array} \right) + 2(h + R) \right) \right); \quad (2.16)$$

$$R_{\Gamma z}^E = \left(R_{\Gamma x}^E\right)^2 k_p \left( \frac{R^2 h}{\left(R_{\Gamma z}^E\right)^2} \left( \cos(\alpha_{\max})(2\alpha_{\max} + f\alpha_{\max}^2 - 2f) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\alpha_{\max})(\alpha_{\max}^2 - 2 - 2f\alpha_{\max}) + 2f \right) \right) + \\ + k_p \left( R^2 \left( \cos(\alpha_{\max})(2hf - Rf\alpha_{\max}^2 + 2Rf - 2R\alpha_{\max}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\alpha_{\max})(2h + 2Rf\alpha_{\max} - R\alpha_{\max}^2 + 2R) - 2f(h + R) \right) \right). \quad (2.17)$$

Данную систему далее можно представить в следующем виде:

$$R_{\Gamma x}^E = \left(R_{\Gamma x}^E\right)^2 k_p U_1 + k_p U_2; \quad (2.18)$$

$$R_{\Gamma z}^E = \left(R_{\Gamma x}^E\right)^2 k_p U_3 + k_p U_4. \quad (2.19)$$

Коэффициенты  $U_1$  и  $U_3$  имеют размерность миллиметр кубический на ньютон квадратный, а коэффициенты  $U_2$  и  $U_4$  – миллиметр кубический. Данные коэффициенты определяются из формул (2.16) и (2.17) согласно следующим зависимостям:

$$U_1 = \frac{R^2 h}{\left(R_{\Gamma z}^E\right)^2} \left( \cos(\alpha_{\max})(-\alpha_{\max}^2 + 2 + 2f\alpha_{\max}) + \right. \\ \left. + \sin(\alpha_{\max})(2\alpha_{\max} + f\alpha_{\max}^2 - 2f) - 2 \right); \quad (2.20)$$

$$U_2 = R^2 \left( \cos(\alpha_{\max})(-2h + R\alpha_{\max}^2 - 2R - 2Rf\alpha_{\max}) + \right. \\ \left. + \sin(\alpha_{\max})(2hf - 2R\alpha_{\max} - Rf\alpha_{\max}^2 + 2Rf) + 2(h + R) \right); \quad (2.21)$$

$$U_3 = \frac{R^2 h}{\left(R_{\Gamma z}^E\right)^2} \left( \cos(\alpha_{\max})(2\alpha_{\max} + f\alpha_{\max}^2 - 2f) + \right. \\ \left. + \sin(\alpha_{\max})(\alpha_{\max}^2 - 2 - 2f\alpha_{\max}) + 2f \right); \quad (2.22)$$

$$U_4 = R^2 \left( \cos(\alpha_{\max})(2hf - Rf\alpha_{\max}^2 + 2Rf - 2R\alpha_{\max}) + \right. \\ \left. + \sin(\alpha_{\max})(2h + 2Rf\alpha_{\max} - R\alpha_{\max}^2 + 2R) - 2f(h + R) \right). \quad (2.23)$$

Для нахождения корней системы уравнений (2.18) и (2.19) вынесем в правых частях за скобки общий множитель  $k_p$  и разделим одно уравнение на другое. После преобразования получим полином третьей степени.

$$-U_3 \cdot \left(R_{\Gamma x}^E\right)^3 + U_1 \cdot R_{\Gamma z}^E \cdot \left(R_{\Gamma x}^E\right)^2 - U_4 \cdot R_{\Gamma x}^E = -U_2 \cdot R_{\Gamma z}^E. \quad (2.24)$$

В результате тривиального решения данного полинома получим значение  $R_{\Gamma x}^E$ . Полученное значение  $R_{\Gamma x}^E$  – предельная сила трения скольжения, т. к. при ее нахождении не использовалось третье уравнение равновесия (2.15). Далее находим  $k_p$  (например, из уравнения (2.18)):

$$k_p = \frac{R_{\Gamma x}^E}{U_1 \cdot R_{\Gamma x}^E + U_2}. \quad (2.25)$$

Из уравнения (2.15)

$$M_{\Gamma y}^E = f \cdot k_p \cdot \frac{R^3}{(R_{\Gamma z}^E)^2} \left( \frac{\alpha_{\max}^3}{3} \left( -R \cdot (R_{\Gamma z}^E)^2 + h \cdot (R_{\Gamma x}^E)^2 \right) + \right. \\ \left. + 2h \cdot (R_{\Gamma z}^E)^2 \alpha_{\max} \right). \quad (2.26)$$

Разработанная модель адекватна при  $R_{\Gamma x}^E \neq 0$ , т. к. только в этом случае возможны качение или скольжение и нагруженность половины поверхности контакта.

Введем понятие *приведенного коэффициента трения скольжения*  $f'$ :

$$f' = R_{\Gamma x}^E / R_{\Gamma z}^E. \quad (2.27)$$

В отличие от коэффициента  $f$ , который определяется экспериментально для двух плоских трущихся поверхностей деталей из материалов с заданными свойствами, коэффициент  $f'$  характеризует трение скольжения для контакта тела качения (шара) и плоскости.

Контактное взаимодействие ролика и плоскости можно рассматривать как частный случай изложенного выше алгоритма. При этом формула (2.1) упростится:  $ds = R^2 l_p d\alpha$ , где  $l_p$  – длина ролика. В дальнейших расчетах нет необходимости в интегрировании по  $d\beta$ .

*Коэффициент трения качения* определим следующим образом. Рассмотрим предельный случай равновесия, когда может нарушиться уравнение равенства моментов сил относительно точки  $A'$  (рисунок 2.1) и произойдет перекачивание шара, т. е. его качение. В этом положении реакция тела качения сдвигается на его кромку (в точку  $A'$ ). Из силового прямоугольного треугольника с катетами  $R_{\Gamma z}^E$  и  $R_{\Gamma x}^E$  (составляющая главного вектора сил системы, необходимая для перекачивания шара) находим предельное значение коэффициента трения качения:

$$R_{\Gamma_x}^E = R_{\Gamma_z}^E \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{\max}) \Rightarrow \delta = \frac{R_{\Gamma_x}^E (R-h)}{R_{\Gamma_z}^E} = \operatorname{tg}(\alpha_{\max})(R-h) = a, \quad (2.28)$$

где  $a$  – радиус площадки контакта.

Процесс чистого качения, таким образом, можно представить как поочередность перекачивания катка (шара) и его последующего погружения (внедрения) в опорную поверхность, а коэффициент трения качения пропорционален радиусу контактной площадки и является функцией нагрузки, радиуса катка и свойств контактирующих материалов.

Проведем количественное определение приведенного коэффициента трения для системы упругих тел. Распространим результаты на общий случай взаимодействия упругих тел и оценим силу сопротивления качения количественно. Применим и преобразуем известные формулы теории упругости для контакта «шар–плоскость» [128, с. 532]. Полуширина площадки контакта  $a$ :

$$a = 0,7213 \sqrt{2R_{\Gamma_z}^E R(\Theta_1 + \Theta_2)}, \quad \Theta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}, \quad \Theta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (2.29)$$

где  $E_1, E_2$  – модули упругости материалов контактирующих тел;

$\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона контактирующих материалов (для сталей  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $E_{np} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа).

Глубина погружения абсолютно жесткого тела качения в деформируемую поверхность  $h$  и угол  $\alpha_{\max}$ :

$$h = R - \sqrt{(R-a)(R+a)}; \quad \alpha_{\max} = \arccos((R-h)/R). \quad (2.30)$$

При учете деформируемости обоих контактирующих тел определяется сближение их осей (для пары «шар–плоскость»):

$$h_s = 1,553 \sqrt{\frac{(R_{\Gamma_z}^E)^2}{2E_{np}^2 R}}; \quad E_{np} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad (2.31)$$

где  $E_{np}$  – приведенный модуль упругости.

При дальнейших расчетах необходимо скорректировать радиус тела качения, который увеличится до значения  $R_{ck}$ . Из свойства хорд:

$$a^2 = h_s(2R - h_s) \Rightarrow R_{ck} = (a^2 + h_s^2)/2h_s. \quad (2.32)$$

Проанализируем, как изменяется коэффициент  $f'$  в зависимости от вертикальной нагрузки и радиуса тела качения (рисунок 2.3) для стальных контактирующих деталей ( $f = 0,1$ ).

По аналогии с приведенным коэффициентом трения скольжения проведем анализ изменения радиуса контактной площадки тел (рисунок 2.4).

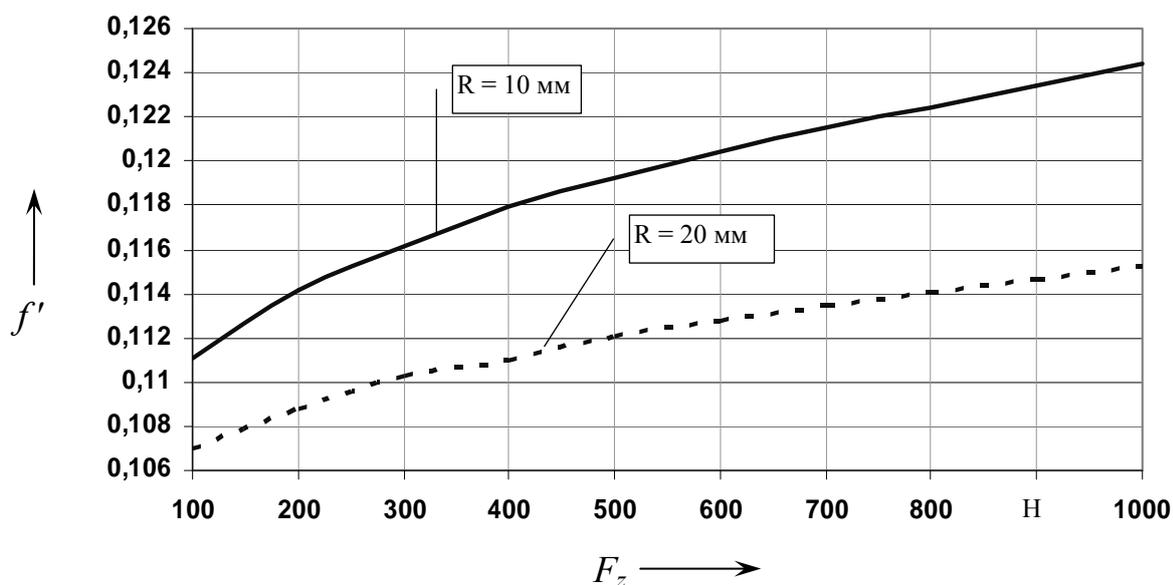


Рисунок 2.3 – Зависимость приведенного коэффициента трения скольжения от вертикальной нагрузки

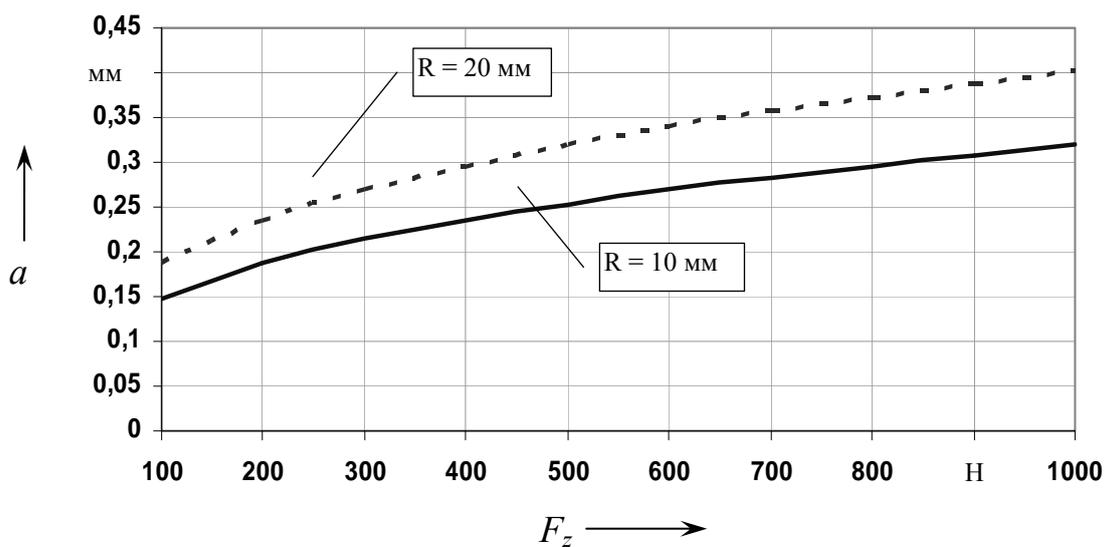


Рисунок 2.4 – Зависимость радиуса площадки контакта от вертикальной нагрузки

Большинство методик проведения экспериментальных исследований с целью определения сопротивления качению основано на законе Ш. Кулона. Кулон постулировал постоянство эксцентриситета  $\delta$ , на который сдвигается нормальная реакция опоры  $N$ , чтобы уравновесить момент движущей силы  $F \cdot R$ . Однако во многих источниках [7, 18, 129] присутствует ссылка на сформулированный Дюпьюи (A. JF. J. Dupuit) [130] закон, в котором приводится следующая зависимость силы сопротивления качению:  $h = kN / \sqrt{R}$  (в некоторых источниках под знаком корня присутствует диаметр, а не радиус, что не меняет смысла выражения, а лишь вносит различия в постоянные коэффициенты). В данной трактовке из уравнения моментов эксцентриситет будет равен  $\delta = k\sqrt{R}$ . Из исследований Крэндалла (C. L. Crandall) и Марстона (A. Marston) [131] вообще следует степенная зависимость эксцентриситета от радиуса (диаметра) тела качения.

Исходя из формул (2.28) и (2.29), эксцентриситет может быть представлен в виде

$$\delta = \frac{K_0}{K_k} \sqrt[3]{R_{Gz}^E \cdot R}, \quad (2.33)$$

где  $K_0$  – физический коэффициент, характеризующий упругие свойства данных материалов;

$K_k$  – корреляционный коэффициент, согласующий теоретические данные с результатами экспериментов.

Как отмечается в [7], Дюпьюи, видимо, был первым, кто предположил пропорциональность эксцентриситета  $\delta$  хорде дуги контакта. Однако он предполагал независимость величины погружения  $h$  и, соответственно, хорды  $2a$  от величины нагрузки.

Исходя из формулы (2.29), для контакта деталей «шар–плоскость»:

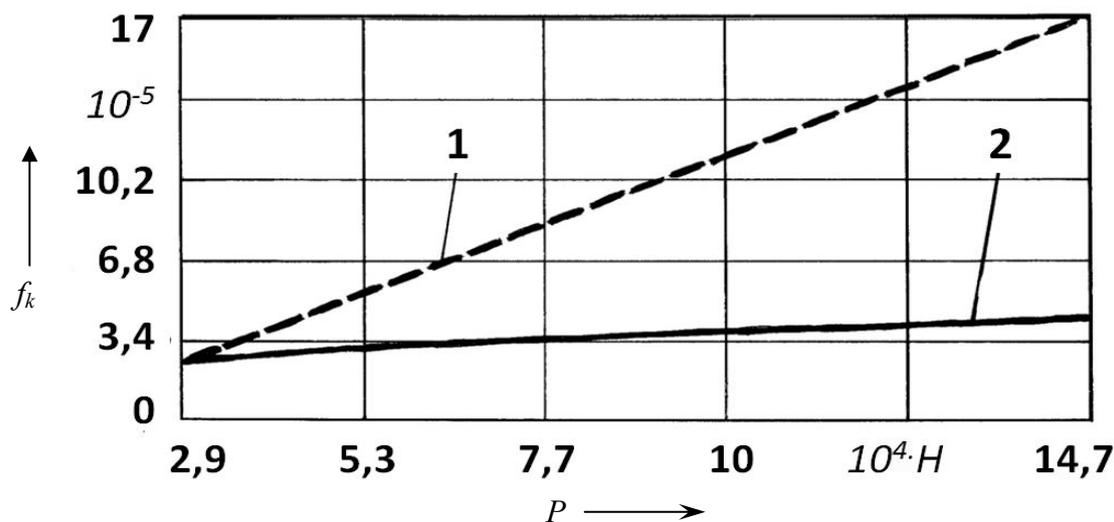
$$K_0 = 0,908 \sqrt[3]{\Theta_1 + \Theta_2}. \quad (2.34)$$

При этом для стальных деталей  $K_0 = 1,866 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2/3} / \text{Н}^{1/3}$ . Для контакта стальных деталей «цилиндр–плоскость»  $K_0 = 2,065 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2/3} / \text{Н}^{1/3}$ .

Обратимся к результатам проведенных испытаний [8]. На испытательных стендах замерялась сила сопротивления качению  $T$ . Ее отношение к нормальной реакции опоры (к вертикальной нагрузке на тело качения при горизонтальном расположении опорной плоскости) является коэффициентом сопротивления качению  $f_k$  ( $f_k = T/N$ ). Из уравнений равновесия тела качения  $f_k = \delta / R$  (при условии приложения силы  $T$  к центру тела качения).

На рисунке 2.5 показана экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления качению  $f_k$ , полученная С. В. Пинегиным [8], и теоретическая зависимость, полученная согласно выражению (2.33), разделенному на радиус тела качения  $R$ . При этом в уравнение (2.33) подставлялись параметры, использованные в экспериментах: детали стальные,  $R = 203$  мм, скорость низкая (менее 0,5 м/с).

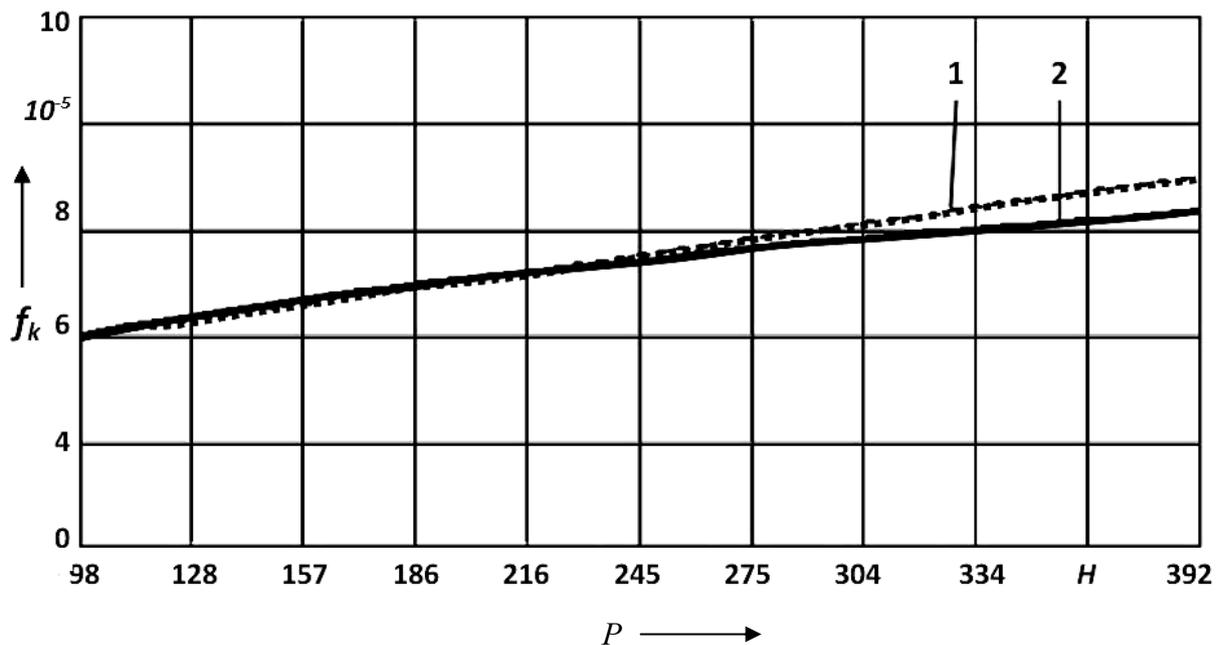
Рисунок 2.5 свидетельствует о расхождении в угле наклона экспериментальной и теоретической зависимостей. Коэффициент корреляции был принят равным 667, что соответствует начальному значению нагрузки. При максимальной нагрузке коэффициент корреляции составил 168. Однако при сравнении с опытами Друтовски (R. C. Drutowski) [132] с шаром диаметром 12 мм и меньшими, чем в опытах С. В. Пинегина, нагрузками (рисунок 2.6) наблюдается достаточно близкое совпадение при коэффициенте корреляции, принятом  $K_k = 410,5$ .



1 – экспериментальные данные; 2 – теоретическая зависимость

Рисунок 2.5 – Зависимость коэффициента сопротивления качению от вертикальной нагрузки

Сравним результаты экспериментов С. В. Пинегина и теоретические результаты расчетов коэффициента сопротивления качению от радиуса тела качения (коэффициент корреляции равен 287). Как видно из рисунка 2.7, тенденция снижения  $f_k$  наблюдается в обоих случаях, однако на практике изменение происходит более резко, что свидетельствует о наличии некоторых неучтенных факторов в выражении (2.33).



1 – экспериментальные данные; 2 – теоретическая зависимость

Рисунок 2.6 – Зависимость коэффициента сопротивления качению от вертикальной нагрузки

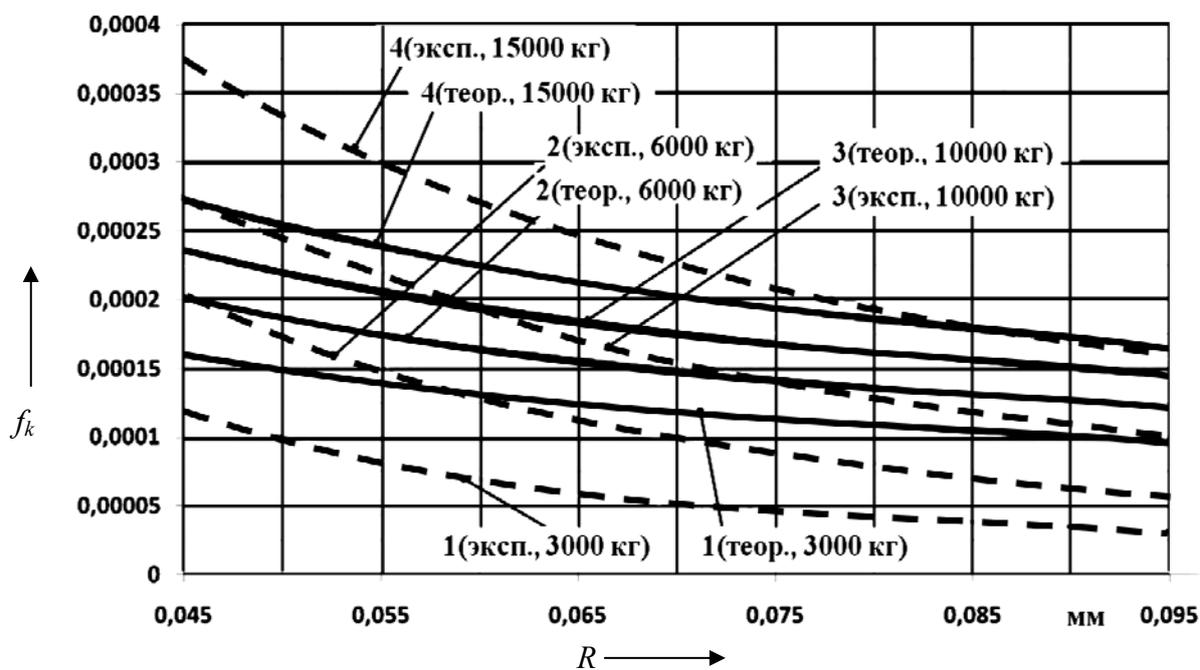


Рисунок 2.7 – Зависимость коэффициента сопротивления качению от радиуса шара

Таким образом, для определения коэффициента трения скольжения в контакте тела качения и плоскости можно воспользоваться формулой (2.27) и предшествующим ей алгоритмом на основе математических зависимостей (2.1)–(2.26). Данный алгоритм был нами автоматизирован и легко реализуем с помощью ЭВМ. Коэффициент трения качения  $\delta$  можно определить по формуле (2.33). Коэффициент  $K_k$ , присутствующий в этой зависимости, необходимо определять экспериментально для конкретной контактирующей пары. В настоящее время нами еще не накоплен экспериментальный материал. Проводится разработка испытательного стенда, принцип которого основан на определении силы страгивания тележки, установленной на роликах (цилиндрических либо бочкообразных) в зависимости от вертикальной нагрузки, свойств контактируемых материалов и их геометрии. Приняв гипотезу о пропорциональности коэффициента сцепления коэффициенту трения скольжения  $f$ , по изменениям  $f_{cy}$  можно судить об изменениях  $f$ . Определить коэффициент трения скольжения можно также по эмпирической зависимости  $f_{cy} = -1,865f^2 + 1,48f + 0,048$ , решив данное квадратное уравнение. Эта зависимость была получена для диапазона изменения  $f$  от 0,28 до 0,6 [133]. Для инженерных расчетов на основе накопленных экспериментальных данных другими авторами можно предложить диапазон  $K_k = 400\text{--}430$  для контактирующих стальных поверхностей с диаметром шара  $d_s = 10\text{--}20$  мм и максимальными нагрузками, не превышающими 500 Н.

## **2.2 Определение потерь мощности в нагруженном контакте «тело качения–поверхность»**

**2.2.1 Одноточечный (однолинейный) контакт.** Механика движения тела качения по поверхности с одним точечным либо линейным касанием до настоящего времени широко рассмотрена при изучении взаимодействия пары «колесо–рельс». Изучим влияние на процесс движения тела качения в данных условиях величины тягового (тормозного) момента. Рассмотрим тело сферической формы с радиусом  $R$  (рисунок 2.8), движущееся в плоскости по опорной поверхности. Силовые факторы, действующие на тело, можно привести к главному вектору, раскладываемому, в свою очередь, на нормальную  $\vec{F}_n$  и касательную  $\vec{F}_\tau$  составляющие, и к моменту  $M$ , действующему в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Реакция опорной поверхности  $N$  будет сдвинута в сторону движения тела качения на эксцентриситет  $\delta$ . В точке

контакта  $A$  будет действовать сила сцепления  $F_{сц}$ , которая при равномерном движении уравнивает внешнюю касательную силу  $\vec{F}_\tau$ .

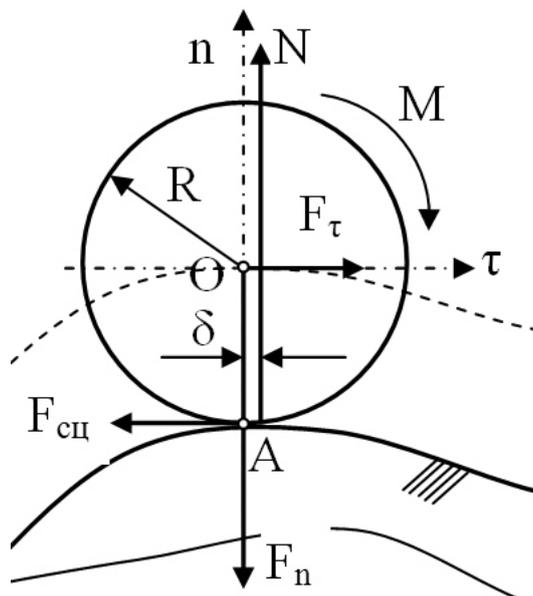


Рисунок 2.8 – К анализу условия осуществления чистого качения

Рассмотрим систему трех уравнений плоскопараллельного движения тела.

$$m\ddot{s} = F_\tau - F_{сц}; \quad (2.35)$$

$$-m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = -F_n + N; \quad (2.36)$$

$$J_z \ddot{\phi} = M + F_{сц} R - N\delta, \quad (2.37)$$

где  $\dot{s}$ ,  $\ddot{s}$  – скорость и ускорение центра масс тела  $C$  ( $s$  – дуговая координата);

$\ddot{\phi}$  – угловое ускорение тела относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения;

$\delta$  – коэффициент трения качения;

$m$  – масса тела;

$J_z$  – осевой момент инерции тела относительно бинормали;

$\rho$  – радиус кривизны траектории движения центра масс тела качения.

Исследуем качение по плоскости ( $\rho = 0$ ). Используя одно из условий качения ( $\dot{s} = R\dot{\varphi}$ ), из системы (2.35)–(2.37) выразим силу сцепления:

$$F_{сц} = \left( -M + N\delta + \frac{J_z F_\tau}{mR} \right) / \left( R + \frac{J_z}{mR} \right). \quad (2.38)$$

Применив другое условие качения, при котором сила сцепления не может превышать предельное значение, определяемое из закона Кулона, получим

$$fN \geq \left( -M + N\delta + \frac{J_z F_\tau}{mR} \right) / \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \geq -fN. \quad (2.39)$$

Проведя преобразование неравенства (2.39), выразим из него крутящий момент  $M$ .

$$\frac{J_z F_\tau}{mR} + N\delta - fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \leq M \leq \frac{J_z F_\tau}{mR} + N\delta + fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right), \quad (2.40)$$

или

$$M_{кач.мин} \leq M \leq M_{кач.макс}.$$

Выражением (2.40) определяется интервал, в котором должен находиться приложенный к телу крутящий момент  $M$ , чтобы при заданном главном векторе внешних сил осуществлялся процесс качения. Величина интервала определится из выражения

$$\Delta M = 2fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right). \quad (2.41)$$

Для сферы, у которой  $J_z = 0,4mR^2$ , получим

$$M_{кач.мин} = N\delta + 0,4F_\tau R - 1,4fNR. \quad (2.42)$$

$$M_{кач.макс} = N\delta + 0,4F_\tau R + 1,4fNR. \quad (2.43)$$

$$\Delta M = 2,8fNR. \quad (2.44)$$

Диапазон  $\Delta M$  достаточно узок. Например, для шарика диаметром 10 мм с параметрами нагружения  $F_\tau = 10$  Н,  $F_n = 981$  Н и коэффициентами

$f = 0,1$  и  $\delta = 0,05$  см он составляет  $\Delta M = 1,373$  Н·м. При этом внешний крутящий момент должен быть в пределах от  $-0,176$  до  $1,197$  Н·м для поддержания процесса чистого качения. Из этого диапазона следует исключить момент, соответствующий условию равновесия (остановки) сателлита. Для тела качения в виде ролика диапазон изменения крутящего момента на  $7,14\%$  больше (из-за разницы значений в моментах инерции).

При движении по поверхности с изменяющимся радиусом кривизны реакция опоры поверхности (согласно уравнению (2.36)) будет зависеть от скорости движения и радиуса траектории:

$$N = F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.40) при этом будет записано в виде [134]

$$\begin{aligned} \frac{J_z F_\tau}{mR} + \left( F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right) \left( \delta - f \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \right) \leq M \leq \frac{J_z F_\tau}{mR} + \\ + \left( F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right) \left( \delta + f \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Частным случаем является равномерное движение центра масс тела качения. При этом диапазон значений внешнего момента определится из выражения

$$N(\delta - fR) \leq M \leq N(\delta + fR). \quad (2.47)$$

Для описанных выше условий нагружения шарика диаметром  $10$  мм внешний момент должен изменяться от  $0$  до  $0,981$  Н·м.

Указанные формулы позволяют создавать приводы со следящими системами. Входными параметрами могут являться значения реакций тел качения, изменяющиеся радиусы, скорость движения центра масс и координаты траектории движения. После обработки цифровых сигналов система определяет необходимый крутящий момент для поддержания процесса качения и генерирует его с помощью независимых приводов, связанных с осями тел качения. Практически достаточно сложно и экономически невыгодно для механизмов с телами качения диаметром менее  $20$  мм обеспечивать независимый привод, с помощью которого будет производиться их подтормаживание либо разгон. Однако данный вопрос достаточно актуален и вполне осуществим для систем с парами «колесо–плоскость», где используются тела качения большого диаметра.

2.2.2 *Двухточечный (двухлинейный) контакт.* Двухточечный контакт рассмотрим на примере плоской модели радиального подшипника качения (рисунок 2.9).

КПД шариковых и роликовых подшипников, как правило, имеют высокие значения, и при инженерных расчетах потерями мощности в опорах качения пренебрегают. Однако анализ причин и характера разрушения подшипников различных агрегатов свидетельствует о необходимости изучения этого процесса, т. к. выходу из строя подшипника предшествовало резкое повышение момента трения, измерения которого производились тепловизором ИРТИС. Своевременная замена подшипников позволила бы избежать момента его полного разрушения, которое зачастую приводило к заклиниванию механизмов и повреждению других взаимосвязанных узлов. Целью данной работы являлась разработка метода предупреждения полного разрушения опор качения, а основной задачей – установление взаимосвязи между потерями мощности в радиальных открытых подшипниках качения и кинематическими характеристиками его звеньев.

Потери в подшипниках складываются из потерь в контакте тел качения и беговых дорожек и потерь в контакте тел качения и сепаратора при протекании процессов качения, скольжения и верчения. В настоящее время инженерная методика определения КПД подшипника сводится к вычислениям по формуле  $\eta = 1 - f_{mp}$ , где  $f_{mp}$  – приведенный коэффициент трения, значения которого получены эмпирически. В большинстве же случаев значения КПД подшипников разных типов приводятся как табличные значения, без учета кинематических и силовых факторов, влияющих на работу подшипника. Помимо КПД, известные методики предполагают определение мощности, расходуемой на трение, и моментов трения. Экспериментально момент трения определяется либо методом свободного выбега (по времени до останова), либо замером силы трения на одном кольце при вращающемся другом с помощью динамометров или других устройств [135].

В [2, с. 64] приведена формула, по которой вычисляется мощность трения:  $N_{mp} = P f_{mp} \pi d n$ , где  $P$  – эквивалентная нагрузка, действующая на подшипник,  $d$  – диаметр отверстия в подшипнике,  $n$  – частота вращения внутреннего кольца. При этом в [136] отмечается, что «актуальной остается задача создания несложных и надежных приборов, позволяющих замерять моменты трения в подшипниках в эксплуатационных условиях». Разработаны и более сложные методики, позволяющие учитывать

различные факторы, влияющие на работу подшипников. В [137], например, приводятся выражения для определения моментов трения, которые зависят от нагрузки, на контактных площадках шарика с дорожками качения для внутреннего и наружного колец, коэффициента трения и геометрических параметров эллипсоидной контактной площадки.

В [138, 139] представлены комплексные теоретические модели для определения потерь мощности в радиально-упорных подшипниках с учетом реологических свойств смазочного материала, гидродинамических и эластогидродинамических сил. В [139] теоретические результаты коррелируются с экспериментальными данными, полученными в диапазоне частот вращения от 5 000 до 35 000 об/мин.

В большинстве источников при определении мощности, потерянной на трение в контакте «тело качения–беговые дорожки», предполагается чистое качение. Так, например, в учебной и справочной литературе по деталям машин [140] приводятся формулы для вычисления частот вращения сепаратора  $n_3$  и тела качения относительно сепаратора  $n_w$  при неподвижном внешнем кольце:

$$n_3 = \frac{n_1}{2} \left( 1 - \frac{d_w}{D_0} \right); \quad n_w = \frac{n_2 - n_1}{2} \left( \frac{D_0}{d_w} - \frac{d_w}{D_0} \right), \quad (2.48)$$

где  $n_1, n_2$  – частоты вращения наружного и внутреннего колец;

$D_0, d_w$  – диаметр окружности расположения центров тел качения и диаметр тела качения соответственно.

Таким образом, скорость вращения сепаратора считается predetermined геометрии подшипника и кинематическими параметрами его колец. В известных методиках не учитываются дополнительно возникающие потери при нарушении режима чистого качения и проскальзывании тел качения относительно беговых дорожек колец, вызывающем изменение частоты вращения сепаратора от значения, определяемого выражением (2.48).

Рассмотрим на рисунке 2.9 схему контакта тела качения 4 с внутренним 1 и наружным 2 кольцами радиального подшипника, а также с сепаратором 3. Радиус окружности расположения центров тел качения равен  $R_0$ . Тело качения 4 с радиусом  $r_w$  с центром в точке  $C$  контактирует с внутренним кольцом 1 в точке  $A$ , с наружным кольцом 2 – в точке  $B$ . Предлагаемый способ определения КПД подшипника предусматривает измерение в процессе работы частоты вращения внутреннего кольца 1 –

$n_1$ , частоты вращения наружного кольца 2 –  $n_2$  и частоты вращения сепаратора 3 –  $n_3$ . Таким образом, становятся известными и угловые скорости внутреннего кольца  $\omega_1$ , наружного кольца  $\omega_2$  и сепаратора  $\omega_3$ .

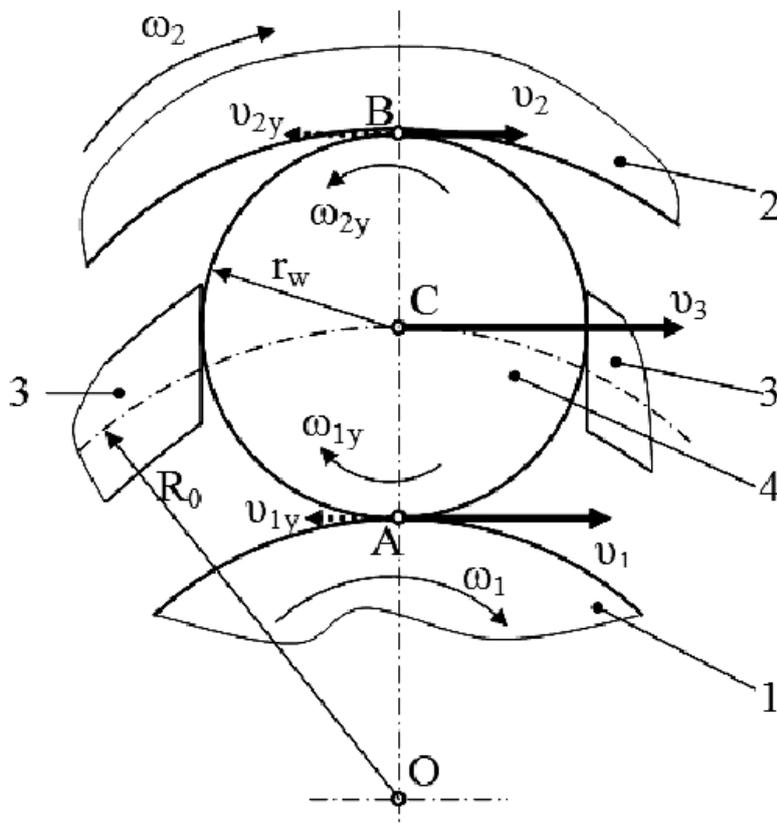


Рисунок 2.9 – Схема кинематического взаимодействия тела качения с основными звеньями подшипника

Линейные скорости точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  (соответственно  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ ) определяются по следующим формулам:

$$v_1 = -\omega_1(R_0 - r_w); \quad v_2 = -\omega_2(R_0 + r_w); \quad v_3 = -\omega_3 R_0. \quad (2.49)$$

Знак « $-$ » в выражениях (2.49) учитывает то, что угловая скорость при вращении тела в направлении против хода часовой стрелки положительна, при вращении тела по ходу часовой стрелки – отрицательна.

Применим метод остановки тела качения, рассматривая его движение как мгновенно поступательное, т. е. мысленно сообщим всем его точкам линейную скорость, равную по модулю  $v_3$ , но направленную в

противоположную сторону. При этом точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  получают также дополнительные линейные скорости, равные по модулю  $v_3$ , но направленные в противоположную сторону (см. рисунок 2.9). Условные линейные скорости при остановленном теле качения в точках  $A$  и  $B$  (на рисунке 2.9 они показаны прерывистыми линиями со стрелками) будут равны:

$$v_{1y} = v_1 - v_3; \quad v_{2y} = v_2 - v_3. \quad (2.50)$$

В точке  $C$  условная линейная скорость равна нулю ( $v_{3y} = v_3 - v_3 = 0$ ), т. к. тело качения 4 мысленно остановлено.

Условные угловые скорости тела качения определяются из уравнения зависимости линейной и угловой скоростей:

$$\omega_{1y} = \frac{v_{2y}}{r_w} = \frac{v_1 - v_3}{r_w}; \quad (2.51)$$

$$\omega_{2y} = \frac{v_{2y}}{r_w} = \frac{-(v_2 - v_3)}{r_w}. \quad (2.52)$$

Знак « $-$ » в выражении (2.52) для угловой скорости  $\omega_{2y}$  следует из известного векторного уравнения  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{v}$  – вектор линейной скорости точки тела, совершающего вращательное движение;  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий центр, лежащий на оси вращения с рассматриваемой точкой. Так как в данном случае центром является центр тела качения, радиусы-векторы, соединяющие центр  $C$  и точки  $A$  и  $B$ , разнонаправлены, поэтому и угловые скорости в выражениях (2.51) и (2.52) имеют разные знаки.

Абсолютная угловая скорость тела качения с учетом выражений (2.51) и (2.52) определится как среднее значение:

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^s \omega_{iy}}{s} = \frac{\omega_{1y} + \omega_{2y}}{2} = \frac{0,5}{r_w} (v_1 - v_2), \quad (2.53)$$

где  $s$  – число точек контакта (на рисунке 2.9  $s = 2$ ).

При этом в формуле (2.53) и далее контактом тела качения 4 с сепаратором 3 пренебрегаем, т. к. в тяжело нагруженных подшипниках действующая сила между ними незначительна по сравнению с

радиальной нагрузкой. Из-за ненагруженности сепаратора, следовательно, пренебрежимо малой будет мощность, расходуемая на трение. Данное предположение не применимо в подшипниках приборов и механизмов точных перемещений.

Определяем из известной теоремы о сложении угловых скоростей при известной абсолютной угловой скорости  $\omega$  относительные угловые скорости тела качения (относительно внутреннего кольца  $\omega_{1r}$  и наружного кольца  $\omega_{2r}$ ):

$$\omega_{1r} = \omega - \omega_1 = \frac{0,5}{r_w} (\nu_1 - \nu_2) - \omega_1; \quad (2.54)$$

$$\omega_{2r} = \omega - \omega_2 = \frac{0,5}{r_w} (\nu_1 - \nu_2) - \omega_2. \quad (2.55)$$

Скорости скольжения в точках контакта  $A$  и  $B$  найдем как разницу внешних скоростей  $\nu_1$  и  $\nu_2$  и приложенных в этих точках переносной скорости  $\nu_3$  и относительной скорости, равной  $\omega r_w$ :

$$\nu_{sk1} = \nu_1 - (\nu_3 + \omega \cdot r_w) = -\nu_3 + 0,5(\nu_1 + \nu_2); \quad (2.56)$$

$$\nu_{sk2} = \nu_2 - (\nu_3 - \omega \cdot r_w) = -\nu_3 + 0,5(\nu_1 + \nu_2). \quad (2.57)$$

Таким образом, скорости скольжения в точках контакта  $A$  и  $B$  равны.

Скалярные выражения (2.56) и (2.57) также являются следствием векторного уравнения:  $\vec{\nu}_i = \vec{\nu}_{ski} + \vec{\nu}_3 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ , что объясняет различие знаков в формулах для определения скоростей скольжения, т. к. радиусы-векторы  $\vec{r}_i$ , соединяющие центр  $C$  с точками  $A$  и  $B$ , имеют разную направленность.

Равномерное распределение скорости скольжения по двум точкам контакта оправдано в данной системе и тем, что нормальные силы, а значит и силы трения (при одинаковых материалах, термообработке и шероховатости поверхности), будут равны. В данном случае потерями на трение тел качения о сепаратор также пренебрегаем, т. к. сепаратор подшипника не нагружен.

Потери на качение шариков (роликов) при контакте с внутренним и наружным кольцами определяются как сумма произведений моментов сопротивлений качению и относительных угловых скоростей.

$$\begin{aligned} \Pi_{\kappa} &= F_{sum} \delta (|\omega_{1r}| + |\omega_{2r}|) = \\ &= F_{sum} \delta \left( \left| \frac{0,5}{r_w} (\nu_1 - \nu_2) - \omega_1 \right| + \left| \frac{0,5}{r_w} (\nu_1 - \nu_2) - \omega_2 \right| \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где  $F_{sum}$  – суммарная радиальная нагрузка на нагруженные тела качения подшипника;

$\delta$  – коэффициент трения качения.

Согласно теории силового анализа подшипника [140] сила, действующая на наиболее нагруженное тело качения  $F_{r0}$ , и сила, действующая на  $i$ -й шарик в нагруженной зоне  $F_{ri}$ , определяются как

$$F_{r0} = \frac{P}{1 + \sum_{i=1}^m 2\sqrt{\cos^5(\gamma \cdot i)}}; \quad F_{ri} = F_{r0} \sqrt{\cos^3(\gamma \cdot i)},$$

где  $P$  – результирующая радиальная нагрузка на подшипник;

$\gamma$  – угловой шаг расположения тел качения ( $\gamma = 2\pi/z$ ,  $z$  – число шариков или роликов);

$m$  – половина нагруженных тел качения ( $m = z/4$ , с округлением в меньшую сторону).

Суммарная нагрузка  $F_{sum}$  на нагруженные тела качения будет больше, чем результирующая радиальная нагрузка на подшипник  $P$ :

$$F_{sum} = F_{r0} + 2 \sum_{i=1}^n F_{ri} = \frac{P}{1 + \sum_{i=1}^n 2\sqrt{\cos^5(\gamma \cdot i)}} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n \sqrt{\cos^3(\gamma \cdot i)} \right). \quad (2.59)$$

Для высокоскоростных подшипников в выражении (2.59) необходимо также учитывать действие центробежных сил. В этом случае в формулу (2.59) в правую часть добавляется слагаемое:

$$F_y = m_w z \frac{\nu_3^2}{R_0},$$

где  $m_w$  – масса шарика (ролика).

Потери на скольжение в точках  $A$  и  $B$  с учетом двойного контакта тел качения:

$$\Pi_c = 2fF_{sum} |\nu_{sk1(2)}| = 2fF_{sum} (|-\nu_3 + 0,5(\nu_1 + \nu_2)|), \quad (2.60)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения;

$v_{sk1(2)}$  – любая из скоростей скольжения ( $v_{sk1}$  или  $v_{sk2}$ ), т. к. они равны.

Коэффициент трения качения  $\delta$  и коэффициент трения скольжения  $f$  определяются по справочной литературе для заданных материалов деталей подшипника.

Суммарные потери мощности [141] с учетом формул (2.49)–(2.60):

$$\begin{aligned}
 P_{\text{сумм}} = P_{\kappa} + P_c = & \left( \frac{P\pi}{30 \left( 1 + \sum_{i=1}^m 2\sqrt{\cos^5(\gamma \cdot i)} \right)} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^m \sqrt{\cos^3(\gamma \cdot i)} \right) + \frac{m_w z \pi^2 n_3^3 R_0}{27000} \right) \times \\
 & \times \left( \delta \left( \left| \frac{0,5}{r_w} (-n_1(R_0 - r_w) + n_2(R_0 + r_w)) - n_1 \right| + \left| \frac{0,5}{r_w} (-n_1(R_0 - r_w) + n_2(R_0 + r_w)) - n_2 \right| \right) + \right. \\
 & \left. + 2f (n_3 R_0 - 0,5(n_1(R_0 - r_w) + n_2(R_0 + r_w))) \right). \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

КПД пары подшипников, установленных на валу, определится по формуле  $\eta = 1 - 2P_{\text{сумм}}/P_1$ , где  $P_1$  – мощность, подведенная к валу.

Алгоритм определения КПД упорных и радиально-упорных подшипников будет отличаться учетом гироскопического момента при действии осевой нагрузки.

Определим численно КПД радиального шарикоподшипника 6205, установленного на валу, нагруженного крутящим моментом  $T = 200$  Н·м и вращающегося с частотой  $n_1 = 1256$  об/мин. Ориентировочный коэффициент трения для пары «сталь–сталь без смазки»  $f = 0,15$  [142, таблица 7], коэффициент трения качения для пары «закаленная сталь по закаленной стали»  $\delta = 0,001$  см [142, таблица 11].

При численной подстановке для пары подшипников 6205, симметрично установленных относительно зубчатого колеса, при осуществлении чистого качения КПД составит 0,996 в условиях нагружения, описанных выше. Скорость в нижней точке шарика (см. рисунок 2.9) составляет 2 м/с, а скорость центра шарика – 1 м/с. Если же скорость центра замедлится до 0,5 м/с, то КПД пары подшипников составит 0,991.

Результаты расчетов показывают, что потери в подшипнике определяются преимущественно трением скольжения. При постоянных скоростях вращения внутреннего и наружного колец при изменении частоты вращения сепаратора потери на трение качения остаются постоянными. При этом доля их в общих потерях колеблется от 100 (при чистом качении,  $v_c = 1$  м/с) до 4 % при увеличении окружной скорости сепаратора до 1,5 м/с или замедлении до 0,5 м/с. Увеличение нагрузки на подшипники увеличивает пропорционально потери на качение и скольжение. КПД подшипника (при постоянных значениях коэффициентов  $f$  и  $\delta$ ) остается неизменным, т. к. при увеличении потерь мощности увеличивается одновременно мощность, подводимая к валу.

Следует отметить, что вышеприведенный алгоритм не учитывает непосредственно влияние на КПД некоторых существенных факторов (смазочного материала и температуры), однако он позволяет проследить тенденции в изменении потерь мощности в процессе работы подшипника. Влияние конкретного типа смазки можно учесть значениями коэффициентов трения скольжения и качения на основании данных, полученных экспериментально. Алгоритм был автоматизирован и внедрен на ЗАО «ДОРМАШ» (Орел, Российская Федерация).

На рисунке 2.10 показана схема устройства для практической реализации предлагаемого метода. Устройство состоит из датчиков угловой скорости 5–7, блока синхронизации 8 и персональной ЭВМ 9. Датчик угловой скорости 5 принимает сигнал от внутреннего кольца 1, датчик 6 – от сепаратора 3, датчик 7 – от наружного кольца 2. Датчики угловой скорости имеют бесконтактный принцип действия (например, фотоэлектрические датчики с прерывателем либо электромагнитные датчики). При этом на основных деталях подшипника 1, 2 и 3 закрепляют диски с отверстиями либо выступы из ферромагнетиков. Блок синхронизации работы датчиков 8 предназначен для обеспечения синхронной работы всех датчиков, настройки и усиления сигнала, поступающего от датчиков, первичной обработки и передачи данных на ЭВМ для их последующей обработки.

Определение мощности, расходуемой на трение в радиальном подшипнике качения, осуществляется следующим образом. Сигналы, определяющие частоты вращения внутреннего кольца  $n_1$ , наружного кольца  $n_2$  и сепаратора  $n_3$  от датчиков 5–7 соответственно, поступают в блок синхронизации 8, после обработки – на ЭВМ 9. На ЭВМ информация обрабатывается по программе, составленной по формуле (2.61). При этом в качестве исходных данных в программу вводятся параметры:

$R_0$ ,  $r_w$ ,  $f$ ,  $\delta$  и  $P$ . Радиусы  $R_0$ ,  $r_w$  зависят от типоразмера испытываемого подшипника, коэффициенты  $f$ ,  $\delta$  определяются по справочной литературе либо экспериментально, результирующая нагрузка  $P$  рассчитывается по известным формулам курсов теоретической механики и деталей машин в зависимости от передаваемой мощности и расположения подшипников на валу. Текущие значения мощности могут выводиться на монитор компьютера и на печать в виде графиков и табличных данных в зависимости от времени.

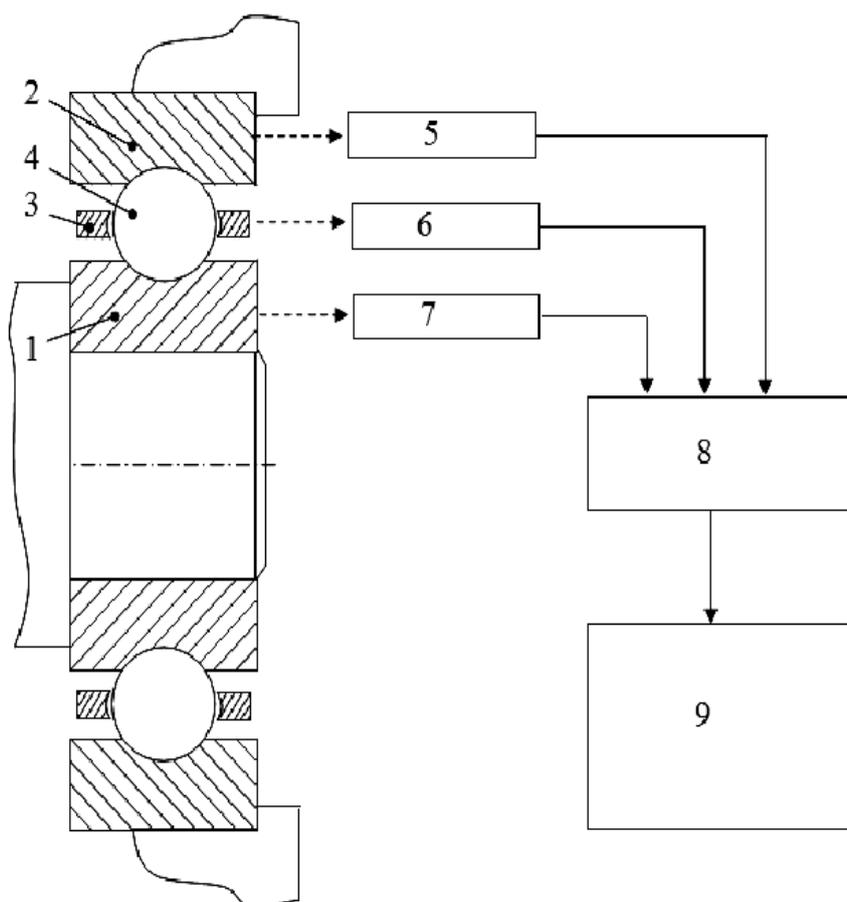


Рисунок 2.10 – Схема установки для определения потерь мощности в радиальном подшипнике качения

Данный способ позволяет определить КПД подшипника в условиях его эксплуатации без остановки машины и демонтажа узла, где установлен подшипник, и проследить характер изменения данной мощности во времени. Так как при измерении и в расчетах используются не усредненные значения мощности, а текущие, повышается точность измерений. Способ позволяет выявить подшипники, в процессе

эксплуатации которых мощность, расходуемая на трение, увеличивается, и произвести мероприятия по устранению этого явления, не дожидаясь разрушения подшипника и выхода из строя узла и машины, где он установлен.

*2.2.3 Трехточечный (трехлинейный) контакт (плоская модель).* Рассмотрим плоскопараллельное движение тела качения 4, контактирующего с тремя поверхностями 1–3, одна из которых (3) неподвижна (рисунок 2.11). Данная схема соответствует схеме развертки на плоскость поверхностей, замкнутых на цилиндре, и может являться аналогом картины взаимодействия тела качения (шарика или ролика) с основными деталями ППТК многих типов.

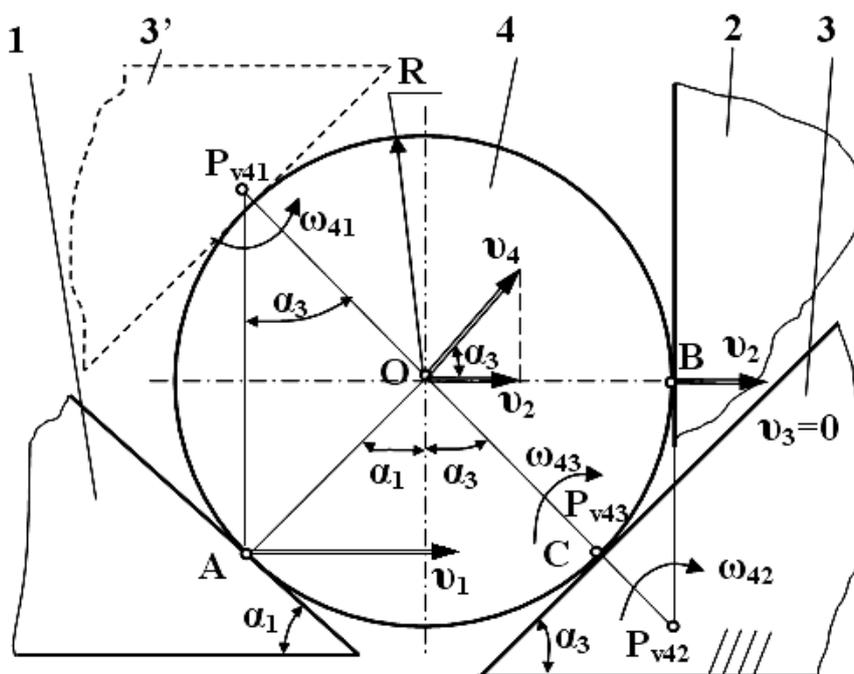


Рисунок 2.11 – Контакт тела качения с тремя поверхностями

Взаимодействие тел, изображенных на рисунке 2.11, соответствует первой кинематической схеме ППТК (раздел 3), при которой поверхность 1 является ведущей, поверхность 2 – ведомой, поверхность 3 – остановленной. Центр масс тела качения имеет скорость  $v_4$ . Тела 1 и 2 имеют соответственно скорости  $v_1$  и  $v_2$ , которые в точках контакта  $A$  и  $B$  передаются телу качения. Известными считаем угловые скорости всех звеньев передачи  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  ( $\omega_3 = 0$ ) и, соответственно, линейные

скорости  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  ( $v_3 = 0$ ), а также скорость движения центра шарика  $v_4$ . Эта скорость может быть разложена на переносную и относительную составляющие. Переносная скорость – это скорость центра тела качения вместе с водилом (телом 2), относительная скорость изменяется по периодическому закону (например, по синусоидальному). Определим проекции линейных скоростей на оси координат.

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \omega_1 R; & v_{1y} &= 0; & v_{2x} &= \omega_2 R; & v_{2y} &= 0; & v_{3x} &= 0; & v_{3y} &= 0; \\ v_{4x} &= \omega_2 R; & v_{4y} &= \omega_1 \frac{AZ_3}{u} \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{u}\right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

После применения метода остановки водила получим выражения для условных скоростей:

$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{4x} = R(\omega_1 - \omega_2); \quad v'_{1y} = v_{1y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{u} \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{u}\right); \quad (2.63)$$

$$v'_{2x} = v_{2x} - v_{4x} = 0; \quad v'_{2y} = v_{2y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{u} \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{u}\right); \quad (2.64)$$

$$v'_{3x} = v_{3x} - v_{4x} = -\omega_2 R; \quad v'_{3y} = v_{3y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{u} \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{u}\right). \quad (2.65)$$

Условные угловые скорости относительно центра  $O$ :

$$\omega'_1 = \text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v'_{1x}}{r_s \cos(\alpha_1)} \right) = -\text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v'_{1y}}{r_s \sin(\alpha_1)} \right); \quad (2.66)$$

$$\omega'_2 = \frac{v'_{2y}}{r_s}; \quad \omega'_3 = \frac{-v_{4y}}{r_s} = -\frac{\sqrt{v_{4x}^2 + v_{4y}^2}}{r_s}; \quad (2.67)$$

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^n \omega'_i}{n} = \frac{\omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3}{3}. \quad (2.68)$$

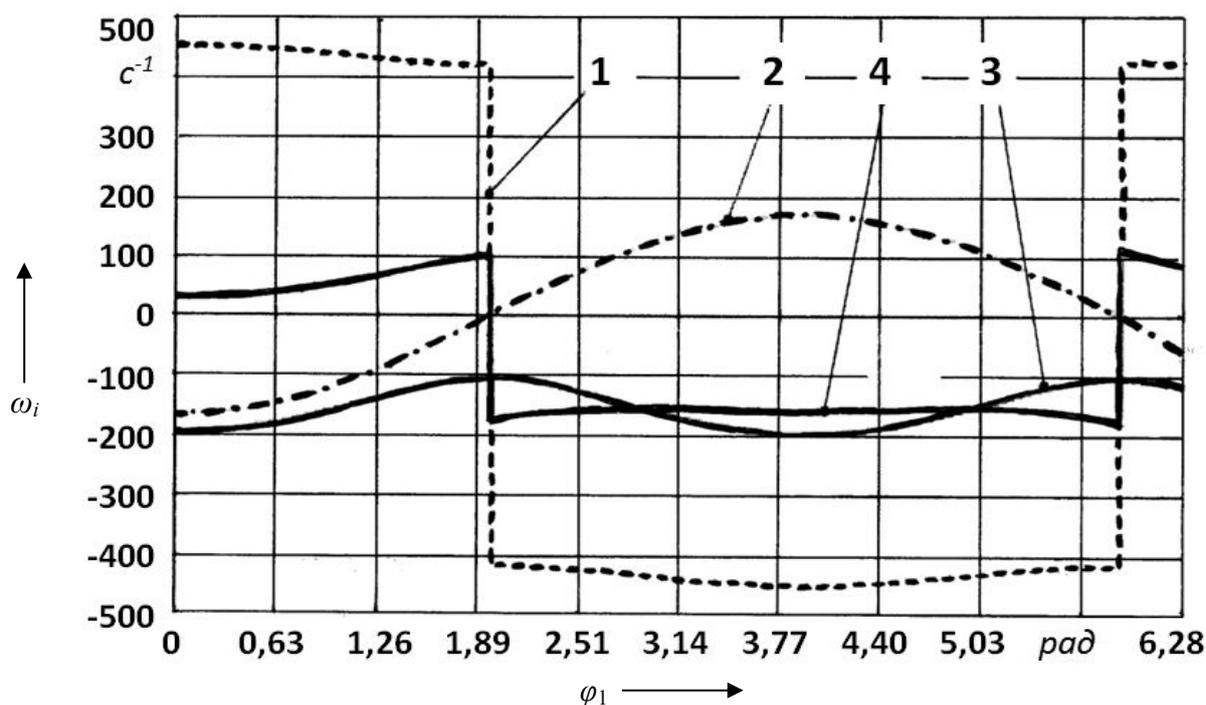
Альтернативный метод с нахождением угловой скорости шара с условными МЦС  $P_{v1}$ ,  $P_{v2}$  и  $P_{v3}$ ):

$$\omega'_{1a} = \left( \text{sign}(\alpha_1) \frac{v_1}{r_s} \frac{\sin(|\alpha_3|)}{\sin(\pi - |\alpha_1| - |\alpha_3|)} \right);$$

$$\omega'_{2a} = \left( \frac{v_2}{r_s} \text{tg}(\alpha_3) \right); \omega'_{3a} = \left( \frac{-v_2}{r_s \cos(\alpha_3)} \right); \quad (2.69)$$

$$\omega = \frac{\omega'_{1a} + \omega'_{2a} + \omega'_{3a}}{3}. \quad (2.70)$$

Результаты, полученные по формулам (2.68) и (2.70), абсолютно идентичны. На рисунке 2.12 показано, как изменяются угловые скорости тела качения за один оборот ведущего вала для ППТК со следующими параметрами:  $n_1 = 1000$  об/мин,  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $R = 30$  мм,  $A = 12$  мм,  $r_s = 3$  мм.



1 –  $\omega'_1$ ; 2 –  $\omega'_2$ ; 3 –  $\omega'_3$ ; 4 –  $\omega$

Рисунок 2.12 – Изменение условных и общей угловых скоростей тела качения

В таблицу 2.1 сведены формулы для определения угловой скорости тела качения в зависимости от линейной скорости входного звена для шести кинематических схем ППТК (см. также таблицу 3.1).

Таблица 2.1 – Выражения для определения угловой скорости тела качения в зависимости от кинематической схемы

Номер кинематической схемы	Угловая скорость тела качения	Номер кинематической схемы	Угловая скорость тела качения
1	$\frac{v_1}{u} \frac{tg\alpha_3}{R} \left( \frac{1}{\sin\alpha_1} \pm \frac{1}{\cos\alpha_3 tg\alpha_3} - 1 \right)$	4	$\frac{v_2}{R} tg\alpha_1 \left( 1 \mp \frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{tg\alpha_1 \cos\alpha_1} \right)$
2	$\frac{v_1}{R} \left( -tg\alpha_1 \mp \frac{1}{u \cos\alpha_3} + \frac{1}{\cos\alpha_1} \right)$	5	$\frac{v_3}{R} \left( tg\alpha_3 \mp \frac{1}{u \cos\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_3} \right)$
3	$\frac{v_2}{R} tg\alpha_3 \left( 1 \mp \frac{1}{\sin\alpha_3} - \frac{1}{tg\alpha_3 \cos\alpha_3} \right)$	6	$\frac{v_3}{u} \frac{tg\alpha_1}{R} \left( \frac{1}{\sin\alpha_3} \pm \frac{1}{\cos\alpha_1 tg\alpha_1} - 1 \right)$

В таблицу 2.1 передаточные отношения  $u$  подставляются по модулю. Результаты также отражают модуль угловой скорости  $\omega_4$ . Знак угловой скорости зависит от схемы силового взаимодействия тела качения в данный момент времени с основными звеньями передачи (для ППП существуют два таких положения).

Скорости скольжения в контакте определяются следующим образом:

$$v_{sk1} = v_1 \cos(|\alpha_1|) - (v_4 \cos(|\alpha_1| + |\alpha_3|) + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s); \quad (2.71)$$

$$v_{sk2} = v_{4y} + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s; \quad (2.72)$$

$$v_{sk3} = v_4 + \omega r_s. \quad (2.73)$$

Рассмотрим, как изменяются скорости скольжения в контакте одного шарика с деталями передачи (рисунок 2.13).

Мощность, потерянная на скольжение, определяется как произведение скорости скольжения на силу трения скольжения ( $\Pi_{sk} = v_{sk} F_{sk}$ ), которая, в свою очередь, равна произведению нормальной реакции в точке контакта на коэффициент трения скольжения ( $F_{sk} = fN$ ).

Определять относительные угловые скорости (как у радиального подшипника) в данном случае нет необходимости, т. к. вращение деталей передачи и тела качения происходят в перпендикулярных плоскостях.

Потери мощности на скольжение

$$\Pi_c = f(N_1 v_{sk1} + N_2 v_{sk2} + N_3 v_{sk3}). \quad (2.74)$$

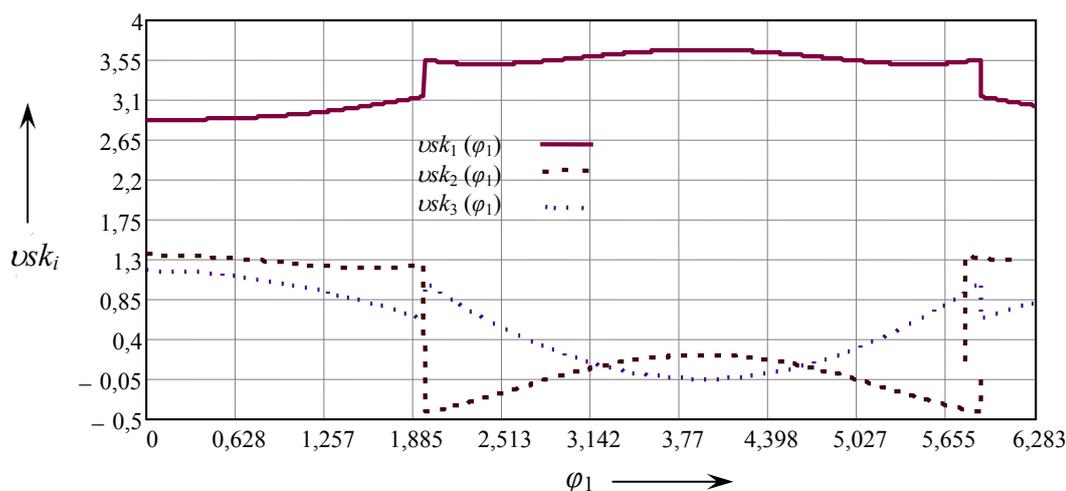


Рисунок 2.13 – Изменение условных и общей угловых скоростей тела качения

Потери мощности на сопротивление качению:

$$\Pi_{\kappa} = \delta\omega(N_1 + N_2 + N_3). \quad (2.75)$$

Для численного определения потерь в передаче необходимо использовать средние значения сил и скоростей звеньев ППТК. Средние скорости (угловые и скольжения) определим, используя интегральную оценку. При этом исследоваться должен отрезок изменения угла поворота ведущего вала, при котором каждое тело качения совершит полный рабочий цикл:  $\varphi_1 = \varphi_2 u \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi u$ .

Средняя угловая скорость при этом определится по формуле

$$\omega_s = \frac{\int_0^{2\pi u} |\omega| d\varphi_1}{2\pi u} = \frac{\int_0^{2\pi u} \left( -\text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v'_{1y}}{\sin(\alpha_1)} \right) - \frac{\omega_1}{u} \left( AZ_3 \cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{u}\right) + \sqrt{R^2 + \left( AZ_3 \cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{u}\right) \right)^2} \right) \right) d\varphi_1}{2\pi r_s}. \quad (2.76)$$

Интегральная оценка изменения модуля функции позволяет определить площадь, представить ее эквивалентной площади прямоугольника и, разделив ее на ширину ( $2\pi u$ ), получить высоту, т. е. усредненное значение искомой функции на данном отрезке.

Тогда средние скорости скольжения:

$$v_{sk1s} = \frac{\int_0^{2\pi u} \left( v_1 \cos(|\alpha_1|) - (v_4 \cos(|\alpha_1| + |\alpha_3|) + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s) \right) d\varphi_1}{2\pi u}; \quad (2.77)$$

$$v_{sk2s} = \frac{\int_0^{2\pi u} \left( v_{4y} + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s \right) d\varphi_1}{2\pi u}; \quad (2.78)$$

$$v_{sk3s} = \frac{\int_0^{2\pi u} \left( v_4 + \omega r_s \right) d\varphi_1}{2\pi u}. \quad (2.79)$$

Суммарные потери мощности, как и для одно- и двухточечного контактов, определяются с учетом количества тел качения. КПД передачи получим из выражения

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{T_1 \omega_1 - \Pi_{\text{сумм}}}{T_1 \omega_1} = \frac{T_1 \omega_1 - n(\Pi_c + \Pi_k)}{T_1 \omega_1} = \\ &= \frac{T_1 \omega_1 - \left( f(N_{1cp} v_{sk1s} + N_{2cp} v_{sk2s} + N_{3cp} v_{sk3s}) + \right. \\ &\quad \left. + \delta \omega n (N_{1cp} + N_{2cp} + N_{3cp}) \right)}{T_1 \omega_1}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

где  $n$  – число тел качения в передаче.

Для ППТК с параметрами  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм,  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $r_s = 20$  мм,  $n_1 = 1000$  об/мин,  $f = 0,05$ ,  $\delta = 0,00001$  мм КПД составил 0,703, что близко к результатам расчета согласно разработанным ранее моделям. Доля потерь на трение качения составляет 3,6 % от общих потерь мощности. При изменении амплитуды кривых зацепления потери (и КПД) имеют экстремум.

Рассмотренная плоская модель адекватно отражает процесс работы передачи с роликами в качестве тел качения [143]. Для шариковых передач требуются повышение точности расчетов и создание пространственной модели.

2.2.4 *Многоточечный контакт (общий случай, пространственная модель)*. В общем случае движения тела качения перемещаются в пространстве под действием наложенных связей. Известными считаем координаты точек контакта ( $i = 1, n$ ) как функции времени, соответственно, скорости точек контакта  $v_i$ , в том числе скорость центра масс  $v_c$ . При этом векторные выражения представим в форме соответствующих матричных аналогий.

$$\vec{r}_i \rightarrow \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_i \rightarrow \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_{ci} \rightarrow \begin{pmatrix} v_{cxi} \\ v_{cyi} \\ v_{czi} \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Применяя метод остановки водила, получим условные линейные скорости точек контакта:

$$\vec{v}_i' \rightarrow \begin{pmatrix} v_{xi}' \\ v_{yi}' \\ v_{zi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xi} - v_{cxi} \\ v_{yi} - v_{cyi} \\ v_{zi} - v_{czi} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Исходя из геометрии механизма и заданных кинематических параметров, находим законы изменения координат точек контакта либо от времени в локальной системе координат, связанной с центром тела качения:  $x_i' = f(t)$ ,  $y_i' = f(t)$ ,  $z_i' = f(t)$ , либо от угла поворота ведущего звена ( $\varphi_1$ ), учитывая, что при равномерном движении  $\omega = \varphi \cdot t$ .

Далее определяем проекции угловых скоростей из векторного произведения:

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i' = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xi}' & \omega_{yi}' & \omega_{zi}' \\ x_i' & y_i' & z_i' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{xi}' \\ v_{yi}' \\ v_{zi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y' z_i' - \omega_z' y_i' \\ \omega_z' x_i' - \omega_x' z_i' \\ \omega_x' y_i' - \omega_y' x_i' \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Представим равенство (2.83) как матричное уравнение:

$$H = A \cdot x \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{xi}' \\ v_{yi}' \\ v_{zi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{zi}' & \omega_{yi}' \\ \omega_{zi}' & 0 & -\omega_{xi}' \\ \omega_{yi}' & \omega_{xi}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Определим из этого уравнения матрицу угловых скоростей. Один из вариантов решения представлен в виде

$$\begin{aligned}\omega'_{xi} &= \frac{v'_{xi}x'_i + v'_{yi}y'_i + v'_{zi}z'_i}{y'_iz'_i - z'_iy'_i}; & \omega'_{yi} &= \frac{v'_{yi}y'_i + v'_{xi}x'_i + v'_{zi}z'_i}{z'_ix'_i - x'_iz'_i}; \\ \omega'_{zi} &= \frac{v'_{zi}z'_i + v'_{yi}y'_i + v'_{xi}x'_i}{x'_iy'_i - y'_ix'_i}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Определяем угловую скорость тела качения:

$$\vec{\omega} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \omega'_{xi} / m \\ \sum_{i=1}^m \omega'_{yi} / m \\ \sum_{i=1}^m \omega'_{zi} / m \end{pmatrix}.\quad (2.86)$$

Скорости скольжения определяем как относительные скорости движения тела качения  $v_r$  с учетом вращательного движения тела качения с угловой скоростью  $\omega$ :

$$v_{ski} = v_{ri} \pm \omega r_s.\quad (2.87)$$

Знак «+» принимается в том случае, когда перенесенная в точку контакта окружная скорость  $\omega r_s$  совпадает по направлению со скоростью  $v_{ski}$ , знак «-» – в обратном случае.

Потери  $\Pi$  в передаче с телами качения складываются из потерь мощности на трение скольжения  $\Pi_{ск}$ , трение качения  $\Pi_{кач}$  и тепловых потерь  $\Pi_{тепл}$ :

$$\Pi = \Pi_{ск} + \Pi_{кач} + \Pi_{тепл}.\quad (2.88)$$

Потери на трение скольжения в одном контакте

$$\Pi_{ci} = F_{ski} v_{ski},\quad (2.89)$$

где  $F_{ski}$  – сила трения скольжения в контакте;

$v_{ski}$  – скорость скольжения.

Потери на трение качения:

$$\Pi_{ki} = M_{ск.i} \omega_i,\quad (2.90)$$

где  $M_{ск.i}$  – сопротивления качению в контакте;

$\omega_i$  – угловая скорость вращения шара относительно  $i$ -й точки контакта.

Для планетарной шариковой передачи

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ci} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{\kappa i} + \sum_{j=1}^m P_{менл.i}, \quad (2.91)$$

где  $m$  – число точек контакта одного тела качения;

$n$  – число тел качения.

### ***2.3 Рекомендации по минимизации потерь мощности в нагруженном катящемся контакте***

В однотоочечном контакте чистое качение достижимо при определенных сочетаниях внешних нагрузок (сил и моментов). Задача минимизации потерь мощности в однотоочечном контакте при заданных внешних нагрузках сводится к минимизации потерь на скольжение путем уменьшения значений двух параметров, определяющих  $P_{cs}$ , –  $f$  и  $v_{sk}$ . Однотоочечный контакт интересен с точки зрения теории колесных машин.

В многотоочечном контакте необходимо решать многокритериальную задачу оптимизации.

В двухточечном контакте чистое качение достижимо при сочетаниях кинематических параметров, обеспечивающих совпадение относительных мгновенных центров скоростей  $P_{v1}$  и  $P_{v2}$ . Данный процесс осуществляется в подшипниках и направляющих качения.

В трех-, четырехточечном и т. д. контактах чистое качение недостижимо. Снижение потерь мощности достижимо уменьшением площади многоугольника, построенного на точках – относительных мгновенных центрах скоростей.

### **3 Структурный аспект снижения потерь мощности в ППТК**

#### ***3.1 Классификация передач с телами качения, основные определения и принцип работы ППТК***

Варианты систематизации и классификации ППТК приводились в [68, 106], наиболее полным является обзор, сделанный в [51]. Нами также были предложены варианты классификации передач исследуемых типов [144–146]. Анализ данных структурных схем показал необходимость дальнейшего их совершенствования. Структура передач с использованием тел качения с учетом проведенного в разделе 1 монографии анализа различных конструкций, с нашей точки зрения, может быть представлена в виде схемы (рисунок 3.1), демонстрирующей также положение в этой структуре выбранного объекта исследований. Отличием от существующих схем является разделение передач на цилиндрические, плоские, конические не по виду поверхности, на которой выполнены беговые дорожки, а по виду поверхности, на которой располагаются траектории центров тел качения.

В качестве объекта исследований в данной работе выбраны планетарные ППТК, использующие принцип зацепления.

**Терминология и принцип работы ППТК.** В большинстве литературных источников по теории механизмов и машин и по деталям машин понятие планетарных механизмов и передач неразрывно связано с зубчатыми передачами. Между тем многие исследователи употребляют термин «планетарные передачи» применительно к передачам с телами качения на протяжении многих десятков лет [63, 66, 83–85, 96, 99, 107 и др.], несмотря на то, что в большинстве конструкций движение сателлитов (тел качения) с астрономической точки зрения планетарным можно назвать лишь условно. Однако этот термин также употребляется в справочной технической литературе [43, с. 325–327], встречается в различной научно-технической литературе, не вызывая возражений со стороны специалистов. К тому же в учебной литературе по деталям машин и теории механизмов определение «дифференциальный механизм» также связано с зубчатыми передачами (колесами), в то время как существуют кулачковые дифференциалы.

Таким образом, термин «планетарные» допустим применительно к передачам с промежуточными телами качения.

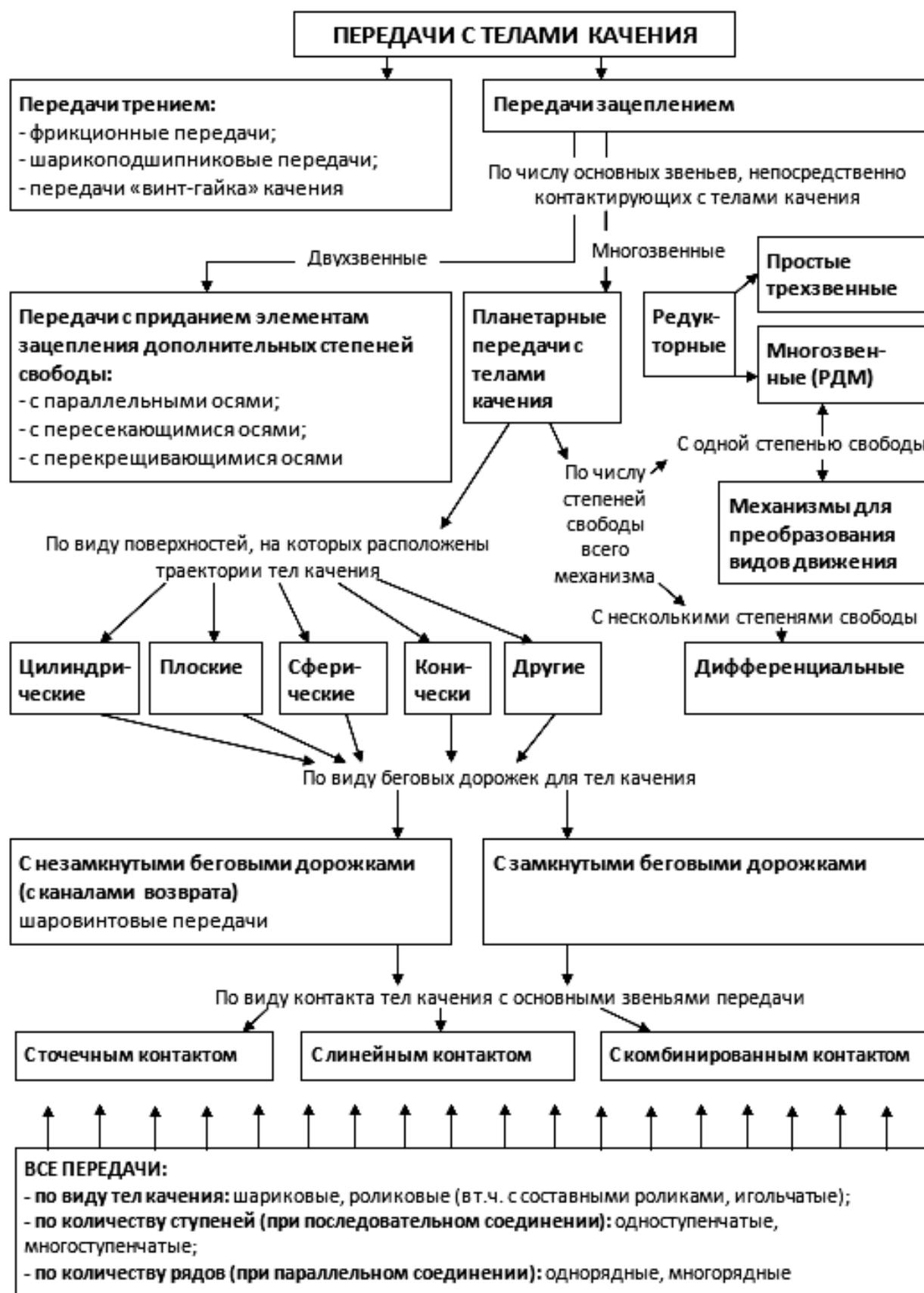


Рисунок 3.1 – Структура класса механических передач с телами качения

Дополнительным доказательством служат кинематические зависимости, которые у зубчатых планетарных передач и у планетарных ППТК аналогичны. В связи с этим – определение: *планетарным механизмом с промежуточными телами качения является механизм, состоящий из трех и более основных звеньев, непосредственно участвующих в зацеплении и контактирующих с промежуточным звеном (звеньями) – телами качения – с возможностью осуществления его (их) сложного движения.*

Рассмотрим модель планетарного зацепления посредством тел качения. Эти зацепления (шаровинтовые, синусошариковые, эллипсные и др.) образованы рабочими поверхностями деталей (беговыми дорожками, канавками и др.), по которым перекатываются и скользят тела качения, и собственно телами качения (материальных точек). Представим их в виде пространственных периодических кривых. Данные периодические кривые назовем *кривыми зацепления*. Одно из звеньев (например, промежуточная обойма, сепаратор, вал с пазами и т. д.) может иметь незамкнутые беговые дорожки (в том числе прямолинейной формы). Если пространственные кривые располагаются на цилиндрических поверхностях, то назовем эти кривые цилиндрическими (цилиндрическая синусоида, циклоида и т. д.).  $R$  – радиус цилиндрической кривой (радиус окружности, образующей цилиндрическую поверхность, на которой располагаются центры тел качения). Аналогично можно рассматривать кривые на сферических, конических поверхностях и на плоскости.

Пространственные кривые налагаются друг на друга, и точки их пересечения (все или определенная группа) являются центрами тел качения. Периодическая пространственная кривая имеет *среднюю* (нулевую) *линию*, относительно которой эту кривую можно представить как периодическую функцию:  $z_i = f(Z_i s_i)$ , где  $z_i$  – длина участка кривой (или прямой), соединяющего среднюю линию и произвольную точку рассматриваемой периодической кривой, при условии, что указанный участок расположен в плоскости, перпендикулярной средней линии, расположен на поверхности, на которой находятся и рассматриваемые периодические кривые, и имеет минимальную длину из всех возможных таких участков (отрезков);  $Z_i$  – число периодов кривой;  $s_i$  – соответствующее расстояние, отмеренное вдоль средней линии от некоторой точки  $O$ , принятой за начало отсчета. Координата  $s$ , отмеряемая вдоль средней линии, может измеряться как в единицах длины, так и в радианах, в пределах от 0 до  $2\pi$  ( $\varphi = s/R$ ).

Если пространственную кривую преобразовать так, чтобы ее средняя линия обратилась в прямую, при этом поверхность, несущая пространственную кривую, преобразуется в плоскость, то получим *развертку кривой на плоскость* (плоскую развертку кривой).

Совместив плоские развертки двух кривых и выбрав общее начало отсчета  $O$ , получим модель шарикового зацепления (рисунок 3.2). При этом важно соблюдение условия – длины средних линий у обеих кривых должны быть равны (и численно равны  $2\pi R$ ). Средние линии у двух кривых зацепления могут не совпадать.

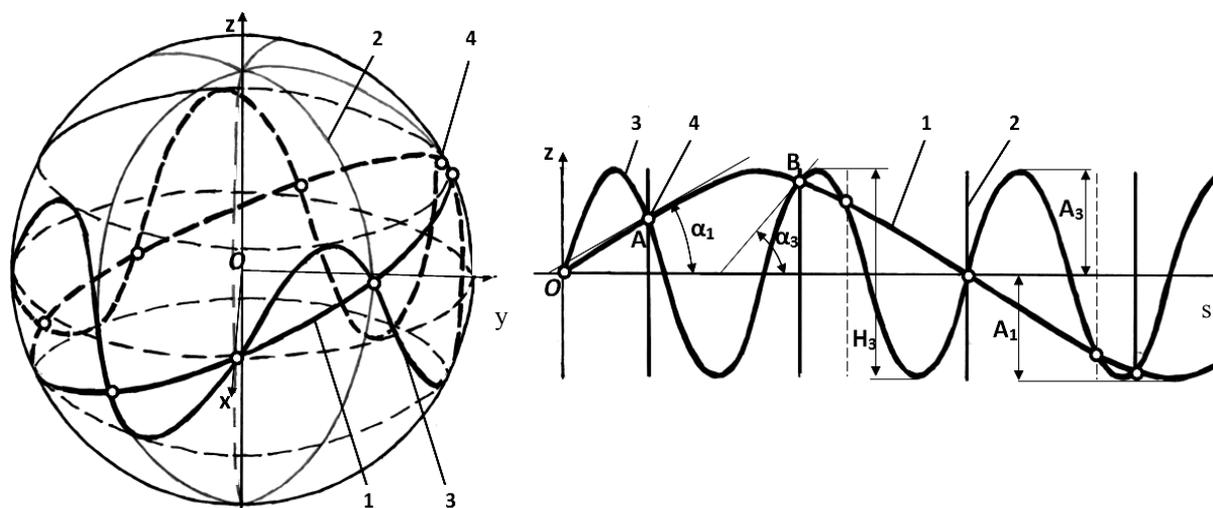


Рисунок 3.2 – Модель ПШТК

Традиционно принято обозначение: 1 – первая периодическая кривая, как правило, связанная с ведущим звеном, 3 – другая периодическая кривая. Если точки пересечения кривых 1 и 3 зафиксировать в какой-то момент времени, т. е. сделать неподвижными относительно средней линии (вдоль оси  $Os$ ) и одновременно перемещать одну из кривых вдоль этой линии, другая кривая вынуждена будет перемещаться вдоль средней линии в обратную сторону. Точки пересечения кривых (тела качения) начнут совершать колебательное движение вдоль оси  $Oz$ , образуя участки кривой (или прямой) 2. Точки пересечения обозначены индексом 4.

Введем обозначения:  $A_1$  – амплитуда первой кривой (амплитуда кривой 1);  $A_3$  – амплитуда другой кривой, сопряженной с первой кривой (амплитуда кривой 3);  $H_i = 2A_i$  – размах соответствующей кривой;  $\alpha_i$  – угол подъема  $i$ -й кривой в некоторой точке  $B$ , измеряемый как угол между касательной  $\tau$  к кривой в этой точке и средней линией.

Принцип работы передач рассмотрим на примере взаимодействия двух кривых (однопериодной и многопериодной), средние линии которых совпадают. По данным кривым формируются беговые дорожки или рабочие поверхности двух основных звеньев передачи, контактирующих с телами качения. Точки пересечения этих кривых (одна из двух существующих групп точек, образованных пересечением разноименных ветвей двух кривых: восходящими и нисходящими) являются точками расположения центров тел качения. При движении одной кривой зацепления (например, кривой 1) на плоской развертке относительно другой кривой (кривой 3) вдоль оси абсцисс точки их пересечения (центры тел качения) в пределах группы также начинают согласованно перемещаться в одном направлении вдоль оси  $Ox$  в переносном движении, сохраняя при этом постоянство расстояния между соседними точками пересечения относительно оси абсцисс. Одновременно точки пересечения перемещаются в относительном движении по участкам кривых (или прямых) 2, расположенных на третьем звене, которое в рассматриваемой кинематической схеме является ведомым. Если перенести картину зацепления с плоскости на цилиндрические поверхности, то получим передачу, изображенную на рисунке 1.15.

Сделав в рассматриваемой математической модели еще одно допущение о постоянстве углов подъема кривой на плоской развертке, соединим вершины кривых прямыми, получим вместо кривых совокупность наклонных отрезков прямых (кусочно-винтовая линия). Также можно использовать в качестве кривых зацепления циклоиды, участки спиралей Архимеда и другие кривые.

ППТК с жесткими кинематическими связями можно классифицировать следующим образом [144]. По функциональному назначению ППТК могут образовывать механизмы редукторов, мультипликаторов, дифференциалов, механизмы преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное движение [147]. Для планетарных механизмов с одной степенью свободы возможна реализация шести основных кинематических схем (таблица 3.1).

Тип передачи (цилиндрическая, плоская, сферическая, коническая и др.) определяется видом поверхности, на которой расположены траектории центров тел качения, образуемые в процессе работы передачи.

По конструктивному исполнению одной секции (ряда) ППТК можно разделить на три вида (таблица 3.2).

По виду зацепления передача может быть с внутренним (рисунок 3.3, а) и внешним (рисунок 3.3, б) зацеплением. Звено 2 по схеме на рисунке 3.3, б может быть установлено коаксиально звеньям,

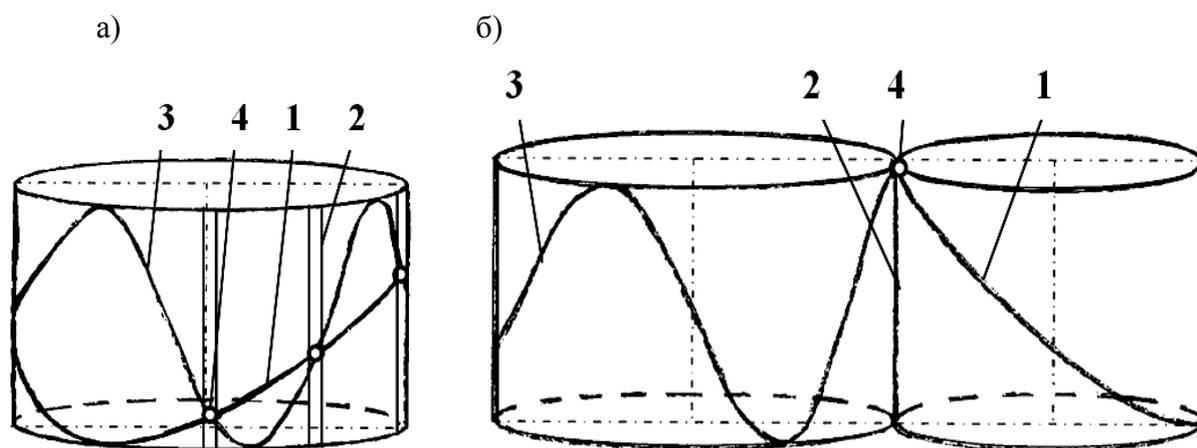
несущим кривые 1 и 3, а может иметь ось, не совпадающую с осями звеньев 1 и 3 (но параллельную им). Недостаток простейшей передачи с внешним зацеплением – одно тело качения, передающее нагрузку.

Таблица 3.1 – Кинематические схемы ППТК

Номер кинематической схемы	Ведущее звено	Ведомое звено	Заторможенное звено
1	1	2	3
2	1	3	2
3	2	1	3
4	2	3	1
5	3	1	2
6	3	2	1

Таблица 3.2 – Конструктивные исполнения секции ППТК

Номер конструктивной схемы	Внутреннее звено	Промежуточное звено	Наружное звено
1	2	1 (3)	3 (1)
2	1	2	3
3	1 (3)	3 (1)	2



а – с внутренним зацеплением; б – с внешним зацеплением

Рисунок 3.3 – Модель передачи с различными видами зацепления

Как уже было отмечено, все точки пересечения кривых 1 и 3 делятся на две группы: точки пересечения разноименных ветвей кривых (восходящих одной кривой и нисходящих другой кривой и наоборот) и точки пересечения одноименных ветвей кривых. На рисунке 3.3, а для наглядности показаны точки обеих групп, но на практике используют только одну группу (как правило, с разноименными ветвями), т. к. в этом случае условия клинового взаимодействия более благоприятны. Основы теории зацепления ППТК отражены в [68, 106] и др.

По количеству секций (рядов) ППТК могут быть односекционные и многосекционные. По виду тел качения – шариковые и роликовые. По характеру соединений секций многосекционных передач – с параллельным и последовательным соединением. Параллельное соединение секций осуществляется для распределения крутящего момента по потокам и снижения удельных нагрузок. Последовательное соединение секций осуществляется для увеличения общего передаточного отношения механизма. В этом случае секции являются ступенями редуктора (мультипликатора) и по числу ступеней ППТК делятся на одноступенчатые и многоступенчатые.

По равенству амплитуд кривых зацепления – передачи с правильным зацеплением ( $A_1 = A_3$ ), обеспечивающие постоянство передаточного отношения [148], и передачи с неправильным зацеплением ( $A_1 \neq A_3$ ).

### ***3.2 Структурные резервы повышения КПД ППТК***

Одним из резервов снижения потерь мощности в ППТК является их структурная оптимизация. Тела качения в виде шариков в большинстве рассмотренных конструкций одновременно контактируют с рабочими поверхностями трех деталей. При этом в контакте тела качения сферической формы с тремя поверхностями неизбежно проскальзывание. Оно же будет иметь место в передаче с роликовыми сателлитами. «Чистое» качение (без скольжения) теоретически возможно при контакте ролика с одной поверхностью при условии, что мгновенные центры скоростей расположены на линии контакта, а также с двумя поверхностями (роликовый подшипник качения) при условии наложения определенных связей на кинематические параметры относительного движения этих поверхностей. «Чистое» качение недостижимо при контакте тел качения с тремя и более поверхностями при условии, что эти

поверхности (все или несколько) не являются фрагментами одной поверхности.

Решить задачу снижения потерь мощности можно структурным преобразованием механизма, заменив непосредственный контакт тел качения с основными деталями передачи на контакт посредством кинематических соединений. В связи с этим нами разработаны конструкции передач с составными роликовыми сателлитами, контактирующими с кулачковыми поверхностями и пазами посредством подшипников качения. Рассмотрим несколько конструкций таких передач.

*Конструкция ППТК с осевым перемещением тел качения.*  
Цилиндрический тип передач имеет преимущества по небольшим радиальным габаритам и возможность компенсации износа кулачков. Исследуемая ППТК цилиндрического типа (рисунок 3.4) состоит из входного вала 1, закрепленных на нем цилиндрических торцовых кулачков 2 и 3, образующих замкнутую беговую дорожку 4, цилиндрического наружного торцового кулачка 5 с периодическим профилем 6, ведомого вала 7 с пазами 8. Пазы равномерно расположены на внутренней цилиндрической поверхности вала 7 параллельно оси передачи 9.

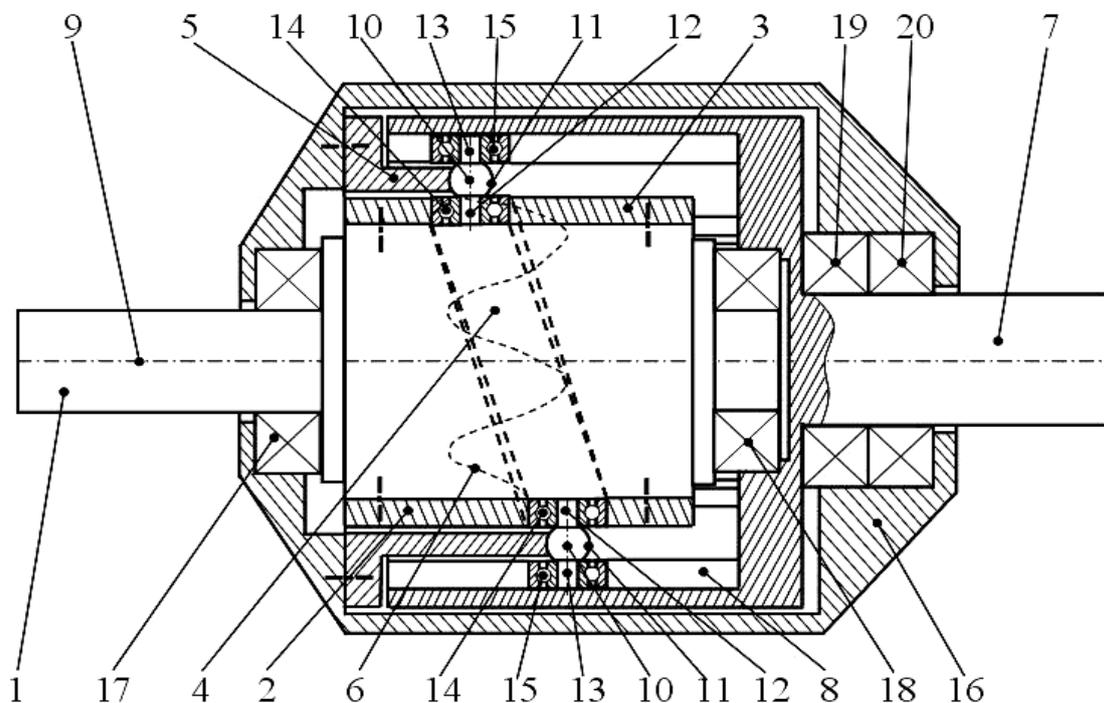


Рисунок 3.4 – Схема ППТК цилиндрического типа с качением во всех кинематических парах (пат. РБ 6376 U)

Телами качения являются ролики 10 со сферическими участками 11 посередине и двумя цилиндрическими участками 12 и 13 на концах. На цилиндрических участках 12 и 13 каждого из роликов 10 расположены подшипники качения 14 и 15 соответственно. Цилиндрический наружный торцовый кулачок 5 жестко закреплен в корпусе 16. Ведущий вал 1 установлен в корпусе 16 и выходном валу 7 с помощью подшипников 17 и 18, а ведомый вал 7 размещен в корпусе 16 на подшипниках 19 и 20.

При вращении входного вала 1 ролики 10 перемещаются в косом пазу, образованном кулачками 2 и 3, контактируют при этом с профильной поверхностью наружного кулачка 5 и совершают осевые перемещения в относительном движении в пазах 8 вала с пазами 7. При этом переносное движение тел качения вынуждает ведомый вал 7 вращаться с редукцией.

На рисунке 3.5 показан сборочный узел рассматриваемого редуктора и его основные детали.

а)



б)



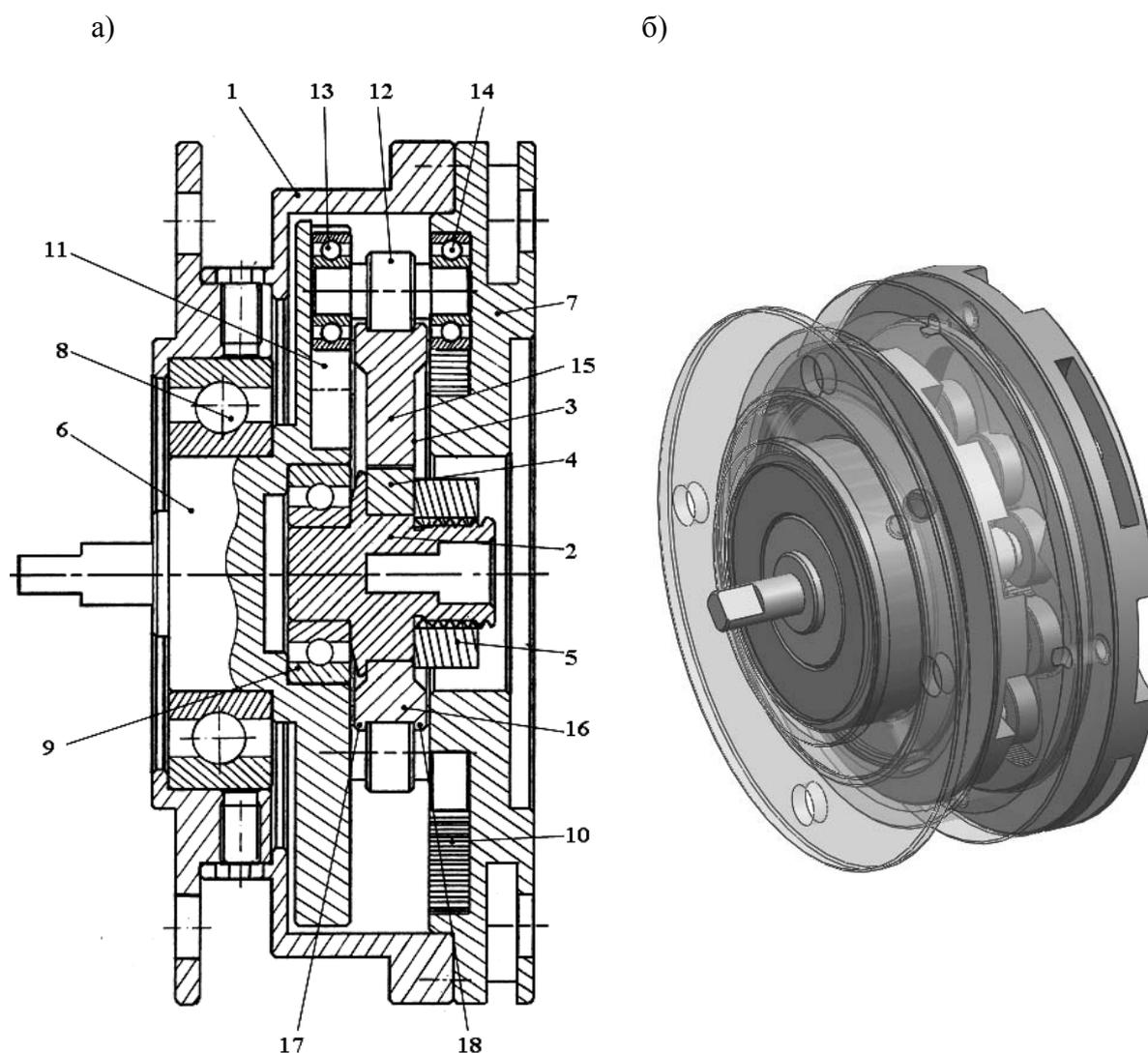
а – редукрующий узел (без наружного кулачка); б – основные детали передачи

Рисунок 3.5 – Роликовый редуктор

Передаточное число редуктора определится так же, как и для традиционной зубчатой планетарной передачи, работающей по схеме 2К-Н:  $i = 1 + Z_3$ , где  $Z_3$  – число периодов (выступов) профильной поверхности наружного кулачка 5.

*Конструкция ППТК с радиальным перемещением тел качения.* Зачастую по условиям компоновки необходимо ограничить размеры передачи в осевом направлении. При этом целесообразно использовать

ППТК плоского типа с радиальным перемещением тел качения в процессе работы. Одна из конструкций такой передачи приведена на рисунке 3.6, а.



а – конструктивная схема редуктора; б – 3D-модель редуктора

Рисунок 3.6 – Редуктор плоского типа (пат. РБ 6328)

Редуктор состоит из корпуса 1, ведущего вала 2 и эксцентрика 3. Эксцентрик 3 устанавливается на ведущем валу 2 посредством шпонки 4 и фиксируется от осевого перемещения гайкой 5. В конструкцию редуктора с промежуточными телами качения также входят водило 6 и диск 7 с замкнутой периодической канавкой, жестко соединенный с корпусом 1. Водило 6 размещено относительно корпуса 1 и ведущего вала 2 с помощью подшипников качения 8 и 9 соответственно. Диск 7 с замкнутой периодической канавкой имеет на своей торцовой поверхности

упомянутую замкнутую периодическую канавку 10, а водило 6 имеет на своей торцевой поверхности радиальные пазы 11. Тела качения 12 в виде роликов сконструированы ступенчатыми и на своих концах несут подшипники качения 13 и 14. Эксцентрик 3 имеет основание 15 в виде диска и рабочую часть 16 с центрирующими буртами 17 и 18.

В основании 15 эксцентрика 3, кроме отверстия со шпоночным пазом для установки на ведущий вал 2, могут быть выполнены другие отверстия для уравнивания редуктора относительно оси вращения. Могут также применяться другие известные методы балансировки эксцентрика. Необходимо также уравнивать систему тел качения. Система тел качения в передаче с осевыми перемещениями роликов в процессе работы ППТК остается уравновешенной.

На торцевой поверхности водила 6 расположены радиальные пазы 11. Эти пазы несквозные и имеют прямоугольный профиль для радиального перемещения подшипников качения 13 в процессе работы редуктора. Диск 7 с замкнутой периодической канавкой изготовлен с отверстиями для крепления к электродвигателю и имеет на своей торцевой поверхности упомянутую замкнутую периодическую канавку 10, изготовленную цилиндрической фрезой для размещения подшипников качения 14. Центровка тел качения 12 в виде роликов может осуществляться также с помощью центрирующих буртов, выполненных на самом ролике.

Конструктивно, как уже отмечалось, редуктор предназначен для закрепления непосредственно на двигателе (мотор-редуктор). При этом возможно изготовление и последовательное соединение нескольких секций редукторов с ППТК с целью повышения общего передаточного отношения и крутящего момента на ведомом валу.

Аналогичные конструкции редукторов, включающие тела качения с установленными на их концах подшипниками качения, могут применяться и в ППТК других типов (конических, сферических).

### ***3.3 Структурный анализ ППТК***

Преобразуем формулу профессора А. П. Малышева [149] для определения подвижности пространственной, сколь угодно сложной механической системы применительно к ППТК:

$$W_1 = W - K = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 - K, \quad (3.1)$$

где  $W_1$  – число степеней свободы системы без учета возможной самоустановки тел качения;

$W$  – общее число степеней свободы механизма;

$K$  – число степеней свободы тела качения, обеспечивающее ему самоустановку и не влияющее на перемещение его центра масс в пространстве ( $K = 3$  – для шариков,  $K = 1$  – для роликов);

$p_i$  – число кинематических пар  $i$ -го класса (число кинематических пар с числом наложенных связей, равным  $i$ ).

В общем случае формула (3.1) также может быть записана как

$$\begin{aligned} W_1 &= 6(N + R - D) - 5(N - D) - R \sum_{j=1}^m I_j - KR = \\ &= N + R \left( 6 - K - \sum_{j=1}^m I_j \right) - D, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $N$  – число основных звеньев передачи (без учета тел качения);

$R$  – число тел качения;

$D$  – число остановленных звеньев;

$m$  – число звеньев, с которыми контактирует тело качения;

$I_j$  – номер класса  $j$ -й кинематической пары, образующейся в контакте тела качения с основными деталями передачи.

Исключая известные пары «шар–плоскость», «цилиндр–плоскость» и др., рассмотрим наиболее распространенные кинематические пары, образуемые телами качения и основными звеньями ППТК с определением их класса (таблица 3.3).

Рассмотрим несколько типов ППТК, сходных по структуре. Число основных звеньев передачи, как правило, равно трем ( $N = 3$ ), одно звено остановлено ( $D = 1$ ), каждое тело качения контактирует с рабочими поверхностями трех ( $m = 3$ ) основных звеньев. В этом случае формула (3.2) упрощается:

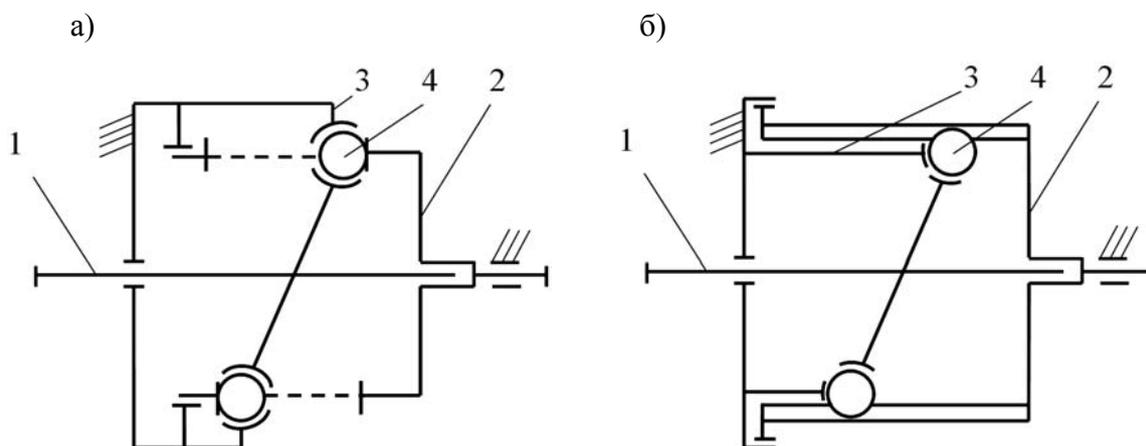
$$W_1 = 2 + R \left( 6 - K - \sum_{j=1}^3 I_j \right). \quad (3.3)$$

В синусошариковой передаче (СШП), где вал с пазами является промежуточным звеном со сквозными прорезями, а наружный кулачок заменяется втулкой с периодической беговой дорожкой на внутренней поверхности (рисунок 3.7, а), тела качения 4 и основные звенья передачи 1, 2 и 3 образуют две пары второго класса и одну пару первого класса, поэтому  $W_1 = 2(1 - R)$ , что свидетельствует о том, что даже с одним телом качения система является переопределенной и степень ее подвижности

равна нулю. На практике данный механизм (и все, рассматриваемые ниже) имеет степень подвижности, равную единице (при  $D = 1$ ).

Таблица 3.3 – Кинематические пары, образуемые телами качения и основными звеньями ППТК

Название пары	«Шар–беговая дорожка»	«Шар–паз»	«Цилиндр–беговая дорожка»	«Цилиндр–беговая дорожка»	«Цилиндр–паз»
Рисунок					
Условное обозначение					
Число степеней свободы	4	5	2	2	4
Класс пары	II	I	IV	IV	II



а – вал с пазами – промежуточное звено; б – вал с пазами – наружное звено

Рисунок 3.7 – Кинематические схемы шариковых передач

Однако теоретически определенные нулевые и отрицательные значения степени подвижности свидетельствуют о необходимости

высокой точности изготовления всех деталей, участвующих в зацеплении, и предполагают так называемую «принудительную» сборку, причем требования к изготовлению и сборке возрастают пропорционально отрицательным значениям  $W_1$ .

Для ППТК с промежуточным внутренним кулачком и валом с пазами в качестве ведомого звена (рисунок 3.7, б) переопределенность возрастает из-за наличия трех пар второго класса, образуемых шариками:  $W_1 = 2 - 3R$ . Данную переопределенность можно снизить, заменив линейный контакт наружного кулачка с шариком на точечный, как у синусошариковых передач (контакт шарика со стенками пазов), однако это снизит, в свою очередь, нагрузочную способность передачи.

Для роликовых конструкций (рисунок 3.8) характерно наличие двух кинематических пар четвертого класса и одной – второго (или первого) класса. В итоге  $W_1 = 2 - 5R$  (или  $W_1 = 2 - 4R$ ). Ролики при этом выполняются ступенчатыми. Центральная их часть может быть цилиндрической либо сферической (см. рисунок 3.8). Сферический участок ролика позволяет повысить длину линии контакта и не влияет на степень подвижности механизма при сравнении его с цилиндрическим участком (без буртов), т. к. в обоих случаях образуются пары второго класса.

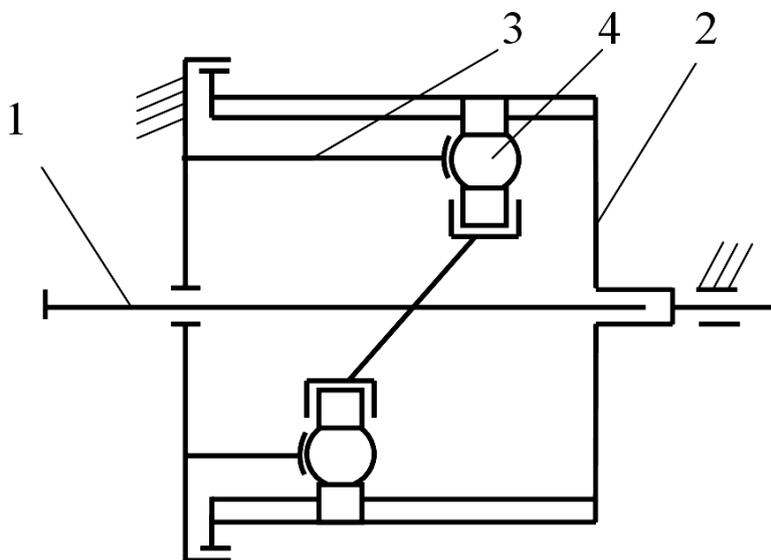


Рисунок 3.8 – Кинематическая схема роликовой планетарной передачи

Если ввести между телами качения и двумя звеньями передачи промежуточные элементы (подшипники), то получим кинематические

схемы с осевым перемещением тел качения (рисунок 3.9, а) и с радиальным их перемещением (рисунок 3.9, б).

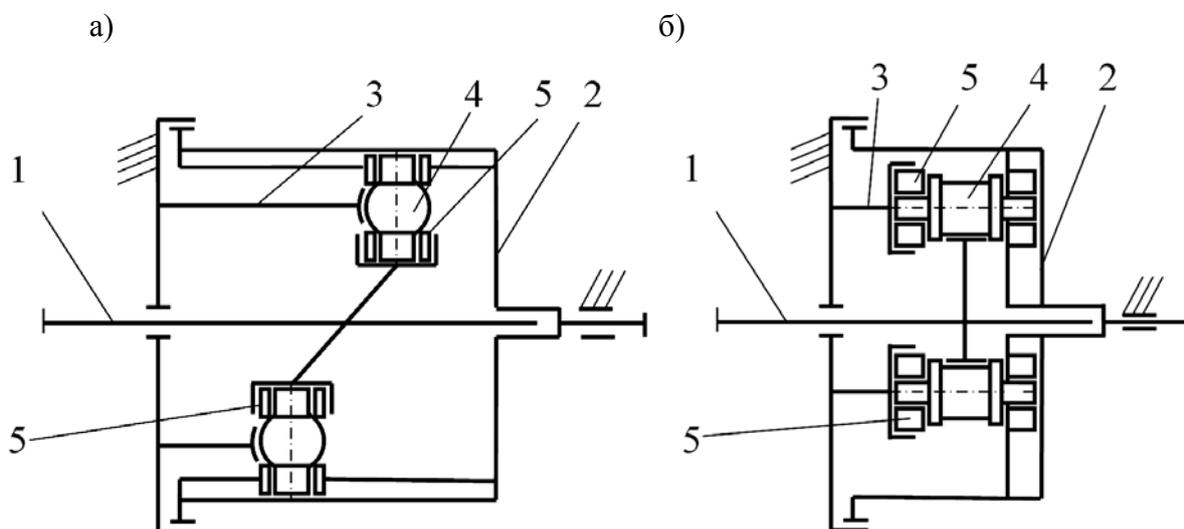


Рисунок 3.9 – Кинематические схемы ППТК (роликовых) с контактом посредством подшипников

В предлагаемых конструкциях (см. рисунок 3.9) появляется промежуточный элемент 5. При этом число подвижных звеньев увеличивается на  $S = 2R$ , на это же число увеличивается число пар пятого класса (вращательных пар, образованных промежуточными элементами 5 и телами качения). В этом случае формула (3.2) для роликовых конструкций после преобразований приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= 6(N + R + S - D) - 5(N + S - D) - R \sum_{j=1}^m I_j - KR = \\
 &= N + R \left( 7 - \sum_{j=1}^m I_j \right) - D.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Анализ формулы (3.4) и ее сравнение с формулой (3.2) показывает, что при использовании предлагаемых конструкций роликовых передач с промежуточными элементами число степеней подвижности всего механизма увеличивается на 2. При контакте тела качения 4 с наружным кулачком можно использовать кинематические пары «шар–беговая дорожка» и «цилиндр–беговая дорожка» (см. рисунок 3.9, б). Первый вариант предпочтительнее, т. к. позволяет сохранить две степени свободы

механизма при обеспечении линейного контакта и центрирования роликов. Число степеней свободы механизмов уменьшается в линейной зависимости от числа тел качения в передаче. Для определения степени подвижности механизма формулы (3.1)–(3.4) целесообразно использовать с числовым значением  $R$ , равным единице, т. к. большие значения числа тел качения предполагают наличие дублирующих связей, что не влияет (теоретически) на общую подвижность передачи.

В случае с плоскими роликовыми передачами (траектории движения центров тел качения в процессе работы лежат на плоскости) пара «цилиндр–беговая дорожка» может исполняться в двух равнозначных вариантах: в виде контакта ролика с выфрезерованной беговой дорожкой на цилиндрической поверхности внутреннего кулачка либо при контакте цилиндрического эксцентрика и ролика с буртами (см. рисунок 3.9, б). Плоские передачи компактны в осевом направлении и удачно komponуются при разработке многоступенчатых, последовательно соединенных редуцирующих узлов для мотор-редукторов. При этом  $W_1 = 2 - 5R$  или  $W_1 = 2 - 3R$  при центральном сферическом участке ролика.

### ***3.4 Результаты экспериментальных исследований различных конструкций редукторов***

**Стенд для определения КПД редукторов.** Для определения КПД разработанных на базе ППТК соосных редукторов был создан лабораторный испытательный комплекс, включающий испытательный стенд, первичные преобразователи, персональную ЭВМ с регистраторами сигналов от преобразователей и программным обеспечением для обработки, визуализации и хранения информации.

Схема стенда для испытаний механических передач приведена на рисунке 3.10. Стенд состоит из асинхронного электродвигателя 5 с номинальной мощностью  $P = 4$  кВт и частотой вращения  $n = 2880$  мин<sup>-1</sup>, нагрузителя (машины постоянного тока с параметрами  $P = 3,3$  кВт,  $n = 1450$  мин<sup>-1</sup>) 1, испытываемого редуктора 3, датчиков 2 и 4 крутящего момента и частоты вращения. Для регулировки скорости вращения вала двигателя в конструкции стенда предусмотрен частотный преобразователь 6.

Крутящий момент на выходном валу редуктора создается благодаря работе нагрузителя в режиме динамического торможения. Увеличение нагрузки на валу машины постоянного тока достигается ступенчатым

увеличением сопротивления в якорной цепи. В качестве измерительных устройств использовались изготовленные ООО «ТИЛКОМ» датчики крутящего момента и частоты вращения М20С-50 (номинальный крутящий момент 50 Н·м) и М20С-500 (номинальный крутящий момент 500 Н·м), кинематически соединенные с входным и выходным валами редуктора соответственно.

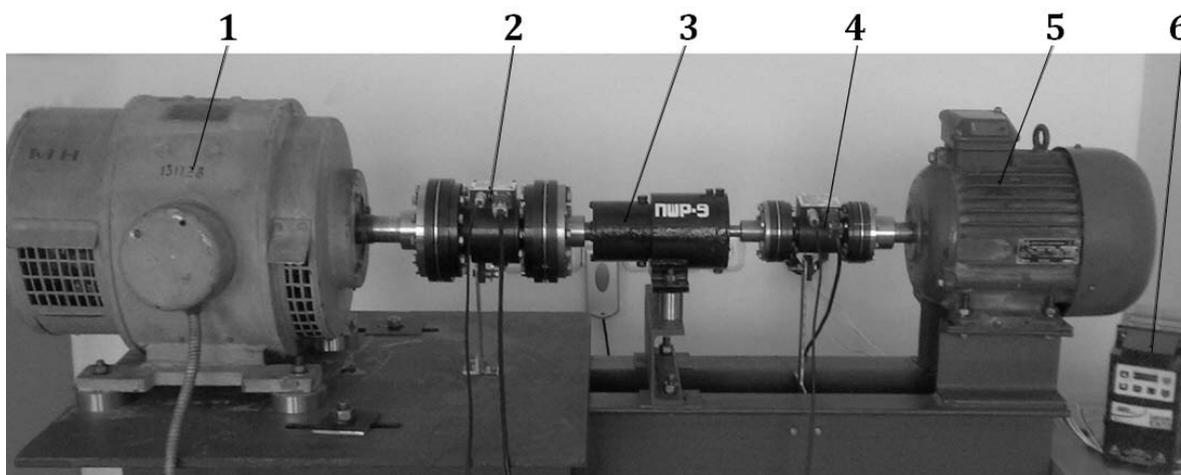


Рисунок 3.10 – Схема испытательного стенда

Каждый датчик (класс точности – 0,2) состоит из вращающейся части – ротора, неподвижной части – статора и декодера. Ротор установлен в статоре на шарикоподшипниках и включает в себя тензоэлемент торсионного типа с наклеенными на нем тензорезисторами, передатчик, катушку воздушного трансформатора питания и передачи данных, фотоэлектрический приёмник датчика частоты вращения и фланцы для установки датчика на объекте. В конструкции стенда статор имеет корпус, внутри которого смонтированы катушки трансформатора питания и приёма данных. Внутри корпуса размещены также электронные блоки приемника сигнала, генератор питания и инфракрасный излучатель датчика частоты вращения. Статор фиксируется таким образом, чтобы предотвратить вращение во время работы.

В процессе работы ротор датчика подвергается нагружению крутящим моментом, в результате чего происходит деформирование тензоэлемента и возникает разбалансировка тензометрической мостовой схемы (тензомоста). Тензомост своим выходом соединен с передатчиком, который усиливает сигнал и преобразует его в цифровой код. Цифровой кодированный сигнал содержит информацию о частоте вращения ротора,

идентификационный номер датчика, температуру ротора. Через воздушный трансформатор цифровой сигнал поступает на приёмник статора, где он усиливается и поступает на вход декодера, где происходит его декодирование и преобразование в цифровые сигналы.

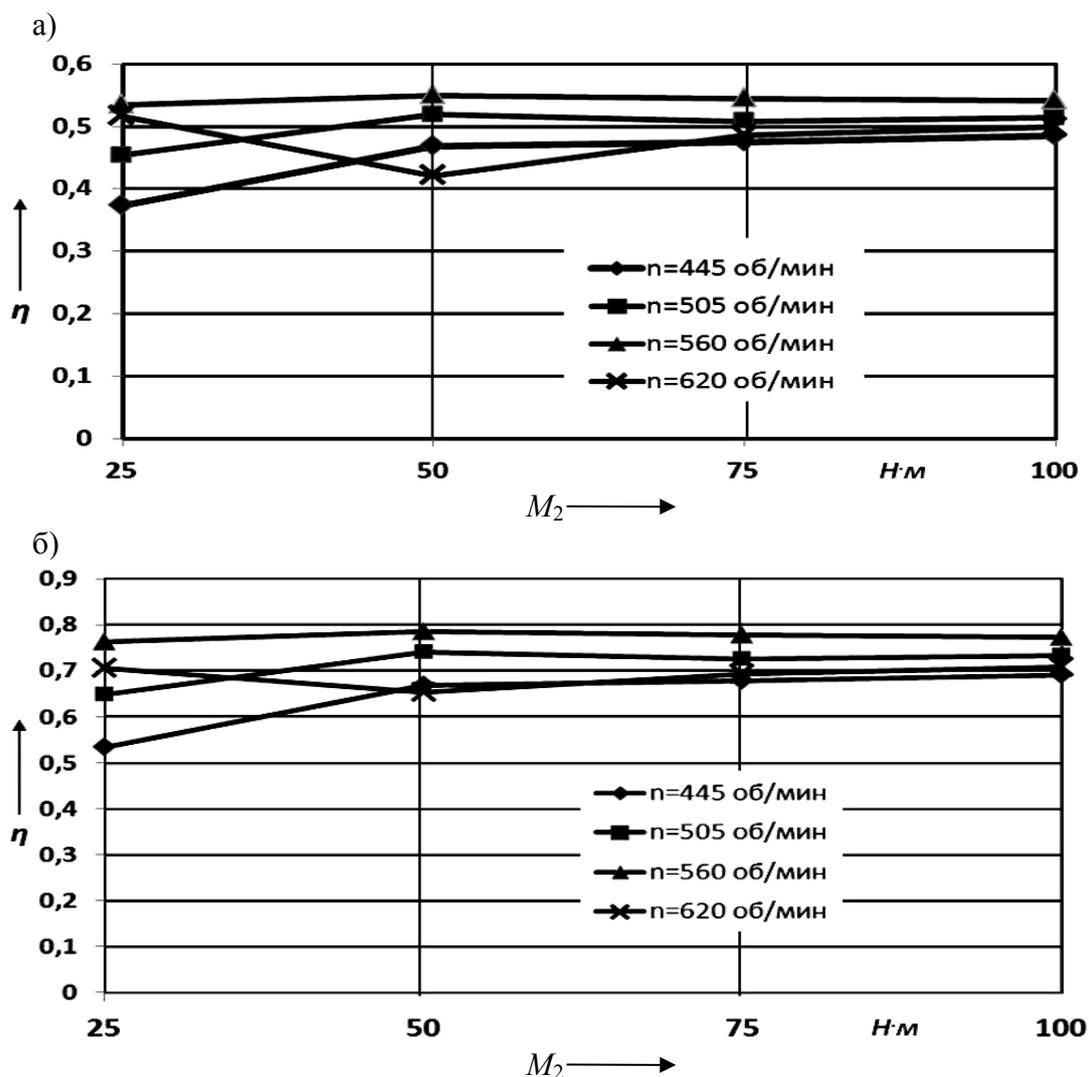
При вращении ротора инфракрасный приёмник ротора периодически попадает в зону излучения источника, установленного на статоре, в результате чего на выходе инфракрасного приемника генерируется один импульс за один оборот ротора. Измерение частоты вращения производится методом определения длительности периода вращения, а также путем заполнения периода вращения высокочастотными импульсами (не менее 4000 импульсов в секунду) и последующим их подсчетом. Благодаря высокой частоте заполнения погрешность измерения частоты вращения не превышает 0,1 %.

К конструктивным мерам, обеспечивающим точность измерения крутящего момента и надежность датчика, относятся: отсутствие скользящих электрических и механических контактов; высокая линейность, временная и температурная стабильность схем цифрового преобразования и декодирования сигналов; компенсация температурного ухода нуля и рабочего коэффициента передачи тензометрической мостовой схемы, гальваническая развязка корпуса статора и корпуса декодера. Допуски на размеры посадочных поверхностей присоединительных фланцев ротора установлены в соответствии с шестым качеством (торцовые и радиальные биения присоединительных поверхностей – не хуже шестой степени точности). Соединение датчиков с валами испытываемых редукторов и с валами приводного двигателя и нагрузителя осуществляется посредством дисковых муфт, предназначенных также для компенсации осевых, радиальных, угловых смещений и температурных деформаций, возникающих при монтаже и в ходе эксплуатации датчиков крутящего момента. Муфты имеют значительную осевую и угловую податливости при высокой крутильной жесткости.

Для отображения измеряемых датчиком величин крутящего момента и частоты вращения используется ПЭВМ с установленным программным обеспечением «Датчик крутящего момента», которое предназначено для автоматизации измерения крутящего момента и частоты вращения на валах, визуализации полученных данных в режиме реального времени и их хранения.

**Проведение испытаний и их результаты.** Испытаниям подвергались два опытных образца малогабаритных редукторов: с шариковыми и с составными роликовыми сателлитами. Передаточное число обоих

редукторов равно 9, максимальный диаметр корпуса – 100 мм у шарикового редуктора, 120 мм – у роликового редуктора. В ходе проводимых экспериментов определялся КПД редукторов при разных частотах вращения ведущего вала и различной степени нагружения ведомого вала. При этом для шарикового редуктора было проведено две серии испытаний с применением сепаратора с прямоугольным и дугообразным профилями пазов при разных режимах работы передачи. Для всех типов редукторов испытания проводились в два этапа – без смазки и со смазочным материалом. Результаты испытаний с использованием смазочного материала, содержащего графит и масло ТАД17-и, представлены на рисунке 3.11.



а – с шариковыми сателлитами при прямоугольном профиле пазов ведомого вала; б – с составными роликовыми сателлитами

Рисунок 3.11 – Зависимость КПД редуктора от нагрузки на выходном валу

Как показали испытания, при отсутствии смазочного материала КПД шарикового редуктора снижается на 15–20 %, роликового – на 5–10 %. При использовании дугообразных пазов КПД шарикового редуктора снижается на 5–10 % по сравнению с результатами, приведенными на рисунке 3.11, а.

Испытания проводились при кратковременном режиме работы (в течение 1–1,5 ч), что объясняется спецификой практического использования передач данного типа.

На основании проведенных экспериментов установлено, что КПД ППТК с промежуточными телами качения соответствует КПД червячных передач и существенно зависит от смазочного материала. Конструкция передач с составными роликовыми сателлитами, в отличие от шариковых передач, обеспечивает получение более высоких значений КПД, однако при этом возрастают радиальные габариты редуктора. Доказано, что прямоугольный профиль пазов, в отличие от дугообразного, позволяет достичь в шариковых передачах более высокого КПД. Это объясняется снижением рассеяния окружной силы на ведомом валу. Однако применение прямоугольного профиля пазов заменяет линейный контакт тела качения с выходным валом на точечный, что приводит к возрастанию контактных напряжений. Поэтому его целесообразно использовать для низкоскоростных механизмов или механизмов с ручным приводом.

### ***3.5 Разработка конструкции планетарной зубчато-шариковой передачи***

Одним из недостатков разрабатываемых в настоящее время ППТК является относительно невысокий их КПД, сопоставимый с КПД червячных передач. При этом одна секция ППТК с осевым перемещением тел качения имеет низкие кинематические возможности, т. к. в одной ступени можно реализовать небольшие значения передаточных отношений (рациональный диапазон: от 0,25 до 9) при условии ограниченности диаметральных размеров (до 100 мм).

Известный аналог – планетарная зубчатая передача, сконструированная по схеме 2К-Н, имеет приблизительно такой же рациональный диапазон передаточных чисел. Увеличение степени редуцирования достигается применением более сложных конструкций. Например, известна планетарная передача с двумя внутренними зубчатыми зацеплениями, конструкция которой включает водило,

соединенное с входным валом, двухвенцовый сателлит и два центральных колеса. Одно из центральных колес является неподвижным и соединено с корпусом, а второе соединено с выходным валом [150, с. 216, схема № 4]. Однако при конструктивном увеличении значений передаточного отношения КПД данной передачи резко снижается, что наглядно демонстрируется в [150, с. 216, таблица 10.16]. Так, при передаточном отношении около 100 КПД рассматриваемого механизма составит 0,64.

Нами разработана конструкция передачи, представляющая собой совмещение в одной конструкции ППТК и планетарной передачи с двухвенцовым сателлитом и традиционным зубчатым зацеплением. При этом возможно сохранение преимуществ обеих передач, а также применение положительных свойств, которые в данных передачах, используемых независимо, преимуществами не являлись.

В предлагаемой *планетарной зубчато-шариковой передаче* (ПЗШП) с двумя внутренними зубчатыми зацеплениями в двухвенцовый сателлит встроена планетарная шариковая передача, причем одно из трех основных звеньев планетарной шариковой передачи (внутренний кулачок, наружный кулачок и вал с пазами) соединено с водилом, другое основное звено соединено с зубчатым венцом двухвенцового сателлита, который зацепляется с неподвижным центральным зубчатым колесом, а третье основное звено соединено с зубчатым венцом двухвенцового сателлита, который зацепляется с центральным зубчатым колесом, соединенным с выходным валом. При этом зубчатые венцы двухвенцового сателлита получают возможность относительного вращения.

Предлагаемая передача позволит использовать такое преимущество передачи-прототипа (планетарной зубчатой передачи с двухвенцовым сателлитом), как большие значения передаточных отношений при сохранении высокого КПД. У ПЗШП также сохраняется одно из основных преимуществ планетарной шариковой передачи цилиндрического типа – малые габариты в радиальном направлении.

Конструкция ПЗШП (рисунок 3.12) включает входной вал 1, связанный с водилом 2, на котором закреплен внутренний кулачок 3. В эллипсообразном пазу 10 внутреннего кулачка 3 располагаются шарики 4. Наружный кулачок 5 установлен концентрично внутреннему кулачку 3 и может вращаться относительно него. С наружным кулачком 5 жестко соединен зубчатый венец 6, который зацепляется с центральным зубчатым колесом 7 посредством внутреннего зацепления. Центральное зубчатое колесо 7 закреплено в корпусе 8. Концентрично внутреннему кулачку 3 и наружному кулачку 5 установлен вал с пазами 9, который

может вращаться относительно внутреннего кулачка 3 и наружного кулачка 5. Шарики 4 контактируют с эллипсообразным пазом 10 внутреннего кулачка 3, с профильными торцовыми поверхностями 11 наружного кулачка 5 и с пазами 12 вала с пазами 9, с которым соединен зубчатый венец 13, зацепляемый с центральным зубчатым колесом 14 посредством внутреннего зацепления. Центральное зубчатое колесо 14 соединено с выходным валом 15 передачи.

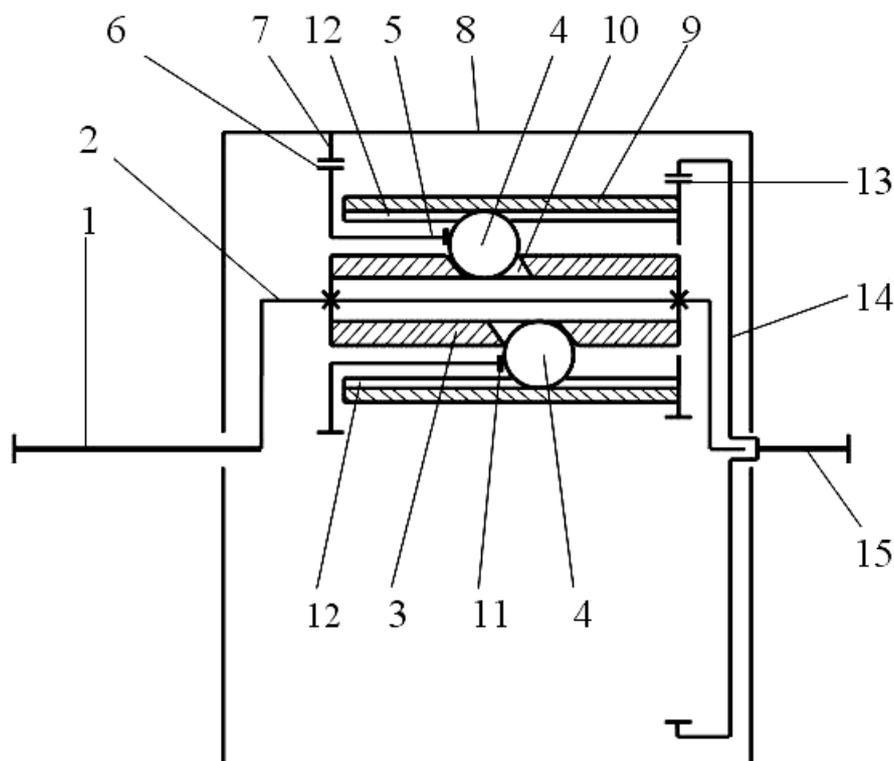


Рисунок 3.12 – Схема ПЗШП

Внутренний кулачок 3, наружный кулачок 5, вал с пазами 9, шарики 4 и венцы 6 и 13 образуют двухвенцовый сателлит. При вращении входного вала 1 вращается водило 2 и жестко соединенный с ним внутренний кулачок 3. Также начинает зацепляться зубчатый венец 6 с неподвижным центральным зубчатым колесом 7, вынуждая наружный кулачок 5 поворачиваться относительно внутреннего кулачка 3. При этом тела качения 4 начинают перемещаться по эллипсообразному пазу 10 внутреннего кулачка 3 вдоль рабочих торцовых поверхностей 11 наружного кулачка 5 и вдоль пазов 12 вала с пазами 9. При этом вал с пазами 9 начинает поворачиваться относительно водила 2, внутреннего

кулачка 3, наружного кулачка 5, вынуждает поворачиваться соединенный с валом с пазами 9 зубчатый венец 13, который зацепляется с центральным зубчатым колесом 14, вынуждая его вращаться, и, соответственно, вращается связанный с этим центральным зубчатым колесом 14 выходной вал 15. При этом зубчатые венцы 6 и 13 могут вращаться с разной угловой скоростью относительно водила 2.

Передаточное отношение известной планетарной зубчатой передачи-прототипа определяется по известной формуле [150, с. 216, схема № 4]:

$$u = (1 - (Z_7 \cdot Z_{13}) / (Z_6 \cdot Z_{14}))^{-1},$$

где  $Z_7$  – число зубьев неподвижного центрального зубчатого колеса 7;

$Z_6$  – число зубьев зубчатого венца 6;

$Z_{13}$  – число зубьев зубчатого венца 13;

$Z_{14}$  – число зубьев центрального зубчатого колеса 14.

В предлагаемой зубчато-шариковой передаче передаточное число будет определяться по формуле

$$i = (1 - (Z_7 \cdot Z_{13}) / (u_{ш} \cdot Z_6 \cdot Z_{14}))^{-1}, \quad (3.5)$$

где  $u_{ш}$  – передаточное отношение планетарной шариковой передачи, встраиваемой в двухвенцовый сателлит ПЗШП.

Передаточное число планетарной шариковой передачи  $u_{ш}$  определяется в зависимости от применяемой кинематической схемы. На рисунке 3.12 приведена кинематическая схема, в которой внутренний кулачок 3 остановлен в относительном движении (относительно водила 2), наружный кулачок 5 является входным звеном, а вал с пазми 9 – выходным звеном относительно водила 2. При этом [144]  $u_{ш} = Z_5 / (Z_3 + Z_5)$ , где  $Z_3$  – число периодов беговой дорожки внутреннего кулачка 3;  $Z_5$  – число периодов (выступов) профильной торцевой поверхности 11 наружного кулачка 5. Если рассматривать развертку пространственного эллипсообразного паза 10 на плоскость, видно, что эллипс вырождается в однопериодную синусоиду, значит,  $Z_3 = 1$ . Необходимо отметить, что согласно теоретическим исследованиям [144], КПД планетарной шариковой передачи при использовании данной схемы выше, чем у традиционно используемой схемы с остановленным наружным кулачком и ведущим внутренним кулачком. Однако использование данной схемы было нерациональным из-за небольших значений передаточных отношений, близких к единице.

Для рассматриваемой на рисунке 3.12 схемы при  $Z_7 = 48$ ,  $Z_6 = 35$ ,  $Z_{13} = 19$ ,  $Z_{14} = 32$  и при отсутствии встроенной в двухвенцовый сателлит планетарной шариковой передачи передаточное отношение  $u$  составило бы 5,385. В предлагаемой ПЗШП с вышеуказанными параметрами и с параметрами  $Z_3 = 1$ ,  $Z_5 = 4$  оно равно  $-56$  согласно формуле (3.5). При этом КПД в зубчатых зацеплениях больше 0,98, т. к. передаточное отношение невелико. КПД планетарной шариковой передачи также составит 0,9. Общий КПД предлагаемой планетарной зубчато-шариковой передачи будет равен произведению КПД двух передач, зубчатой и шариковой, и будет равен 0,88. При попытке реализовать такое же передаточное отношение, равное 56 в передаче-прототипе, КПД составил бы 0,78, что ниже теоретического КПД предлагаемой передачи.

Если затормозить в относительном движении внутренний кулачок 3, жестко соединив его с водилом 2, вал с пазами 9 – с зубчатым венцом 6, а наружный кулачок 5 – с зубчатым венцом 13 (установив кулачок 5 не с левой стороны, как на рисунке 3.12, а с правой), то передаточное отношение планетарной шариковой передачи, встроенной в двухвенцовый сателлит, определится по формуле [144]  $u_{uu} = (Z_3 + Z_5)/Z_5$ . В этом случае, например, при  $Z_7 = 29$ ,  $Z_6 = 19$ ,  $Z_{13} = 34$ ,  $Z_{14} = 44$  общее передаточное отношение  $u$  также определится по формуле (3.5). При отсутствии встроенной в двухвенцовый сателлит планетарной шариковой передачи передаточное отношение составило бы  $-5,573$ . В предлагаемой передаче с теми же параметрами и с параметрами  $Z_3 = 1$ ,  $Z_5 = 4$  оно равно 58,326. При этом также происходит выигрыш в КПД по сравнению с передачей-прототипом.

Всего возможно реализовать 6 различных кинематических схем, поочередно соединяя с водилом 2, т. е. тормозя в относительном движении, одно из трех основных звеньев планетарной шариковой передачи в планетарной зубчато-шариковой передаче (внутренний кулачок 3, наружный кулачок 5 или вал с пазами 9), другое основное звено сделать при этом ведущим и соединить с зубчатым венцом 6, а третье основное звено сделать ведомым и соединить с зубчатым венцом 13. Передаточное отношение ПЗШП будет определяться по формуле (3.5), а передаточное отношение  $u_{uu}$  – по формулам в таблице 4.1 монографии.

## 4 Геометрический и кинематический анализ ППТК

Целями кинематического анализа механизмов и передач с телами качения являются определение кинематических параметров их основных звеньев (углов подъема, функций положения, скоростей и ускорений), установление взаимосвязей между этими параметрами, используемых далее для определения потерь мощности.

### 4.1 Развитие основ теории зацепления с промежуточными телами качения

4.1.1 *Общий случай взаимодействия периодических кривых.* Вопрос взаимодействия нескольких кривых (в частности, однопериодной и многопериодной) – один из основных в теории ППТК. В [69] доказаны существование двух групп точек пересечения двух цилиндрических синусоид и постоянство расстояния между ними (в пределах группы) при движении одной синусоиды относительно другой вдоль оси абсцисс (при рассмотрении плоских разверток) или, что равнозначно, при повороте цилиндрической поверхности, несущей одну из кривых относительно другой цилиндрической поверхности, совпадающей с первой и несущей другую цилиндрическую кривую. В [107] приводятся доказательства для кусочно-винтовых кривых, т. е. для кривых, являющихся сочетанием восходящих и нисходящих отрезков прямых (на плоской развертке). В [69, 107] авторами делается умозрительное заключение о возможности переноса данных свойств на другие виды кривых; в общем же случае задача не была решена.

Рассмотрим класс функций  $f(s)$ , определенных и непрерывных на интервале  $[0; 2\pi R]$ ,  $R > 0$ , удовлетворяющий условию симметрии относительно точки, имеющей абсциссу, равную  $\pi R$  (относительно середины указанного интервала), и условию равенства значений функций в начале и конце указанного интервала:

$$f(\pi R - s) = -f(\pi R + s); \quad (4.1)$$

$$f(0) = f(2\pi R). \quad (4.2)$$

Данные функции можно рассматривать как периодические (однопериодные) с периодом, равным  $2\pi R$ . Из условий (4.1) и (4.2) следует, что  $\forall s \in [0, 2\pi R]$ :

$$f(s) = -f(2\pi R - s); \quad f(\pi R) = 0; \quad f(0) = f(2\pi R) = 0.$$

Рассмотрим также семейство многопериодных периодических функций вида  $f(Zs - 2\pi Ri)$ , где  $Z$  – число периодов функции, размещенной на интервале  $[0; 2\pi R]$ , ( $Z \in N$ ),  $i = \overline{0, Z-1}$ . Период такой функции будет равен  $2\pi R/Z$ .

Нам необходимо определить координаты точек пересечения графиков функций  $z = f(s)$  и  $z = f(Zs - 2\pi Ri)$ :

$$f(s) = f(Zs - 2\pi Ri). \quad (4.3)$$

Для монотонных функций справедливо следующее утверждение: значения функций равны, если равны значения их аргументов.

$$s = Zs - 2\pi Ri \Rightarrow s = \frac{2\pi Ri}{Z-1}.$$

Определим число точек пересечения этой группы.

$$0 \leq \frac{2\pi Ri}{Z-1} < 2\pi R; \quad 0 \leq 2\pi Ri < 2\pi RZ - 2\pi R;$$

$$0 \leq i < Z-1, \quad i = \overline{0, Z-2}.$$

Таким образом, число точек пересечения равно  $Z-1$ .

Выражение (4.3) определяет возможные решения функционального уравнения в случае строго монотонной функции  $f(s)$ . Предположим, что на интервале  $[0; \pi R]$  функция  $z = f(s)$  имеет одну точку экстремума (максимум) и  $\forall s \in [0, \pi R] \quad f(s) = f(\varphi(s))$ , где  $\varphi(s)$  – некоторая непрерывная функция, определенная на отрезке  $[0; \pi R]$ . Практический интерес представляют функции, обладающие на этом отрезке свойством симметрии  $f(s) = f(\pi R - s)$  – ветвь кривой на данном отрезке симметрична относительно прямой  $s = \pi R/2$ , например, функция  $z = \sin(s/R)$  на отрезке  $[0; \pi R]$ . Решение уравнения (4.3) в данном случае

$$f(\pi R - s) = f(Zs - 2\pi Ri),$$

что при указанных выше условиях равнозначно уравнению

$$\pi R - s = Zs - 2\pi Ri.$$

Тогда

$$s = \frac{\pi R(2i+1)}{Z+1}. \quad (4.4)$$

Определим число точек данной группы, используя выражение (4.4) и пределы изменения параметра  $s$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\pi R(2i+1)}{Z+1} < 2\pi R; \quad 0 \leq \pi R(2i+1) < 2\pi RZ + 2\pi R; \\ -1 \leq 2i < 2Z+1; \quad -0,5 \leq i < Z+0,5, \quad i = \overline{0, Z}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.5) очевидно, что число точек данной группы пересечения равно  $Z+1$ .

Изучим поведение семейств решений в случае параллельного переноса кривой  $z = f(s)$  вправо вдоль оси  $Os$ . Такому преобразованию соответствует вид функции  $z = f(s-b)$ ,  $b > 0$ .

Решения уравнения  $f(s-b) = f(Zs - 2\pi Ri)$  имеют вид:

$$s-b = Zs - 2\pi Ri \Rightarrow s = \frac{2\pi Ri}{Z-1} - \frac{b}{Z-1}.$$

Для уравнения  $f(s-b) = f(\pi R - (s-b)) = f(\pi R - s + b)$  соответственно:

$$f(\pi R - s + b) = f(Zt - 2\pi Ri); \quad \pi R - s + b = Zs - 2\pi Ri;$$

$$s = \frac{\pi R(2i+1) + b}{Z+1} = \frac{\pi R(2i+1)}{Z+1} + \frac{b}{Z+1}.$$

Таким образом, можно отметить следующие свойства полученных семейств решений. Для каждой из серий расстояние между соседними точками по горизонтальной оси является постоянной величиной, равной для первой серии  $2\pi R/(Z-1)$ , для второй –  $2\pi R/(Z+1)$ . При движении кривой  $z = f(s)$  вдоль оси  $Os$  в положительном направлении точки первого семейства движутся в противоположном направлении с коэффициентом замедления, равным по абсолютной величине  $1/(Z-1)$ , точки второго семейства движутся в попутном направлении с коэффициентом замедления  $1/(Z+1)$ . Доказано [68, 107], что кинематика ППТК рассматриваемого типа подчиняется формуле Виллиса. В таблице 4.1 приведены формулы для определения передаточных отношений ППТК в зависимости от выбранной кинематической схемы.

Таблица 4.1 – Передаточные отношения планетарных передач разных типов

Ведущее звено	Ведомое звено	Остановленное звено	Передаточное отношение	
			Зубчатые планетарные передачи ( $Z$ – число зубьев) и ППТК ( $Z$ – число периодов)	ЭШП (среднее значение передаточного отношения на рабочих участках беговых дорожек)
1	H(2)	3	$u_{1H}^3 = 1 + \frac{Z_3}{Z_1}$	$u_{1H}^3 = 1 + \frac{A_3}{A_1}$
1	3	2(H)	$u_{13}^H = -\frac{Z_3}{Z_1}$	$u_{13}^H = -\frac{A_3}{A_1}$
H(2)	1	3	$u_{H1}^3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$	$u_{H1}^3 = \frac{A_1}{A_1 + A_3}$
H(2)	3	1	$u_{H3}^1 = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3}$	$u_{H3}^1 = \frac{A_3}{A_1 + A_3}$
3	1	H(2)	$u_{31}^H = -\frac{Z_1}{Z_3}$	$u_{31}^H = -\frac{A_1}{A_3}$
3	H(2)	1	$u_{3H}^1 = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$	$u_{3H}^1 = 1 + \frac{A_1}{A_3}$

В таблице 4.1 также приведены формулы для определения передаточных отношений эллипсных шариковых передач (ЭШП). Передача имеет неправильное зацепление и является, по сути, механизмом прерывистого движения. Конструкция передачи была предложена автором данной работы в 2002 г. [151, 152].

ЭШП (рисунок 4.1) включает ведущий барабан, состоящий из вала-основания 1, цилиндрических торцовых кулачков 2 и 3, закрепленных на валу основания 1 с помощью винтов 4 и 5 соответственно. В конструкцию передачи также входят [153]: ведомый барабан 6, неподвижный цилиндрический торцовый кулачок 7, тела качения 8, корпус 9, шпонка 10 и крышка 11. Цилиндрический торцовый кулачок 7 фиксируется в корпусе 9 посредством шпонки 10. На ведомом барабане 6 изготовлены два продольных паза 12 и 13, направленные вдоль оси передачи. Цилиндрические торцовые кулачки 2 и 3 ведущего барабана имеют

рабочие поверхности 14 и 15, образованные скосами цилиндрической поверхности под углом наклона  $\alpha_1$ .

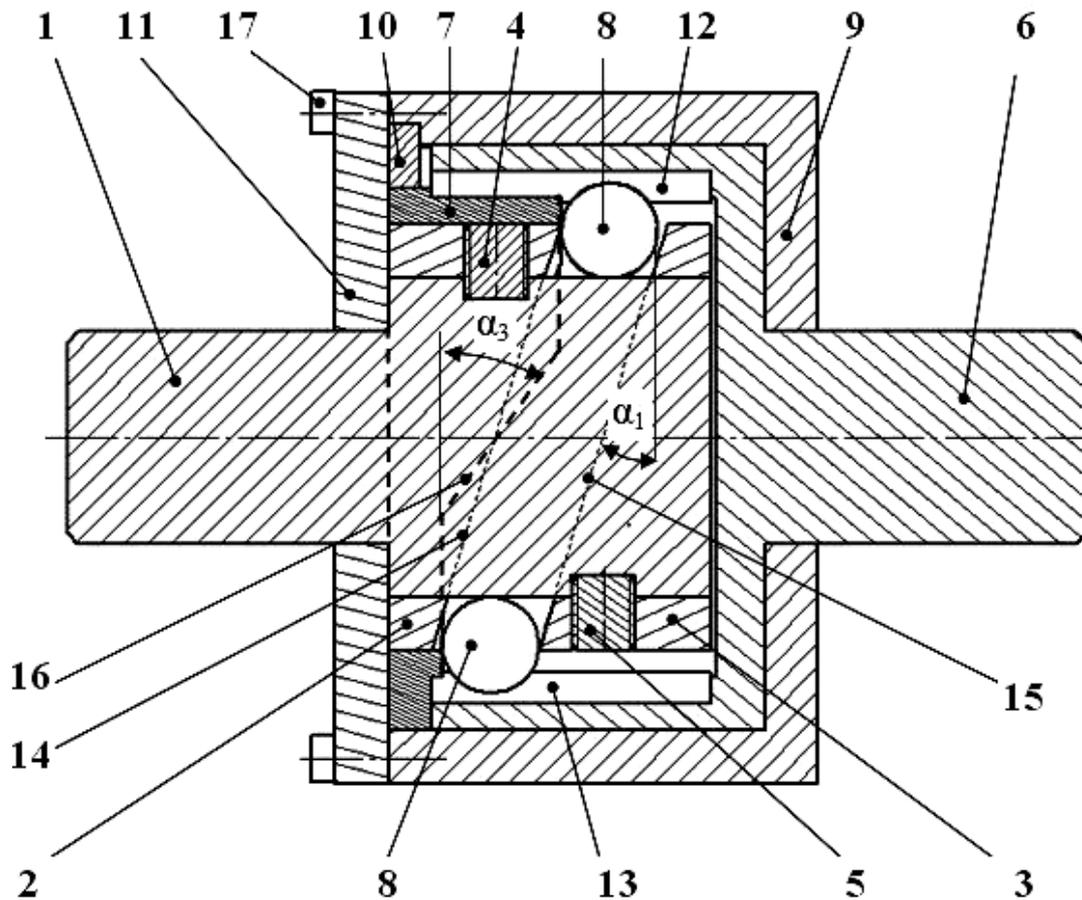


Рисунок 4.1 – Схема эллипсной шариковой передачи

Неподвижный цилиндрический торцовый кулачок 7 имеет рабочие поверхности 16, образованные скосом цилиндрической поверхности под углом наклона  $\alpha_3$ . Цилиндрические торцовые кулачки 2 и 3 ведущего барабана установлены на валу-основании 1 так, что рабочие поверхности этих кулачков 14 и 15 параллельны и обращены друг к другу. Таким образом, рабочие поверхности 14 и 15 цилиндрических торцовых кулачков 2 и 3 соответственно и цилиндрическая поверхность вала основания 1 образуют беговую дорожку для тел качения (шариков). Крышка 11 крепится к корпусу 9 с помощью винтов 17 и предотвращает осевые перемещения деталей передачи.

Передаточное отношение  $u$  передачи с телами качения зависит от значения углов наклона  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  и определяется по формуле из

таблицы 4.1:  $u = 1 + \operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_3 = 1 + A_3 / A_1$ . Также через тангенсы углов наклона можно выразить передаточные отношения для всех кинематических схем. ЭШП работает следующим образом. При вращении ведущего барабана тела качения 8 перемещаются по беговой дорожке, образованной рабочими поверхностями 14 и 15 цилиндрических торцовых кулачков 2 и 3 соответственно и цилиндрической поверхности вала основания 1, а также по рабочим поверхностям 16 неподвижного цилиндрического торцового кулачка 7. При этом тела качения 8 также перемещаются вдоль пазов 12 и 13 ведомого барабана 6, вынуждая его совершать вращательное движение с редукцией. Неподвижный кулачок 7 имеет рабочие поверхности 16, где осуществляется редукция, и срезанные вершины, где передачи движения не происходит. Данная конструкция была применена для создания баллонных ключей для грузовых автомобилей [154–157]. Преимуществами ЭШП являются простота изготовления и возможность реализации теоретически любого значения передаточного отношения (в том числе и дробного) на рабочих участках беговых дорожек [158–161].

*4.1.2 Основные геометрические параметры ППТК и их кинематическая взаимосвязь.* Важным в теории ППТК является вопрос исследования изменения углов подъема кривых, которые определяют КПД передачи.

Угол подъема кривой на плоской развертке и для цилиндрической кривой определяется по формуле

$$\alpha_{cyl}(s) = \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{ds} (f(s)) \right).$$

Угол подъема плоской кривой определяется как угол между касательной к этой кривой в некоторой ее точке и касательной к окружности, проходящей через эту точку (центр окружности – начало координат  $O$ ), с известными уравнениями ( $x_o(s) = R \cos(s/R)$  и  $y_o(t) = R \sin(s/R)$ ):

$$\alpha_{pl}(s) = \arccos \left( \frac{dx_{pl}(s) dx_o(s) + dy_{pl}(s) dy_o(s)}{\sqrt{dx_{pl}(s)^2 + dy_{pl}(s)^2} \sqrt{dx_o(s)^2 + dy_o(s)^2}} \right).$$

В общем случае угол подъема кривой будем измерять как угол между касательной к данной кривой в некоторой ее точке и касательной в горизонтальной плоскости к соответствующей поверхности в рассматриваемой точке. Для измерения данного угла используем формулу

$$\alpha = \arccos(\vec{a}, \vec{\tau}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\tau}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\tau}|}, \quad (4.6)$$

где  $\vec{a}$  – вектор касательной к пространственной кривой;

$\vec{\tau}$  – вектор касательной к несущей поверхности в горизонтальной плоскости.

$$\vec{\tau} = \left( \left( R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)'; \left( R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)'; 0 \right) = \left( -\sin\left(\frac{s}{R}\right); \cos\left(\frac{s}{R}\right); 0 \right).$$

$$\vec{a} = (x'(s); y'(s); z'(s)). \quad (4.7)$$

При переходе к плоским кривым координату  $z$  можно не рассматривать. Подставив в формулу (4.9) значения координат, полученных для общего случая расположения кривых на конической поверхности с углом  $\chi$  наклона образующей к оси  $Oz$ , получим

$$\vec{a}(s, \chi) = \begin{pmatrix} -f'(s) \sin \chi \cos\left(\frac{s}{R}\right) - \frac{1}{R}(R - f(s) \sin \chi) \sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ -f'(s) \sin \chi \sin\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{1}{R}(R - f(s) \sin \chi) \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ f'(s) \cos \chi \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\tau} &= \left( -f'(s) \sin \chi \cos\left(\frac{s}{R}\right) - \frac{1}{R}(R - f(s) \sin \chi) \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right) \left( -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) + \\ &+ \left( -f'(s) \sin \chi \sin\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{1}{R}(R - f(s) \sin \chi) \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) \sin\left(\frac{s}{R}\right) + 0 = \\ &= 1 - \frac{f(s) \sin \chi}{R}. \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2} = \sqrt{(f'(s))^2 + \left(\frac{f(s)\sin\chi}{R} - 1\right)^2}.$$

Окончательно, согласно выражению (4.6):

$$\alpha(s, \chi) = \frac{1 - \frac{f(s)\sin\chi}{R}}{\sqrt{(f'(s))^2 + \left(\frac{f(s)\sin\chi}{R} - 1\right)^2}}. \quad (4.8)$$

На рисунке 4.2 показан фрагмент графика изменения угла подъема синусоиды ( $z = \sin(Zs/R)$ ) для ее цилиндрического и плоского типов для передач с параметрами  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм,  $Z = 2$  (согласно уравнению (4.8)).

Из рисунка 4.2 видно, что передача цилиндрического типа будет более динамически уравновешенной вследствие изменения угла подъема по гармоническому закону, однако в плоской передаче возможно достижение больших значений углов подъема при тех же геометрических параметрах, что способствует увеличению нагрузочной способности.

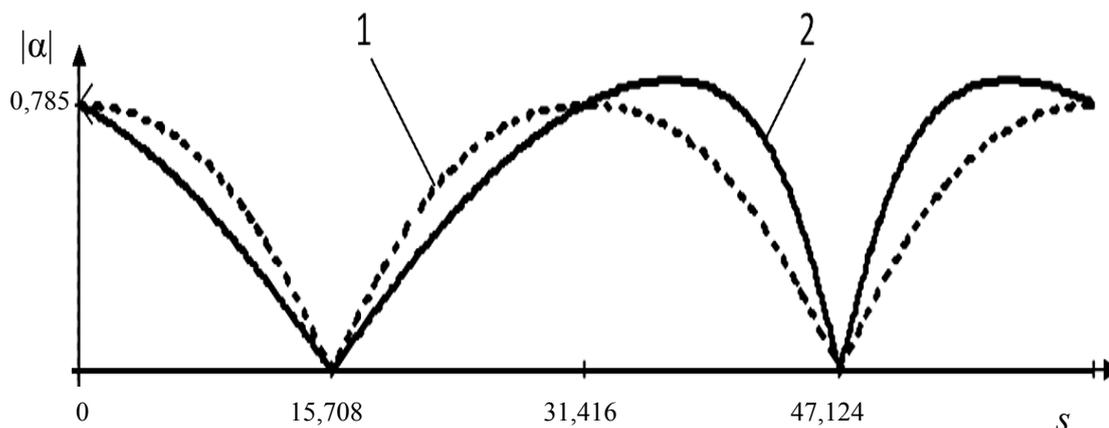


Рисунок 4.2 – Изменение абсолютных значений угла подъема  $\alpha$  цилиндрической (1) и плоской (2) синусоид от параметра  $s$

**Зависимость углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  от угла  $\varphi_1$ .** Выразим изменение углов подъема кривых (на примере синусоид) через изменение угла поворота входного звена. Отметим еще раз, что тангенс угла наклона кривой

$z = f(s)$  есть производная  $dz/ds$ . Осуществив переход от углового параметра к линейному и обратно, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_i &= \frac{dz_i}{ds} = \frac{d}{ds} (A \sin Z_i \varphi'_i) = \frac{d}{ds} \left( A \sin \left( \frac{Z_i s'_i}{R} \right) \right) = \\ &= \frac{AZ_i}{R} \cos \left( \frac{Z_i s'_i}{R} \right) = \frac{AZ_i}{R} \cos(Z_i \varphi'_i), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $i$  – номер звена (1 или 3);

$\varphi'_i$  – полярный угол, который отсчитывается от нулевого положения до точки пересечения кривых.

Объясним верхнюю индексацию параметров  $\varphi'_i$  и  $s'_i$  на примере передач, схемы которых изображены на рисунках 3.7 и 3.8, работающих по первой кинематической схеме. Предположим, что при начальном положении угол поворота внутреннего кулачка  $\varphi_1 = 0$ . При повороте внутреннего кулачка на некоторый угол  $\varphi_1$  тело качения вместе с ведомым валом повернется на угол  $\varphi_2$  в том же направлении. При этом угол подъема  $\alpha_1$  необходимо определить в точке, повернутой относительно начального положения на угол  $\varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ . Из теории сложного движения тела (оси слагаемых движений параллельны) следует арифметическое равенство  $\varphi_r = \varphi_a - \varphi_e$ , где  $\varphi_a$  – угол поворота тела в абсолютном движении относительно стойки (угол поворота ведомого звена);  $\varphi_e$  – угол поворота тела в переносном движении (угол поворота рассматриваемого звена).

Таким образом, в общем случае угол подъема синусоидальной кривой любого звена можно представить как функцию от угла поворота ведущего звена:

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_i Z_i}{R} \cos(Z_i \varphi_r) \right), \quad (4.10)$$

где  $\varphi_r$  – угол, характеризующий относительное движение тела качения (перемещение относительно рассматриваемого звена).

Возвращаясь к первой кинематической схеме и формуле (4.9):

$$\varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi_1; \quad \varphi'_3 = \varphi_2; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arctg\left(\frac{AZ_1}{R}\cos(Z_1(\varphi_2 - \varphi_1))\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{AZ_1}{R}\cos\left(Z_1\varphi_1\left(\frac{1}{u} - 1\right)\right)\right); \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\alpha_3 = \arctg\left(-\frac{AZ_3}{R}\cos(Z_3\varphi_2)\right) = -\arctg\left(\frac{AZ_3}{R}\cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{u}\right)\right). \quad (4.13)$$

Знак минус в выражении (4.13) отражает многопериодную синусоиду зеркально относительно оси  $O_s$ , т. е. сдвигает кривую на полупериод относительно этой оси. Рассмотрим на рисунке 4.3, как изменяется значение углов подъема  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , а также угла клина  $\psi = |\alpha_1 + \alpha_3|$  для одной движущейся точки пересечения кривых, при изменении угла поворота ведущего вала  $\varphi_1$  от 0 до  $2\pi$  (один оборот) при следующих параметрах передачи:  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $R = 30$  мм,  $A_1 = A_3 = 10$  мм. За рассматриваемую точку (тело качения) принята точка, в начальный момент времени совпадавшая с началом координат и принадлежащая первой группе точек пересечения синусоид.

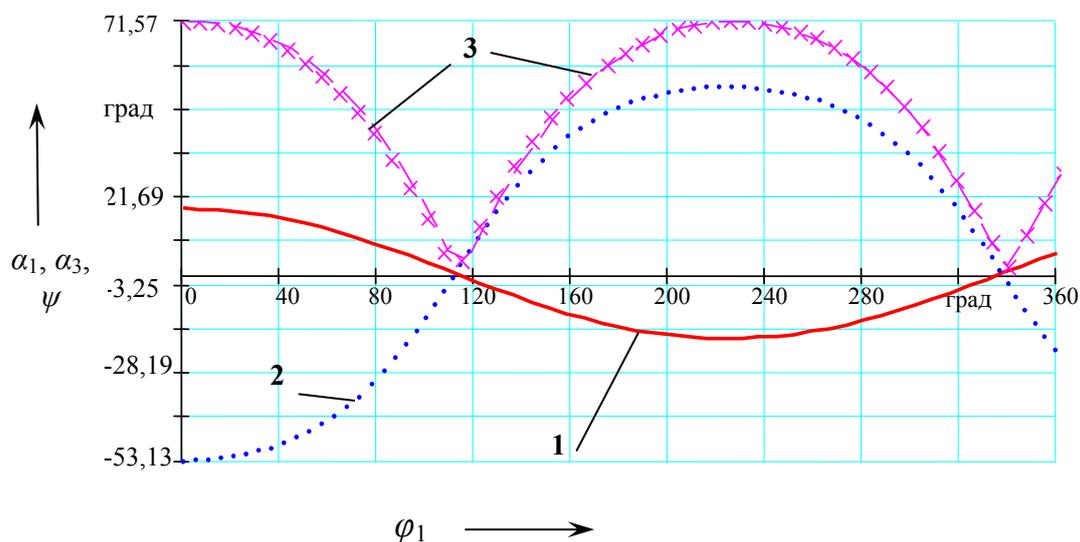


Рисунок 4.3 – Изменение углов подъема  $\alpha_1$  (1),  $\alpha_3$  (2) и угла клина (3) от угла поворота ведущего вала

Для проведения прочностных расчетов необходимо рассчитать усредненное значение углов подъема  $\alpha_{1cp}$  и  $\alpha_{3cp}$ , а также получить аналитическую зависимость для вычисления максимальных значений углов подъема  $\alpha_{1max}$  и  $\alpha_{3max}$ . Если для упрощения модели принять допущение о постоянстве углов подъема синусоид на рабочих участках кривых (соединить вершины синусоид на плоской развертке прямыми), то получим среднее значение угла подъема кривых. При этом тангенсы средних углов подъема  $\alpha_{1cp}$  и  $\alpha_{3cp}$  определяются как отношения амплитуды к отрезку средней линии, длина которого кратна числу периодов. Таким образом,

$$\alpha_{icp} = \operatorname{arctg}\left(\frac{2Z_i A}{\pi R_i}\right), \quad (4.14)$$

где  $i$  – номер звена (1 – внутренний кулачок, 3 – наружный кулачок).

Максимальные значения углов наклона кривых  $\alpha_{1max}$  и  $\alpha_{3max}$  определяются при подстановке  $\cos(Z_i \varphi_r) = 1$  в выражение (4.10).

$$\alpha_{imax} = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z_i A}{R_i}\right). \quad (4.15)$$

Для однопериодной синусоиды максимальный угол наклона кривой является углом наклона плоскости, в которой расположен эллипс по отношению к плоскости  $xOy$ .

#### ***4.2 Исследование ППТК с кривыми, расположенными на различных поверхностях***

Переход от уравнений кривой на цилиндре к уравнениям на конусе осуществляется посредством поворота образующих на угол  $\chi$  относительно точек, лежащих на средней окружности, в плоскостях, где расположены соответствующие образующие и ось  $Oz$  (рисунок 4.4). На рисунке 4.4 позицией 1 обозначен след цилиндрической поверхности на плоскости  $xOz$ , а позицией 2 – след конической поверхности.

Пусть периодическая кривая задана уравнением развертки на плоскость  $z = f(s)$ , а амплитуда кривой  $A$  равна отрезку  $MD$  или  $M'D$  (см. рисунок 4.4).

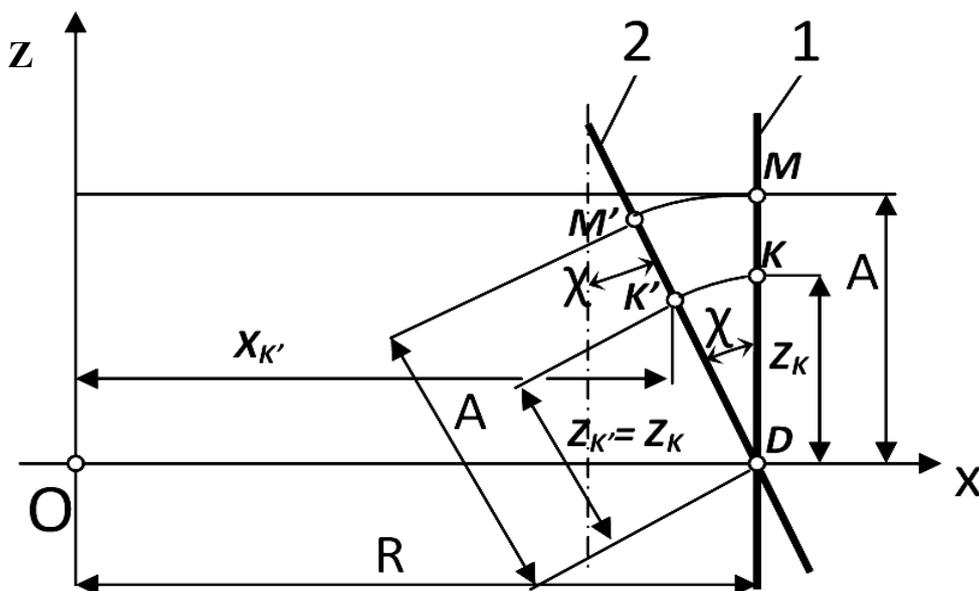


Рисунок 4.4 – К выводу уравнений конической кривой

Параметрические уравнения конической кривой:

$$x_{con}(s) = (R - f(s) \sin \chi) \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.16)$$

$$y_{con}(s) = (R - f(s) \sin \chi) \sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.17)$$

$$z_{con}(s) = f(s) \cos \chi. \quad (4.18)$$

В [162] рассматривается взаимодействие тел качения и конической поверхности, однако в данном случае речь идет о рабочей поверхности кулачка, а не о поверхности расположения траекторий тел качения.

При угле  $\chi = 0$  ( $\pi$ ) коническая кривая вырождается в цилиндрическую кривую с известными параметрическими уравнениями:

$$x_{cyl}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad y_{cyl}(s) = R \sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad z_{cyl}(s) = f(s).$$

При угле  $\chi = \pi/2$  коническая кривая вырождается в известную плоскую кривую с параметрическими уравнениями [107]:

$$x_{pl}(s) = (R - f(s))\cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad y_{pl}(s) = (R - f(s))\sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad z_{pl}(s) = 0.$$

Переход от уравнений кривой на цилиндре к уравнениям на сфере осуществляется следующим образом. Пусть периодическая цилиндрическая кривая задана системой параметрических уравнений  $x = R\cos(s/R)$ ,  $y = R\sin(s/R)$ ,  $z = z(s)$ , где  $s$  – изменяемый от 0 до  $2\pi R$  параметр, выполняющий функцию дуговой координаты, а амплитуда кривой  $A$  равна отрезку  $DC$  или длине дуги  $D'C$  (рисунок 4.5).

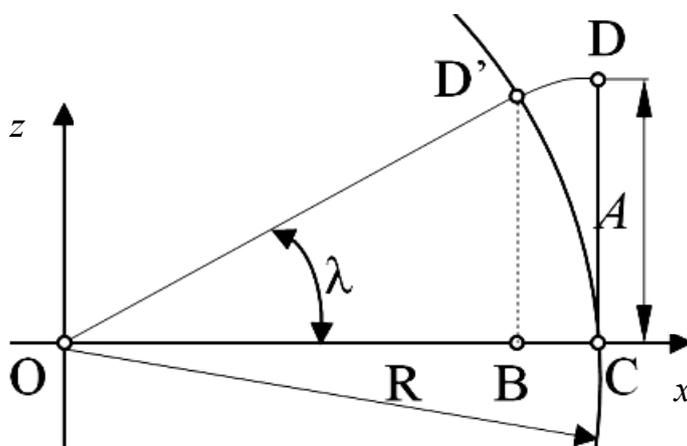


Рисунок 4.5 – Схема для прямого и обратного перехода от уравнений цилиндрической к уравнениям сферической кривой

Преобразования цилиндрической кривой в сферическую осуществляется посредством угла  $\lambda$  (см. рисунок 4.5) согласно выражению  $\lambda(s) = z(s)/R$ .

Параметрические уравнения сферической кривой:

$$z_{sf}(s) = R \sin \lambda = R \sin\left(\frac{z(s)}{R}\right); \quad (4.19)$$

$$x_{sf}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \cos \lambda = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{z(s)}{R}\right); \quad (4.20)$$

$$y_{sf}(s) = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cos \lambda = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{z(s)}{R}\right). \quad (4.21)$$

Для цилиндрической синусоиды с уравнением координаты  $z = A \sin(Zs/R)$ , которое также является уравнением плоской развертки (на плоскость  $sOz$ ), параметрические уравнения:

$$x = R \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad y = R \sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad z = A \sin\left(\frac{Zs}{R}\right). \quad (4.22)$$

Следовательно, параметрические уравнения сферической синусоиды примут следующий вид:

$$x_{sf}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{A}{R} \sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right); \quad (4.23)$$

$$y_{sf}(s) = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{A}{R} \sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right); \quad (4.24)$$

$$z_{sf}(s) = R \sin\left(\frac{A}{R} \sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right). \quad (4.25)$$

В [163] также отмечается, что были получены уравнения кривой на сфере, однако в указанной работе они не приведены. Схема механической передачи [164], реализующей уравнения (4.23)–(4.25), показана на рисунке 4.6.

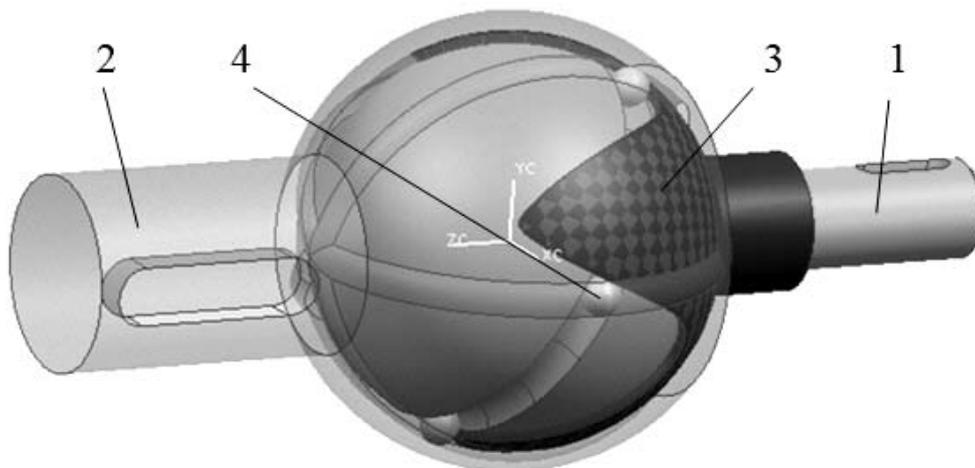


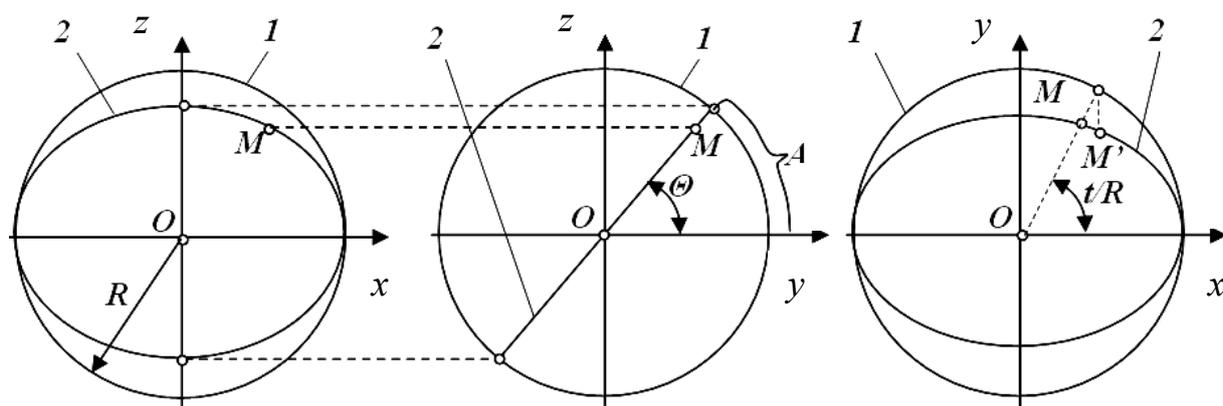
Рисунок 4.6 – Сферическая планетарная шариковая передача

Подтверждено сохранение постоянства углового шага между точками пересечения (в пределах группы) для сферических поверхностей аналитически на основе гомеоморфизма цилиндрических и сферических поверхностей и посредством моделирования зацепления в различных САПР.

Передача (рисунок 4.6) содержит ведущий вал 1 со сферическим внутренним кулачком с замкнутой беговой дорожкой, коаксиально внутреннему кулачку располагается наружный торцовый кулачок 3 с волнообразной торцовой поверхностью и выходной вал 2 с пазами на внутренней сферической поверхности. Данные пазы расположены в плоскостях, проходящих через ось передачи с равномерным угловым шагом. При вращении входного вала тела качения 4 перемещаются по беговой дорожке внутреннего кулачка на входном валу, по рабочим поверхностям наружного кулачка и вдоль пазов выходного вала, вынуждая его вращаться с редукцией.

Наружный кулачок 3 закреплен в корпусе (который на рисунке 4.6 не показан), а входной и выходной валы размещены в корпусе на подшипниковых опорах с консольным расположением сферических поверхностей.

Рассмотрим обратную задачу. Предположим, существует сферическая кривая, образованная как след плоскости, проходящей через начало координат  $O$ , через одну из осей ( $Ox$  или  $Oy$ ) и образующей с другой осью угол  $\theta$  (рисунок 4.7).



1 – поверхность сферы; 2 – след плоскости

Рисунок 4.7 – К определению уравнений следа плоскости на сфере

Данный след будет представлять собой окружность, образованную поворотом средней (лежащей в плоскости  $xOy$ ) окружности-прообраза с уравнениями  $\{x = R \cos(s/R), y = R \sin(s/R), z = 0\}$ . Если наклон плоскости осуществлен по отношению к оси  $Oy$ , то в результате поворота происходит следующее преобразование уравнений кривой: поскольку осуществляется поворот относительно оси  $Ox$ , преобразования координаты  $x$  не происходит, т. е.  $x' = R \cos(s/R)$ ; в плоскости  $yOz$  проекция отрезка  $OM$  ( $M$  – произвольная точка) на ось  $Oy$  поворачивается на угол  $\theta$ . Пусть точка  $M$  на окружности-прообразе имеет координаты  $(x_M, y_M)$ , тогда после поворота ее координаты примут вид:  $y'_M = y_M \cos \theta = R \sin(s/R) \cos \theta$ ,  $z'_M = y_M \sin \theta = R \sin(s/R) \sin \theta$ .

Таким образом, параметрические уравнения кривой, образованной как след плоскости на сферической поверхности, определяются по уравнениям:

$$\begin{aligned} x_{sf} &= R \cos(s/R); & y_{sf} &= R \sin(s/R) \cos \theta; \\ z_{sf} &= R \sin(s/R) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Угол  $\theta$ , в отличие от угла  $\gamma$ , зависящего от параметра  $s$  (см. рисунок 4.4), имеет фиксированное значение и равен  $\theta = A/R$ .

Уравнения (4.26) не в полной мере сопоставимы с уравнениями (4.16)–(4.18). Наличие множителя-коэффициента  $\cos \theta$  во втором уравнении системы (4.26) приводит к определению при заданном значении параметра  $s$  координаты точки  $M$  (см. рисунок 4.7), проекция которой на плоскость  $xOy$  не лежит на луче, исходящем из центра  $O$  под углом  $s/R$  к оси  $Ox$ . Однако очевидно, что проекция окружности, описываемой уравнениями (4.26), на плоскость  $xOy$  будет представлять собой эллипс, уравнение которого

$$\frac{x_{sf}^2}{R^2} + \frac{y_{sf}^2}{R^2 \cos^2 \theta} = 1. \quad (4.27)$$

При этом  $y_{sf} = x_{sf} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{s}{R} \right)$ ; после преобразований

$$x_{sf} = \frac{R \cos \theta \cdot \cos \left( \frac{s}{R} \right)}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \left( \frac{s}{R} \right) + \sin^2 \left( \frac{s}{R} \right)}}. \quad (4.28)$$

Выразив  $y_{sf}$  из уравнения (4.27), подставив в него значение  $x_{sf}$  из выражения (4.28) и произведя необходимые преобразования, получим

$$y_{sf} = \frac{R \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right)}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{R}\right)}}. \quad (4.29)$$

Подставив выражения (4.28) и (4.29) в уравнение сферы  $x_{sf}^2 + y_{sf}^2 + z_{sf}^2 = R^2$ , выразим значение координаты  $z_{sf}$ :

$$z_{sf} = \frac{R \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right)}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{R}\right)}}. \quad (4.30)$$

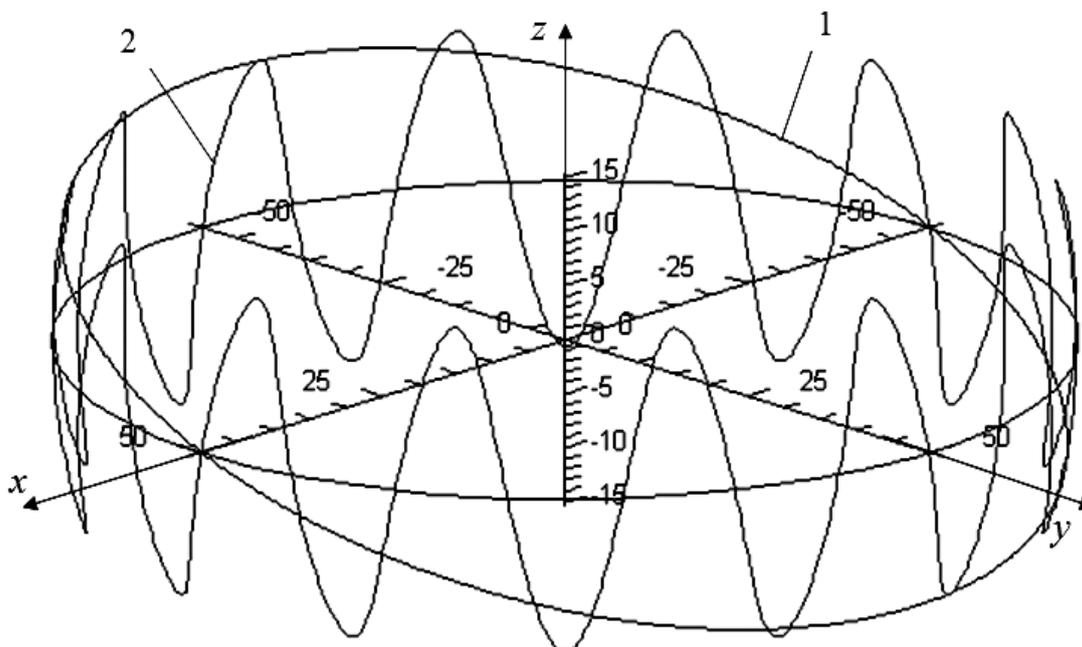
Таким образом, параметрические уравнения рассматриваемой сферической кривой, помимо уравнений (4.26), также можно представить в виде выражений (4.28)–(4.30). Если рассматривать эту кривую как однопериодную, преобразовав вышеуказанные уравнения, можно получить уравнения, описывающие семейство многопериодных кривых данного типа:

$$x_{sf} = \frac{R \cos\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{Zs}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{Zs}{R}\right)}}; \quad (4.31)$$

$$y_{sf} = \frac{R \cos\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{Zs}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{Zs}{R}\right)}}; \quad (4.32)$$

$$z_{sf} = \frac{R \sin\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{Zs}{R}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{A}{R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{Zs}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{Zs}{R}\right)}}. \quad (4.33)$$

Схема взаимодействия двух сферических кривых показана на рисунке 4.8.



1 – однопериодная кривая; 2 – четырнадцатипериодная кривая

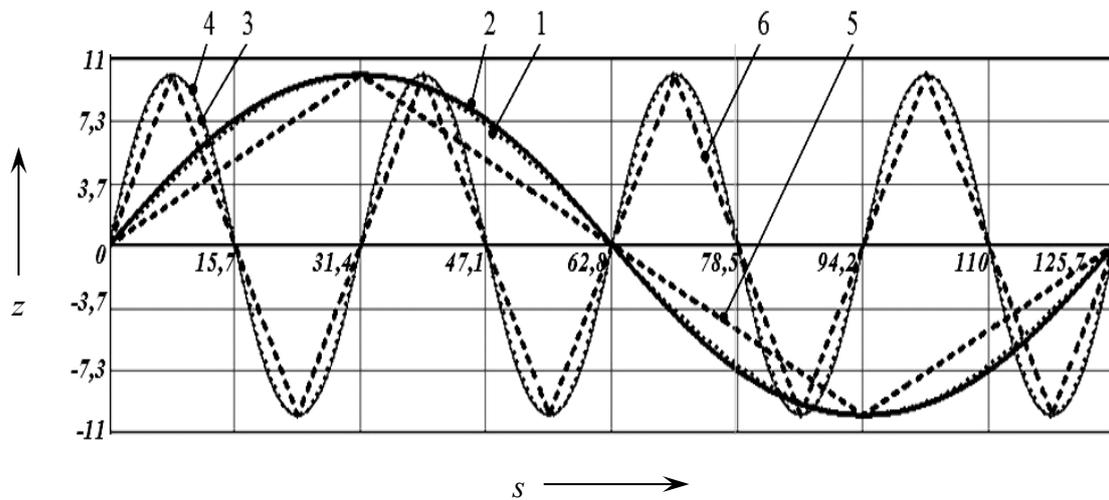
Рисунок 4.8 – Сферические кривые

Исследовать свойства пространственных кривых удобно с помощью уравнения развертки на плоскость. Чтобы получить уравнение плоской развертки исследуемой кривой, необходимо согласно уравнению (4.16) произвести следующие преобразования:

$$z(s) = R \arcsin \left( \frac{z_{sf}(s)}{R} \right) =$$

$$= R \arcsin \left( \frac{\sin \left( \frac{A}{R} \right) \cdot \sin \left( \frac{Zs}{R} \right)}{\sqrt{\cos^2 \left( \frac{A}{R} \right) \cdot \cos^2 \left( \frac{Zs}{R} \right) + \sin^2 \left( \frac{Zs}{R} \right)}} \right). \quad (4.34)$$

Сравним три типа однопериодных ( $Z = 1$ ) и многопериодных ( $Z = 4$ ) кривых (рисунок 4.9) с одинаковыми параметрами:  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм.



1, 2 – однопериодные синусоида и кривая по уравнению (4.34); 3, 4 – многопериодные синусоида и кривая по уравнению (4.34); 5, 6 – однопериодная и многопериодная кусочно-винтовые кривые

Рисунок 4.9 – Плоские развертки различных кривых

Кусочно-винтовые кривые на сфере описываются параметрическими уравнениями:

$$x_{sf}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{2A}{\pi R} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right)\right); \quad (4.35)$$

$$y_{sf}(s) = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cos\left(\frac{2A}{\pi R} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right)\right); \quad (4.36)$$

$$z_{sf}(s) = R \sin\left(\frac{2A}{\pi R} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right)\right). \quad (4.37)$$

Уравнение плоской развертки кусочно-винтовой кривой:

$$z = \frac{2A}{\pi} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right). \quad (4.38)$$

Как видно из рисунка 4.9, разница между синусоидой и кривой, описываемой уравнением (4.34), при данных геометрических параметрах минимальна, однако существует. Анализ показал, что изменение абсолютного значения разности между значениями координат  $z$  этих кривых от параметра  $s$  носит периодический характер.

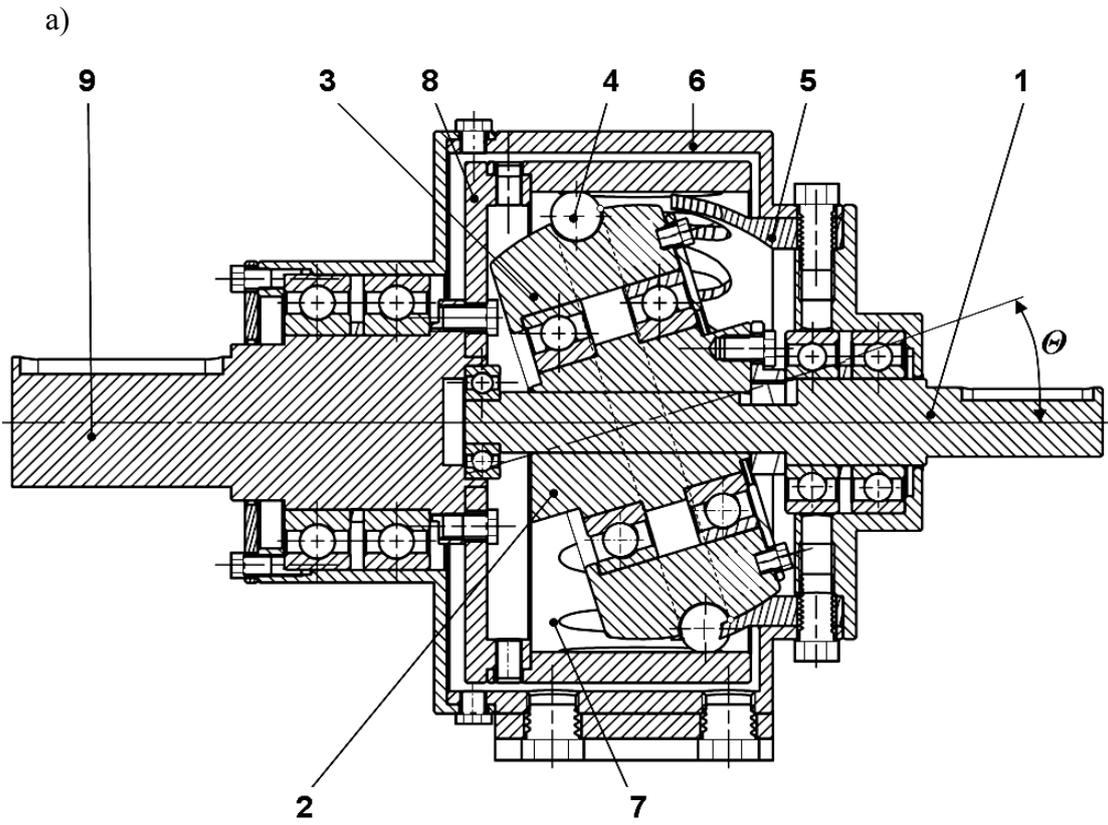
Одна из конструкций сферической планетарной шариковой передачи (СПШП) представлена на рисунке 4.10, а. При вращении входного вала 1 вращается жестко закрепленный на нем эксцентрик 2, а также внутренний кулачок 3. По кольцевому пазу внутреннего кулачка перемещаются тела качения 4, которые контактируют с торцовыми рабочими поверхностями наружного кулачка 5, который жестко закреплен в корпусе 6. Под действием наложенных связей тела качения также перемещаются вдоль пазов вала 7, вынуждая его вращаться с редукцией. Пазы на валу 7 выполнены при помощи сферической фрезы и располагаются на внутренней цилиндрической поверхности с равномерным угловым шагом. Вал с пазами 7 посредством диска 8 соединен с выходным валом 9.

Механическая передача, реализованная в редукторе с передаточным отношением, равным 15, созданная на основе взаимодействия кривых, описанных уравнениями (4.31)–(4.34), показана на рисунке 4.10, б.

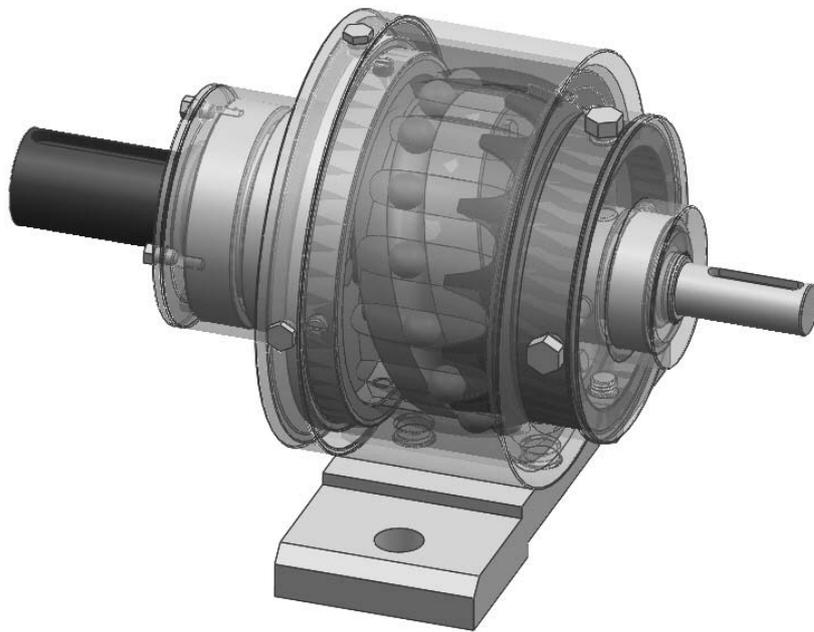
Отличие конструкции редуктора на рисунке 4.10, б от конструкции передачи, представленной на рисунке 4.6, заключается в повышении технологичности изготовления отдельных деталей. В обоих случаях изготовление многопериодной кулачковой поверхности должно производиться на фрезерных станках с ЧПУ. Однако однопериодная синусоида на сфере не является окружностью, а значит, изготовление этой беговой дорожки также сопряжено с необходимостью изготовления ее на станках с ЧПУ, в отличие от передачи на рисунке 4.10, б, где на внутреннем кулачке изготовлена беговая дорожка в виде кольцевого паза, которая может быть выполнена на универсальных станках токарной группы. Внутренний кулачок при этом располагается на валу с осью, наклоненной по отношению к оси  $Oz$  на угол  $\theta$ .

### ***4.3 Исследование и синтез уравнений взаимодействующих кривых различных типов***

Синусоидальная форма беговых дорожек была одной из первых, используемых в планетарных шариковых передачах, разрабатываемых в г. Могилеве. Однако она имеет ряд недостатков, один из которых – явление заострения вершин (подробно рассмотренное далее), вследствие чего нарушается постоянство контакта тел качения на вершинах синусоид, что приводит к увеличению шума и динамических нагрузок в передаче при высоких скоростях.



б)



а – конструкция редуктора; б – 3D-модель редуктора

Рисунок 4.10 – Планетарный сферический шариковый редуктор

В [107] приводятся уравнения других видов кривых – гладко-кусочных функций, в частности циклоиды, спирали Архимеда, винтовой линии, сопряженных полуокружностей. Данные уравнения располагают кривые на плоскости с центральной линией в виде окружности. Преимущества кривых были рассмотрены в указанном источнике только с точки зрения исследования жестких и мягких ударов тел качения на вершинах: проанализированы изменения скоростей и ускорений. В [107] также отмечено, что постоянство углового шага обеспечивается только при сопряжении кривых одного типа.

Нами были получены параметрические уравнения, позволяющие построить и проанализировать некоторые кривые на плоскости и в пространстве.

Для кусочно-винтовой линии (совокупности чередующихся нисходящих и восходящих участков отрезков прямых) на плоскости

$$z_i = \text{sign}\left(-\sin\left(\frac{Z_i s}{R}\right)\right) \left( -2AZ_i \left( \left( s - \left[ \frac{Z_i s}{\pi R} \right] \cdot \frac{\pi R}{Z_i} \right) / \pi R \right) + A \right),$$

$$s = 0 \dots 2\pi R, \quad (4.39)$$

где  $i$  – номер кривой (1 или 3).

Квадратными скобками в выражении (4.39) обозначена математическая операция, выделяющая целую часть числа.

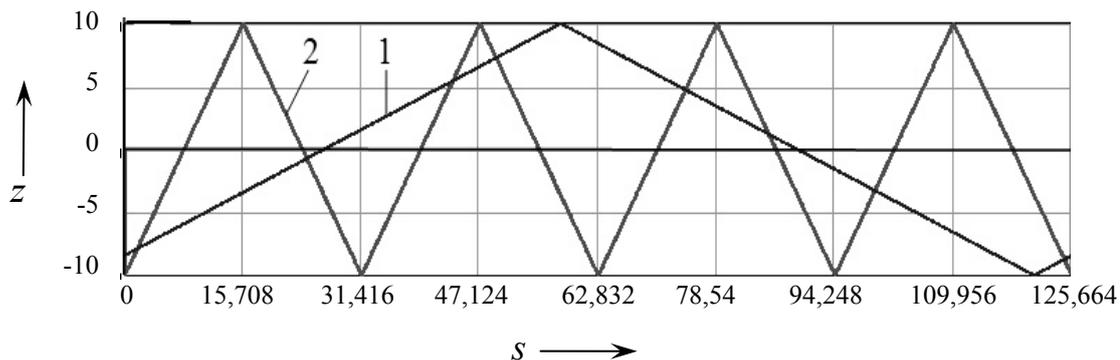
На рисунке 4.11 приведена схема взаимодействия двух кусочно-винтовых линий (однопериодной и четырехпериодной).

Движение одной линии относительно другой вдоль оси абсцисс обеспечивается заменой для однопериодной кривой в уравнении (4.25) параметра  $s$  на  $(s \pm \Delta)$ , где  $\Delta$  – изменяемый с некоторым шагом аргумент.

Кусочно-винтовая линия в пространстве опишется следующей системой параметрических уравнений ( $s$  – изменяемый от 0 до  $2\pi R$  параметр):

$$x = R \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad y_i = R \sin\left(\frac{s}{R}\right);$$

$$z_i = \text{sign}\left(-\sin\left(\frac{Z_i s}{R}\right)\right) \left( -2AZ_i \left( \frac{s - \left[ \frac{Z_i s}{\pi R} \right] \cdot \frac{\pi R}{Z_i}}{\pi R} \right) + A \right). \quad (4.40)$$



1 – однопериодная кривая; 2 – многопериодная кривая

Рисунок 4.11 – К взаимодействию винтовых линий

Аналогично рассмотрим уравнения кривой с профилем, в котором кривые представляют собой сочетание дуг окружностей, на плоскости (рисунок 4.12). При этом уравнение многопериодной кривой [165] представлено как

$$z_3 = (-1)^{\left[\frac{s}{2R_0} + 1\right]} \sqrt{R_0^2 - \left( s - 2R_0 \left( \left[ \frac{s}{R_0} + 1 \right] - 1 \right) - R_0 \right)^2}, \quad (4.41)$$

где  $R_0$  – радиус сопрягаемых полуокружностей.

Параметрические уравнения, описывающие пространственную кривую:

$$x_3 = R \cos(s/R); \quad y_3 = R \sin(s/R);$$

$$z_3 = (-1)^{\left[\frac{s}{2R_0} + 1\right]} \sqrt{R_0^2 - \left( s - 2R_0 \left( \left[ \frac{s}{R_0} + 1 \right] - 1 \right) - R_0 \right)^2}. \quad (4.42)$$

Значение  $R_0$  фактически выполняет функцию амплитуды, однако, в отличие от синусоиды, значения числа периодов  $Z_3$ , радиуса образующей цилиндра  $R$  и амплитуды  $A$  для круглого профиля взаимозависимы и не могут назначаться произвольно.

Процедуру выбора этих параметров для многопериодного зацепления представим в виде следующего алгоритма. Исходным является значение числа периодов  $Z_3$ , которое определено передаточным отношением. Из условия минимизации потерь мощности на трение сколь-

жения определяем оптимальное значение амплитуды (раздел 6) и приравниваем его радиусу  $R_0$ . Радиус окружности, образующей цилиндрическую поверхность, определяем по формуле

$$2\pi R = 4ZR_0 \Rightarrow R = 2Z_3 R_0 / \pi R. \quad (4.43)$$

Оцениваем значение полученного радиуса, округляем его до целого значения. Далее необходимо окончательно уточнить радиус  $R_0$ . В случае ограниченности диаметральных габаритов передачи значение  $R$  может задаваться изначально. Тогда

$$A = R_0 = \pi R / 2Z_3. \quad (4.44)$$

Предположим, что сопряженный с многопериодным однопериодный профиль также будет представлять сочетание двух дуг окружностей. Радиус этих дуг определится из следующего уравнения:

$$\left( \frac{2\pi R}{4Z_3} \right)^2 = (2R_1 - A)A \Rightarrow R_1 = \frac{\pi^2 R^2}{8A} + \frac{A}{2}. \quad (4.45)$$

Уравнение однопериодного профиля в системе координат  $sOz$  будет описано следующим образом:

$$z_1 = (-1)^{\left[ \frac{s}{\pi R} \right]} \sqrt{R_1^2 - \left( s - \frac{\pi R}{2} - \left[ \frac{s}{\pi R} \right] \pi R \right)^2} - (-1)^{\left[ \frac{s}{\pi R} \right]} (R_1 - A). \quad (4.46)$$

На рисунке 4.12 показано взаимодействие двух кривых, составленных из участков дуг окружностей.

Исследование взаимодействия двух кривых осуществлялось по следующему алгоритму. Численными методами решались два уравнения, описывающие однопериодную и многопериодную кривые. При этом задавалось два интервала для локализации корней. Например, для кривых, изображенных на рисунке 4.12, это интервалы:  $\{2\pi R/10 \ 6\pi R/10\}$ ,  $\{6\pi R/10 \ \pi R\}$ . Определяемая разница между найденными корнями показывает расстояние между двумя точками пересечения кривых (первой группы). Далее аргументу в уравнении однопериодной кривой задавалось приращение, вследствие чего кривая начинала перемещаться вдоль оси  $Os$ . Процедура определения корней повторялась.

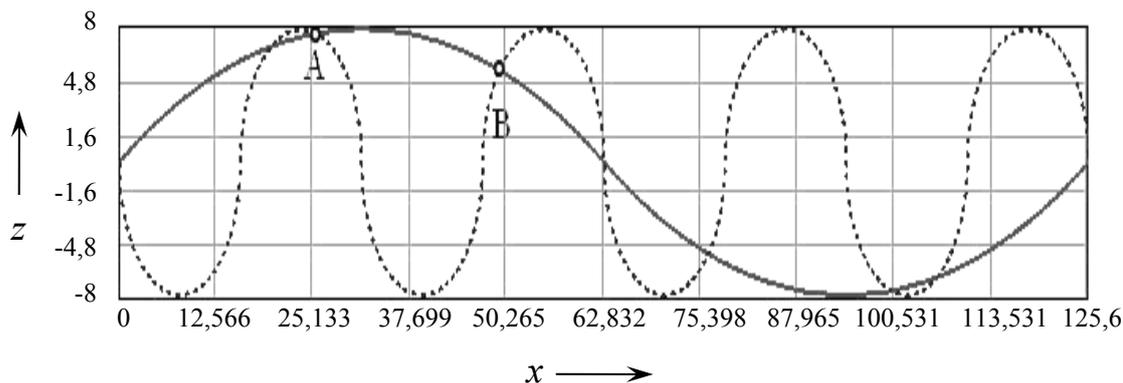
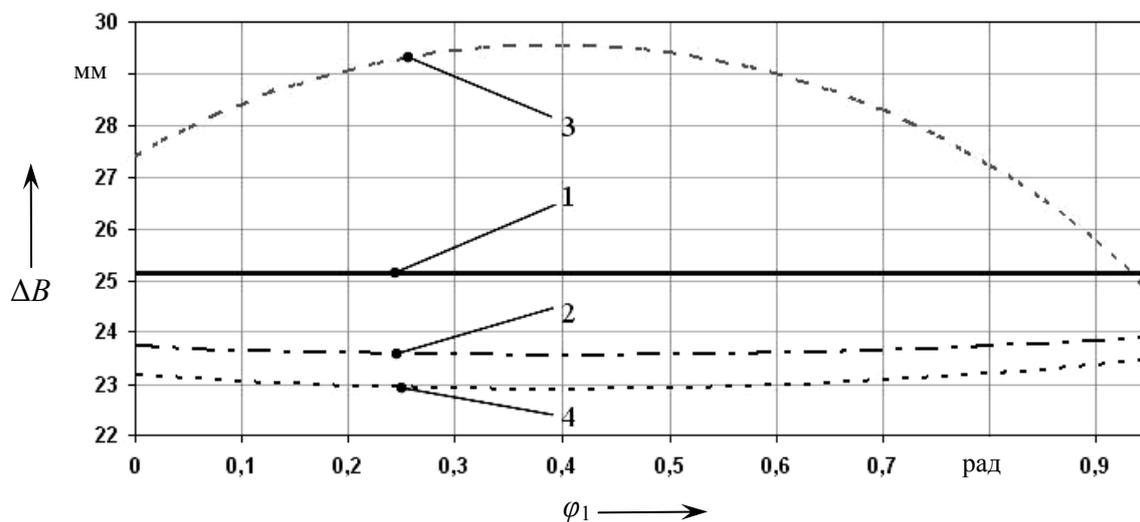


Рисунок 4.12 – Взаимодействие кривых с «круглым» профилем

Исследования проводились не только для двух кривых в виде сопряженных дуг окружностей, но и для многопериодной кривой, состоящей из сопряженных дуг окружностей и взаимодействующей с другими типами кривых. При этом использовалась передача с параметрами:  $R = 20$  мм,  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ . На рисунке 4.13 показаны результаты анализа. Постоянство и равенство углового шага между точками пересечения обеспечивается для сопряженных кривых одного типа – двух синусоид и двух кусочно-винтовых линий [166].



1 – две синусоиды (две кусочно-винтовые линии); 2 – две кривые, образованные дугами окружностей; 3 – кусочно-винтовая линия и кривая, образованная дугами окружностей; 4 – синусоида и кривая, образованная дугами окружностей

Рисунок 4.13 – Изменение расстояния между точками пересечения различных типов сопрягаемых кривых

Две кривые, образованные дугами окружностей, не обеспечивают постоянство углового шага при изменении угла поворота ведущего вала с однопериодной кривой. На рисунке 4.13 показано изменение расстояния между двумя точками пересечения  $A$  и  $B$  (рисунок 4.12) при повороте ведущего вала от  $0$  до  $9^0$ . При этом расстояние между точками пересечения  $A$  и  $B$  в начальный момент составляло 23,734 мм, а между точкой  $A$  и точкой пересечения первой группы, расположенной левее (начало координат), – 25,557 мм (т. е. не обеспечивается равенство углового шага).

Аналогичная ситуация наблюдалась и при взаимодействии кривых разных типов, в частности многопериодной кривой, составленной из дуг окружностей с кусочно-винтовой линией и синусоидой.

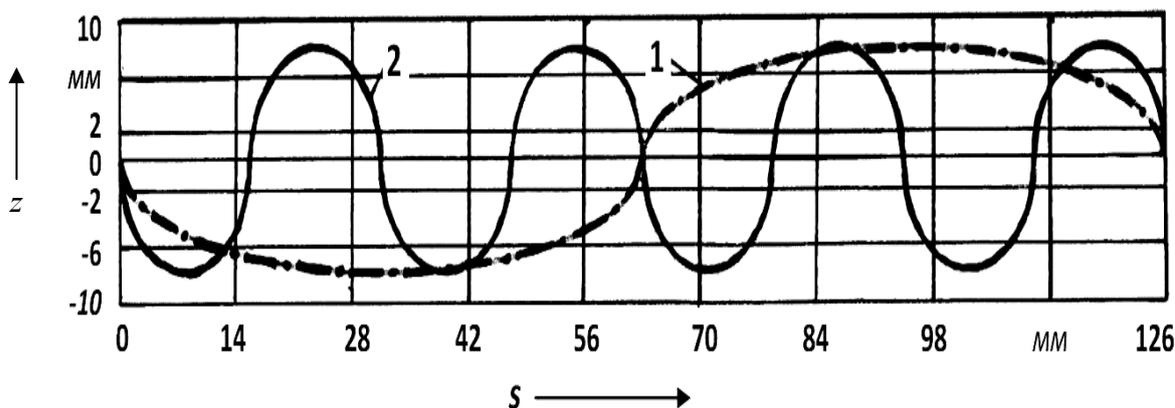
**Алгоритм синтеза взаимодействующих кривых.** Целью синтеза является получение уравнения однопериодной кривой на плоской развертке, обеспечивающего постоянство передаточного отношения при взаимодействии с заданной многопериодной кривой. Исходные данные – уравнение многопериодной кривой на плоскости  $z = f(s)$  и число периодов многопериодной кривой  $Z_3$ .

Исследуем один период многопериодной кривой с заданным уравнением  $z_3 = f(s)$ . Постепенно изменяем аргумент ( $s$ ) с постоянным шагом. При этом на каждом шаге вычисляем координаты однопериодной кривой по формулам:  $s'_1 = s \cdot Z_3$ ;  $z'_1 = z$ .

Действуя по вышеприведенному алгоритму, было получено уравнение однопериодной кривой, сопряженной с многопериодной кривой, состоящей из сопряженных дуг окружности. Взаимодействие этих кривых показано на рисунке 4.14.

Дальнейшей задачей исследований было определение аналитической зависимости для построения кривой 2. Было предположено, что данная кривая представляет собой сочетание ветвей эллипсов с полуосями  $\pi R/2$  и  $R_0$ . Данная гипотеза подтвердилась. Было получено уравнение кривой эллипсовидной формы [166]:

$$z_1 = (-1)^{\left[\frac{s}{\pi R} + 1\right]} \sqrt{R_0^2 - \frac{\left(s - \frac{L}{4} - \frac{L}{2} \left[\frac{s}{\pi R}\right]\right)^2 R_0^2}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}}, \quad \text{где } L = 2\pi R. \quad (4.47)$$



1 – однопериодная кривая; 2 – многопериодная кривая

Рисунок 4.14 – Взаимодействие кривой, образованной сочетанием ветвей эллипса, и кривой, представляющей сочетание сопряженных дуг окружностей

Проведенный анализ взаимодействия двух кривых (однопериодной эллипсовидной и многопериодной, состоящей из сопряженных дуг окружностей) подтвердил правильность зацепления: расстояния между точками пересечения остаются постоянными.

После упрощения зависимостей (4.41) и (4.47) были получены следующие параметрические уравнения в пространственной декартовой системе координат для рассматриваемого профиля для однопериодной цилиндрической кривой:

$$x_1 = R \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.48)$$

$$y_1 = R \sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.49)$$

$$z_1 = (-1)^{\left[\frac{s}{\pi R} + 1\right]} \cdot \frac{\pi R}{2Z} \sqrt{1 - \frac{4\left(s - \frac{\pi R}{2} - \pi R \left[\frac{s}{\pi R}\right]\right)^2}{\pi^2 R^2}}. \quad (4.50)$$

Многопериодная беговая дорожка (размещенная на цилиндрической поверхности) представляет собой сочетание сопряженных дуг окружностей и описана уравнениями:

$$x_2 = R \cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.51)$$

$$y_2 = R \sin\left(\frac{s}{R}\right); \quad (4.52)$$

$$z_2 = (-1)^{\left[\frac{Zs}{\pi R} + 1\right]} \sqrt{\frac{\pi^2 R^2}{4Z^2} - \left(s - \frac{\pi R}{Z} \left[\left[\frac{Zs}{\pi R} + 1\right] - 1\right] - \frac{\pi R}{2Z}\right)^2}. \quad (4.53)$$

Зацепление двух кривых, одна из которых на развертке представляет собой ветви эллипса (Э), а другая – сопряженные дуги окружностей (СДО), обозначим кратко – ЭСДО. Преимущества кривых зацепления в виде ЭСДО будут рассмотрены далее.

#### ***4.4 Искажение идеального профиля беговых дорожек под сателлиты и минимизация его влияния***

Уравнение (на плоской развертке) при смещении одной кривой зацепления относительно другой вдоль оси  $Oz$  на расстояние  $c$  будет следующим:  $z(s) = f(s) \pm c$ . Для определенности рассмотрим синусоидальные кривые и положительное смещение  $c$ . Тогда уравнение, определяющее точки пересечения кривых  $z_1(s) = z_3(s)$ , будет представлено в следующем виде:

$$A \sin Z_3 \varphi_2 + c - A \sin Z_1 (\varphi_2 + \varphi_1) = c', \quad (4.54)$$

где  $c'$  – расстояние вдоль оси  $Oz$  между некоторыми двумя точками обеих синусоид;

$\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота ведущего и ведомого валов соответственно.

Параметр  $c'$  был введен для тождественности уравнения (4.54) уравнению  $A \sin Z_3 \varphi_2 = A \sin Z_1 (\varphi_2 + \varphi_1)$ , решение которого уже получено. Выражение (4.54) будет тождественно известному уравнению только при условии  $c = c' = const$ .

Согласно доказанному тела качения можно заменить плунжерами стержневидной формы длиной  $c$ , равной длине смещения кривых вдоль оси  $Oz$  (размер  $c$  теоретически может быть произвольным).

Рассмотренные выше модели зацепления посредством промежуточных тел качения предполагали рассмотрение шариков (роликов) как

материальных точек. В реальности тело качения (шарик или ролик) имеет определенный диаметр.

Если на плоской развертке сместить одну из кривых зацепления вдоль оси  $Oz$  вверх и вниз на расстояние, равное радиусу тела качения, то образуется беговая дорожка, снизу и сверху ограниченная двумя образованными кривыми, параллельными кривой (назовем ее – *центральной кривой*). Можно сказать, что беговая дорожка была образована траекториями концов отрезка с длиной, равной диаметру тела качения, при перемещении центра этого отрезка по центральной кривой, причем отрезок все время оставался параллельным своему первоначальному положению и оси  $Oz$ . Однако перемещение тела качения с диаметром, отличным от нуля, по такой дорожке невозможно из-за заклинивания. Для формирования беговой дорожки под тело качения данный отрезок при перемещении должен быть все время перпендикулярным кривой. Перпендикулярность отрезка приводит к тому, что верхняя и нижняя границы беговой дорожки отличаются от центральной кривой и воспроизводят ее с искажением. При определенных геометрических параметрах данные кривые могут иметь петли – самопересечения.

Многие исследователи сталкивались с одним из проявлений искажения профиля при изучении профиля беговых дорожек на вершинах при движении центра круглого инструмента по многопериодной периодической кривой. Это явление, называемое самопересечением [106], подрезанием [70] или заострением вершин [68] беговых дорожек, уменьшает длину активных участков зацепления, снижает значение коэффициента перекрытия, что, в свою очередь, приводит к снижению нагрузочной способности и плавности работы передачи.

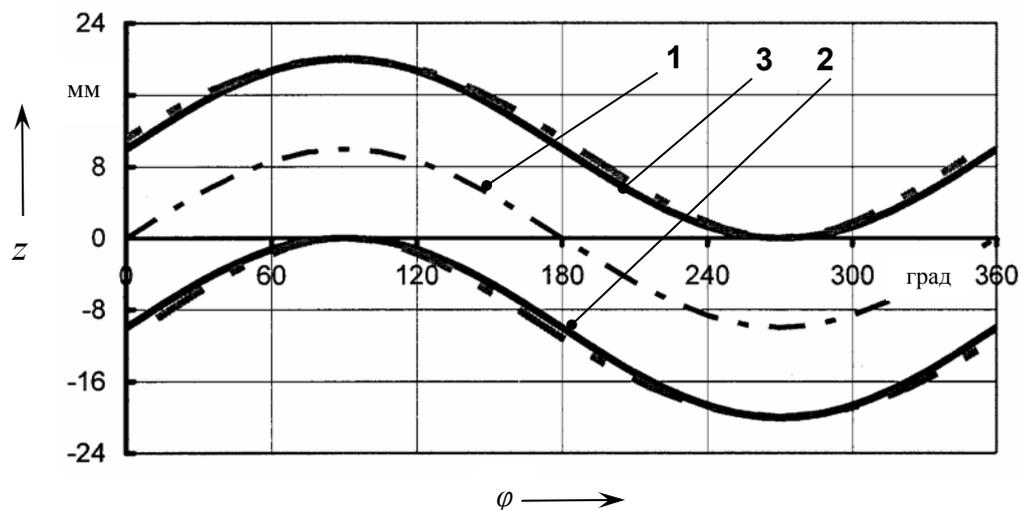
Рассмотрим явление искажения профиля у ППТК с синусоидальным профилем и оценим его количественно. Центр тела качения движется по однопериодной (центральной) синусоиде, описываемой известным уравнением  $z = A \sin(Z\varphi) = A \sin(Zs/R)$ . Угол плоской развертки  $\varphi$  изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ , параметр  $s$  – соответственно от 0 до  $2\pi R$  (рисунок 4.15).

Уравнения синусоидальных кривых (верхней и нижней границы беговой дорожки с идеальным профилем), смещенных относительно центральной кривой вдоль оси  $Oz$  на расстояние, равное радиусу тела качения:  $z_o^{s(n)} = A \sin(Z\varphi) \pm r_s = A \sin(Zs/R) \pm r_s$ .

Тело качения с радиусом  $r_s$ , центр масс которого перемещается по центральной синусоиде, формирует беговую дорожку с линиями, верхней

и нижней, которые являются огибающими множества положений тела качения (эквидистантами) и описываются в общем виде и для синусоид в частности соответствующими уравнениями:

$$z_p^{e(n)} = f(s) \pm r_s \cos \alpha = A \sin(Z\varphi) \pm r_s \cos \alpha = A \sin\left(Z \frac{s}{R}\right) \pm r_s \cos \alpha. \quad (4.55)$$



1 – центральная синусоида; 2 – беговая дорожка, образованная двумя синусоидами, смещенными вдоль оси передачи на расстояние  $\pm r_s$ ; 3 – беговая дорожка, формируемая телом качения

Рисунок 4.15 – К исследованию явления искажения профиля

Абсциссы  $x_p^e$  и  $x_p^h$ , соответствующие  $z_p^e$  и  $z_p^h$ , будут равны:

$$s_p^{e(n)} = s \pm r_s \sin \alpha. \quad (4.56)$$

Напомним, что  $\alpha = d(f(s))/ds$ . На рисунке 4.15 показаны беговая дорожка, образованная двумя синусоидами, смещенными относительно центральной синусоиды, и беговая дорожка, образованная движением шарика, для кулачка ППТК с параметрами:  $Z = 1$ ,  $A = 10$  мм,  $R = 10$  мм,  $r_s = 10$  мм.

Абсолютную линейную величину искажения профиля, измеренную по нормали к рабочим поверхностям, определяем как разность идеального (образованного двумя синусоидами) и реального профилей. Искажения профиля вдоль оси передачи, соответствующие абсциссам  $s_p^e$

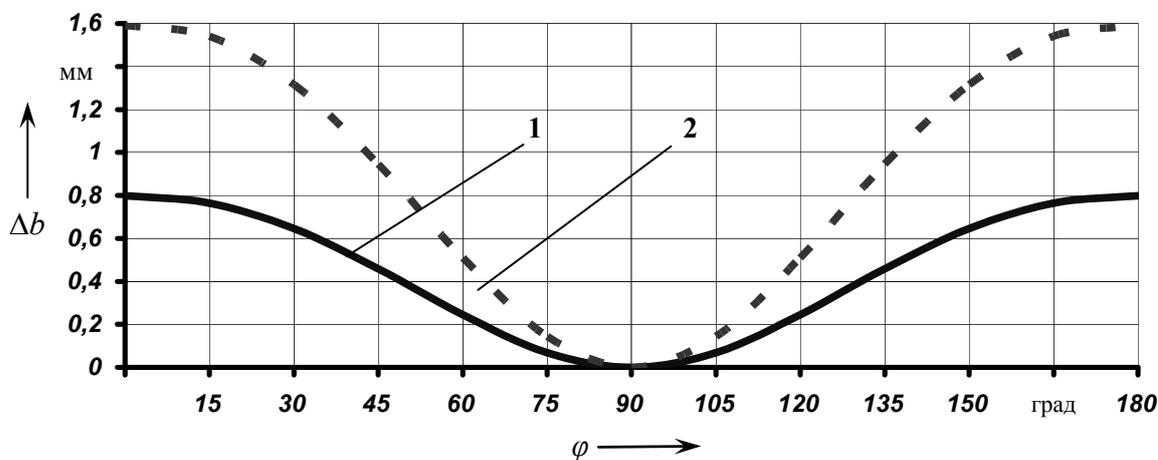
и  $s_p^H$ , можно определить для верхней и нижней границ беговой дорожки соответственно по формулам:

$$\Delta b^{6(H)} = A \sin(Zs/R) \pm r_s \cos \alpha - (A \sin(Z(s - r_s \sin \alpha)/R) \pm r_s). \quad (4.57)$$

Характер искажения профиля у верхней и нижней границ беговой дорожки аналогичен, поэтому проанализируем одно из выражений (для верхней границы):

$$\begin{aligned} \Delta b &= \left( A \sin \left( Z \frac{s}{R} \right) + r_s \cos \alpha - \left( A \sin \left( Z \frac{s - r_s \sin \alpha}{R} \right) + r_s \right) \right) \cos \alpha = \\ &= A \cos \alpha \left( \sin(Z\varphi) - \sin \left( Z \left( \varphi - \frac{r_s \sin \alpha}{R} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Результаты анализа выражения (4.58) для беговой дорожки с параметрами  $Z = 1$ ,  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм и различными значениями радиуса тела качения приведены на рисунке 4.16.



1 – для  $r_s = 4$  мм; 2 – для  $r_s = 8$  мм

Рисунок 4.16 – Зависимость искажения профиля от угла плоской развертки  $\varphi$

Анализ зависимости (4.58) и рисунка 4.16 свидетельствует о том, что максимальное искажение профиля наблюдается при максимальном значении угла подъема центральной синусоиды  $\alpha$  [167]. Очевидно, что искажение будет максимальным при  $\varphi = 0, \pi, 2\pi$  и т. д. Расчеты  $\Delta b_{\max}$

производились по формуле

$$\Delta b_{\max} = A \cos \alpha \cdot \sin(r_s \sin \alpha / R). \quad (4.59)$$

После подстановки в выражение (4.59) значения угла  $\alpha$  как функции от полярного угла  $\varphi$  получим

$$\Delta b_{\max} = A \cos \left( \arctg \left( \frac{A}{R} \right) \right) \cdot \sin \left( r_s \sin \left( \arctg \left( \frac{A}{R} \right) \right) / R \right). \quad (4.60)$$

Анализ выражения (4.60) свидетельствует о том, что влияние амплитуды и размера шарика однозначно. С их увеличением искажение профиля увеличивается. Увеличение размера цилиндрической поверхности имеет экстремум, после прохождения которого увеличение радиуса  $R$  уменьшает искажение профиля. Зависимость максимальной величины искажения профиля от амплитуды  $A$  линейная, а от радиусов цилиндра и шарика имеет вид кривых, изображенных на рисунке 4.17.

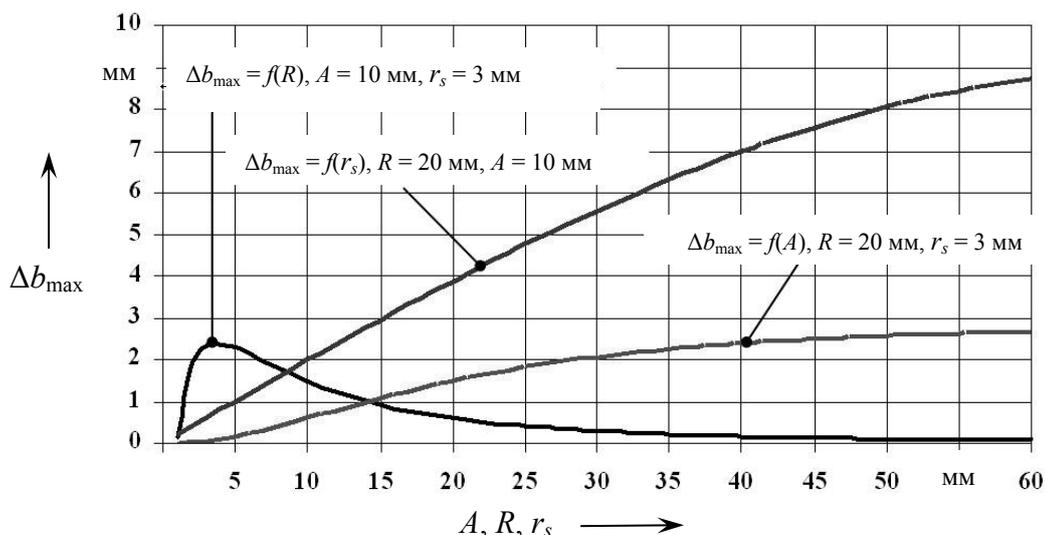


Рисунок 4.17 – Влияние параметров  $R$ ,  $r_s$ ,  $A$  на величину максимального искажения профиля

Исследования проводились при изменении одного из параметров и фиксированных значениях других параметров.

Так как шарик контактирует одновременно с двумя поверхностями, образующими беговую дорожку внутреннего кулачка, суммарная погрешность определится как:  $\Delta b_{\text{сум}} = 2\Delta b$ . Для шариковых передач в выражения (4.59) и (4.60) следует подставлять не реальный диаметр

шарика, а диаметр контактирующей с кулачками окружности  $d_{sk}$ , который по свойству хорд определяется согласно выражению:  $d_{sk} = 2\sqrt{(d_s - h)h}$ , где  $h$  – глубина канавки сферической формы под шарик на деталях передачи. Если принять  $h = 0,25d_s$ , то получаем зависимость  $d_{sk} = 0,866d_s$ .

Зависимость степени искажения от числа периодов можно наблюдать на рисунках 4.18 и 4.19.

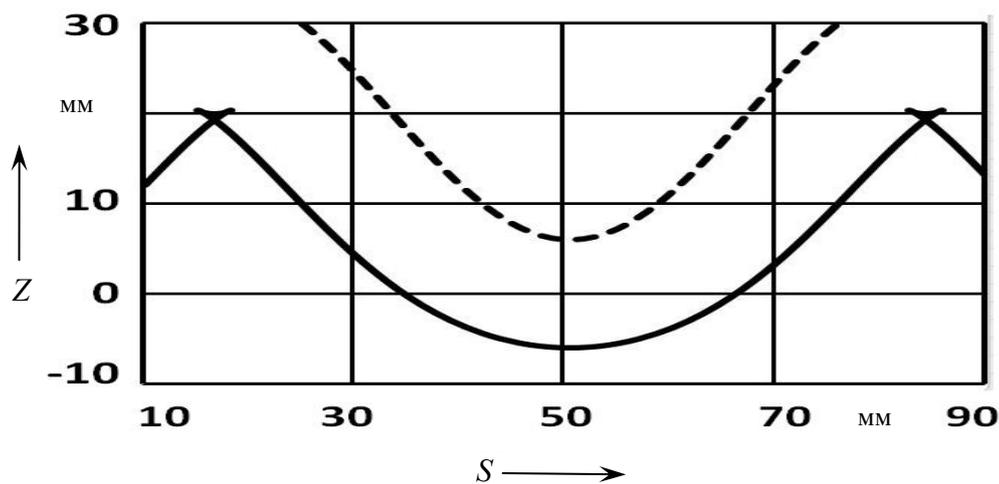


Рисунок 4.18 – Профиль кулачка многопериодной ППТК с числом периодов  $Z=4$

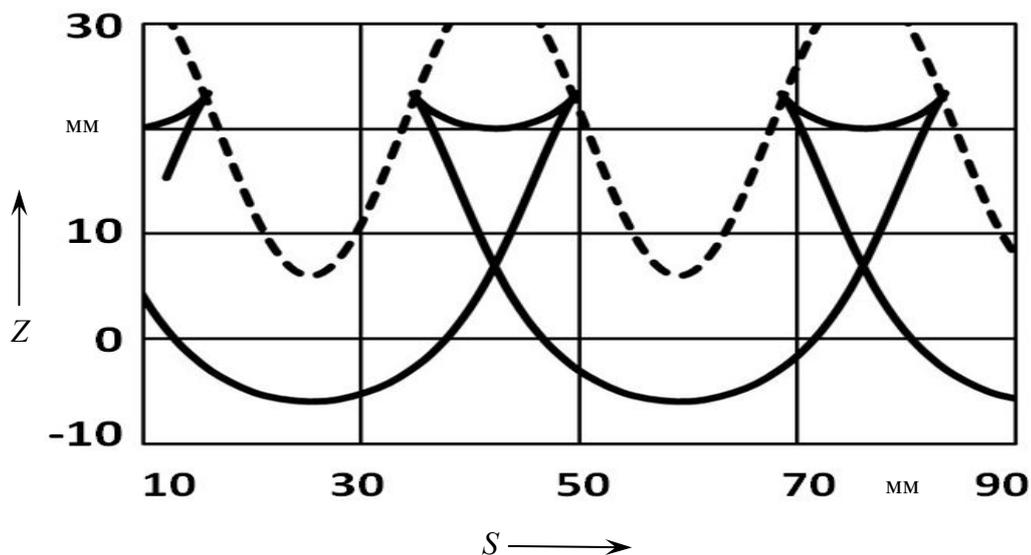


Рисунок 4.19 – Профиль кулачка многопериодной ППТК с числом периодов  $Z=8$

Здесь изображены развертки профиля, образующегося при движении центра цилиндрической фрезы радиусом, равным радиусу шарика ( $d_s = 26$  мм), по синусоидам с числом периодов  $Z = 4$  (см. рисунок 4.18) и  $Z = 8$  (см. рисунок 4.19), расположенным на цилиндрической поверхности радиусом  $D = 86$  мм. Сплошной линией показан образующийся профиль кулачка, прерывистой линией – развертка центральной синусоиды (траектория движения центра фрезы).

Самопересеченные области приводят к тому, что синусоидальный профиль на вершинах преобразуется в заостренный. Явление искажения профиля может приводить к ухудшению динамической картины зацепления и снижению нагрузочной способности передачи. Однако при незначительных искажениях работа передачи не ухудшится, т. к. на вершинах кривых тела качения в любом случае не передают нагрузку.

Использование передачи с беговыми дорожками, представляющими сочетание дуг окружностей (см. рисунок 4.14), обеспечивает отсутствие самопересечения профиля, хотя данное явление присутствует у одно-периодной кривой в ЭДСО-зацеплении.

#### 4.5 Определение скоростей и ускорений звеньев ППТК

Ведущее и ведомое звенья ППТК совершают вращательные движения с угловыми скоростями  $\omega_{вх}$  и  $\omega_{вых}$  соответственно, причем  $\omega_{вх} = u \omega_{вых}$ . В общем случае, принимая во внимание первую кинематическую схему, можно сказать, что тела качения, рассматриваемые как материальные точки, участвуют в сложном движении – относительном вдоль пазов звена 2 (выходного звена) и переносном вращательном вместе с выходным звеном.

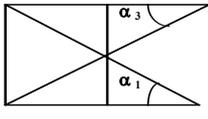
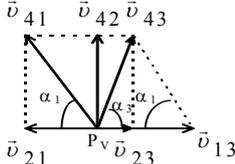
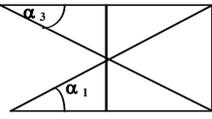
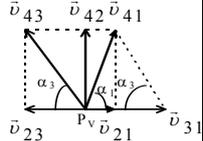
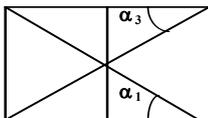
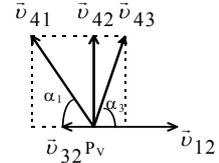
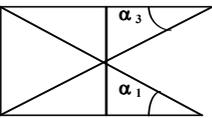
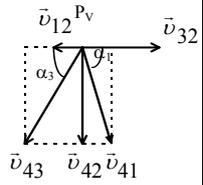
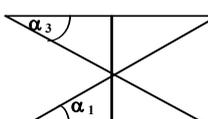
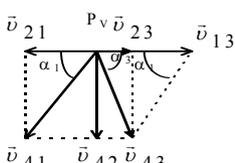
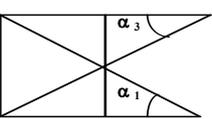
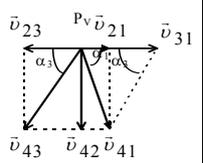
**Определение скоростей центров тел качения.** В таблице 4.2 для каждой кинематической схемы приведены план скоростей и схема взаимного расположения звеньев передачи, при котором строился соответствующий план скоростей (полус – точка  $p$ ). Определим скорости для зацеплений с постоянным передаточным отношением ( $u = \text{const}$ ). В таблице 4.3 приведены формулы для вычисления переносной и относительной скоростей центров тел качения для разных кинематических схем. Скорости представлены как функции угловой скорости ведущего звена ( $\vec{v}_{21}$  означает скорость перемещения звена 2 относительно звена 1).

Определим аналитически скорости центра масс сателлита при использовании первой кинематической схемы на примере синусоидальных кривых. Относительная скорость определяется как производная

по времени от уравнения движения шарика вдоль пазов относительно неподвижной кривой с угловой скоростью ведомого звена:

$$v_r = \frac{dz_3}{dt} = \frac{d(A \sin(Z_3 \varphi_2))}{dt} = \frac{d\left(A \sin\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right)\right)}{dt} = \frac{\omega_1 Z_3 A}{u} \cos\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right). \quad (4.61)$$

Таблица 4.2 – Планы скоростей для различных кинематических схем ППТК

Номер кинематической схемы	Взаимное расположение звеньев передачи	План скоростей	Номер кинематической схемы	Взаимное расположение звеньев передачи	План скоростей
1			4		
2			5		
3			6		

Примечание – Во всех случаях движение ведущего звена принято слева направо

Переносная скорость (скорость тела качения вместе с ведомым звеном):

$$v_e = \omega_2 R = \omega_1 R / u. \quad (4.62)$$

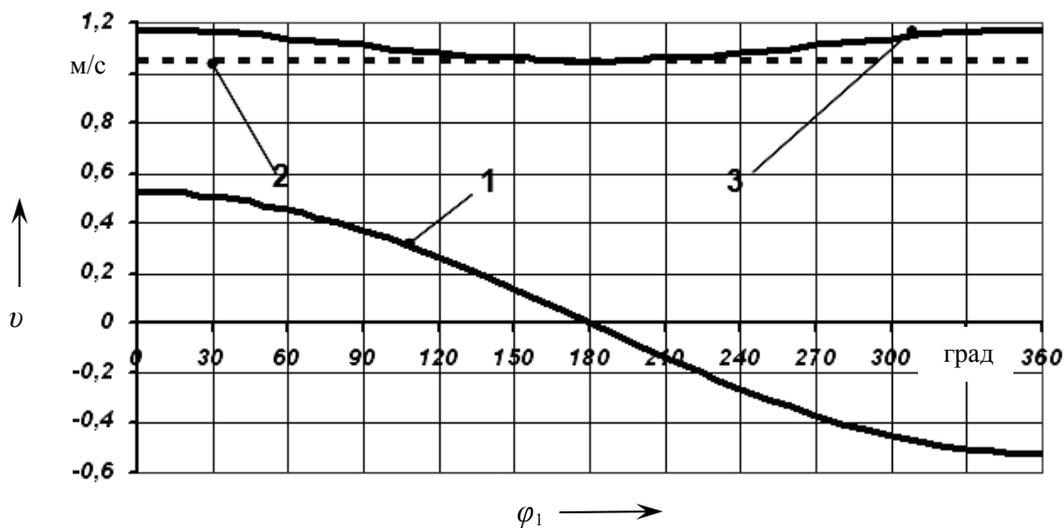
Абсолютная скорость (скорость шарика вместе с ведомым звеном) в общем случае и для первой кинематической схемы:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \frac{\omega_1}{u} \sqrt{A^2 Z_3^2 \cos^2\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) + R^2}. \quad (4.63)$$

Таблица 4.3 – Выражения для определения относительной и переносной скоростей тела качения для различных кинематических схем

Номер кинематической схемы	Относительная скорость	Переносная скорость	Номер кинематической схемы	Относительная скорость	Переносная скорость
1	$v_{42} = v_{13} \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_3}$	$v_{23}$	4	$v_{21} \operatorname{tg} \alpha_1$	$v_{21}$
2	$v_{42} = v_{12} \operatorname{tg} \alpha_1$	0	5	$v_{42} = v_{32} \operatorname{tg} \alpha_3$	0
3	$v_{42} = v_{23} \operatorname{tg} \alpha_3$	$v_{23}$	6	$v_{42} = v_{31} \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_3}$	$v_{21}$

Для первой кинематической схемы изменение скоростей центра масс тела качения за один оборот ведущего вала многопериодной ППТК приведены на рисунке 4.20 при следующих параметрах передачи:  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм,  $n_1 = 1000$  мин<sup>-1</sup>. Для остальных кинематических схем выражения для определения скоростей  $v_r$ ,  $v_e$  и  $v$  сведены в таблицу 4.4.



1 – относительная скорость  $v_r$ ; 2 – переносная скорость  $v_e$ ; 3 – абсолютная скорость  $v$

Рисунок 4.20 – Изменение скоростей тела качения от угла поворота ведущего вала

Таблица 4.4 – Выражения для определения скоростей тел качения ПТК с синусоидальным профилем кривых

Номер кинематической схемы	Относительная скорость $v_r$	Переносная скорость $v_e$	Абсолютная скорость $v$
1	$\frac{\omega_1 AZ_3}{u} \cos\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right)$	$\frac{\omega_1 R}{u}$	$\frac{\omega_1}{u} \sqrt{A^2 Z_3^2 \cos^2\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) + R^2}$
2	$\omega_1 AZ_1 \cos(Z_1 \varphi_1)$	0	$\omega_1 AZ_1 \cos(Z_1 \varphi_1)$
3	$\omega_2 AZ_3 \cos(Z_3 \varphi_2)$	$\omega_2 R$	$\omega_2 \sqrt{A^2 Z_3^2 \cos^2(Z_3 \varphi_2) + R^2}$
4	$\omega_2 AZ_1 \cos(Z_1 \varphi_2)$	$\omega_2 R$	$\omega_2 \sqrt{A^2 Z_1^2 \cos^2(Z_1 \varphi_2) + R^2}$
5	$\omega_3 AZ_3 \cos(Z_3 \varphi_3)$	0	$\omega_3 AZ_3 \cos(Z_3 \varphi_3)$
6	$\frac{\omega_3 AZ_1}{u} \cos\left(Z_1 \frac{\varphi_3}{u}\right)$	$\frac{\omega_3 R}{u}$	$\frac{\omega_3}{u} \sqrt{A^2 Z_1^2 \cos^2\left(Z_1 \frac{\varphi_3}{u}\right) + R^2}$

**Определение ускорений тел качения.** По известной теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение тела качения  $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ , где  $\vec{a}_r$  – относительное ускорение тела качения;  $\vec{a}_e$  – переносное ускорение;  $\vec{a}_c$  – кориолисово ускорение. Кориолисово ускорение во всех схемах отсутствует, т. к.  $\vec{v}_k \parallel \vec{\omega}_e$ . Относительное ускорение (первая кинематическая схема) при относительном прямолинейном движении определяется как первая производная от относительной скорости по времени.

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{dv_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_1 AZ_3}{u} \cos\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) \right) = \\
 &= \frac{AZ_3}{u} \left( \dot{\omega}_1 \cos\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) - \frac{\omega_1 \dot{\varphi}_1 Z_3}{u} \sin\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) \right) = \\
 &= \frac{AZ_3}{u} \left( \varepsilon_1 \cos\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) - \frac{\omega_1^2 Z_3}{u} \sin\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) \right), \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1$  – угловое ускорение звена 1.

Так как при установившемся режиме работы  $\varepsilon_1 = 0$ , то

$$a_r = \frac{AZ_3^2}{u^2} \omega_1^2 \sin\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right). \quad (4.65)$$

Переносное движение центров тел качения является криволинейным равномерным. Ускорение точки имеет две составляющие: нормальную  $\vec{a}_e^n$  и касательную  $\vec{a}_e^\tau$ :  $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n = \vec{a}_e^n$ .

$$a_e^\tau = \varepsilon_2 R \quad (\varepsilon_2 = 0); \quad a_e^n = \omega_2^2 R = \frac{\omega_1^2 R}{u^2}. \quad (4.66)$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_e^2} = \frac{\omega_1^2}{u} \sqrt{A^2 Z_3^4 \sin^2\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) + \frac{R^2}{u^2}}. \quad (4.67)$$

Изменения ускорений центра масс тела качения за один оборот ведущего вала ППТК (для первой кинематической схемы при параметрах передачи  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $R = 30$  мм,  $A = 10$  мм,  $u = 5$ ,  $n_1 = 1000$  мин<sup>-1</sup>) проиллюстрированы на рисунке 4.21. Для остальных кинематических схем выражения для определения ускорений тел качения приведены в таблице 4.5.

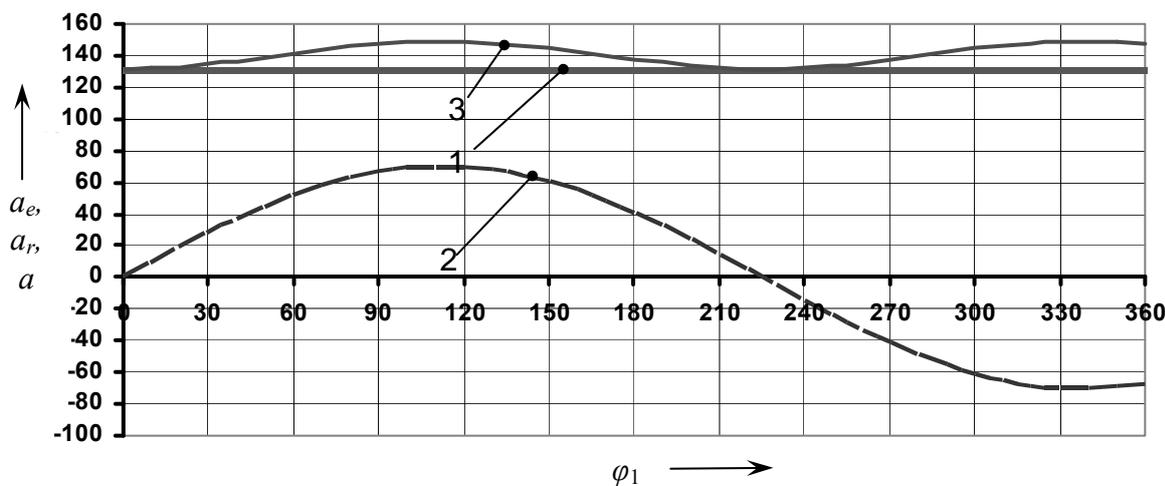


Рисунок 4.21 – Зависимость переносного (1), относительного (2) и абсолютного ускорений (3) от угла поворота ведущего вала

Таблица 4.5 – Выражения для определения ускорений тел качения

Номер кинематической схемы	Относительное ускорение $a_r$	Переносное ускорение $a_e^n$	Абсолютное ускорение $a$
1	$\frac{AZ_3^2}{u^2} \omega_1^2 \sin\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right)$	$\frac{\omega_1^2}{u^2} R$	$\frac{\omega_1^2}{u^2} \sqrt{A^2 Z_3^4 \sin^2\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u}\right) + R^2}$
2	$AZ_1^2 \omega_1^2 \sin(Z_1 \varphi_1)$	0	$AZ_1^2 \omega_1^2 \sin(Z_1 \varphi_1)$
3	$AZ_3^2 \omega_2^2 \sin(Z_3 \varphi_2)$	$\omega_2 R$	$\omega_2 \sqrt{A^2 Z_3^4 \sin^2(Z_3 \varphi_2) + R^2}$
4	$AZ_1^2 \omega_2^2 \sin(Z_1 \varphi_2)$	$\omega_2 R$	$\omega_2 \sqrt{A^2 Z_1^4 \sin^2(Z_1 \varphi_2) + R^2}$
5	$AZ_3^2 \omega_3^2 \sin(Z_3 \varphi_3)$	0	$AZ_3^2 \omega_3^2 \sin(Z_3 \varphi_3)$
6	$\frac{AZ_1^2}{u^2} \omega_3^2 \sin\left(Z_1 \frac{\varphi_3}{u}\right)$	$\frac{\omega_3^2}{u^2} R$	$\frac{\omega_3^2}{u^2} \sqrt{A^2 Z_1^4 \sin^2\left(Z_1 \frac{\varphi_3}{u}\right) + R^2}$

### Определение зависимостей угловых ускорений звеньев ПШТК.

При первой кинематической схеме звено 3 (наружный кулачок) неподвижно, т. е.  $\omega_3 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ .

Определим, как изменяется угловое ускорение выходного звена 2 передачи  $\varepsilon_2$  в зависимости от ускорения  $\varepsilon_1$ .

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \varepsilon_1. \quad (4.68)$$

Очевидно, что  $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = u$ , т. к.  $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_1 / dt}{d\varphi_2 / dt} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = u$ .

Для правильного зацепления  $u = \text{const}$  и выражение (4.68) запишется тривиально –  $\varepsilon_2 = u\varepsilon_1$ . Подставив это выражение в формулу (4.65), можно определить переносное тангенциальное ускорение тела качения при неустановившемся режиме работы.

#### 4.6 Кинематический анализ редукторно-дифференциальных механизмов, созданных на основе ППТК

Проанализируем схему двухступенчатой ППТК, изображенной на рисунке 4.22. Передача состоит из ведущего вала 1, на котором расположены два внутренних кулачка 1' и 1'' с числом периодов  $Z_1'$  и  $Z_1''$  соответственно. Эти кулачки посредством тел качения 4 взаимодействуют с неподвижным звеном передачи – наружным кулачком 3' с числом периодов  $Z_3'$  и выходным звеном – наружным кулачком 3'' с числом периодов  $Z_3''$ .

Передача состоит из двух ступеней. Первая ступень сконструирована по первой кинематической схеме. Вторая ступень не имеет остановленных звеньев и может быть условно названа дифференциальной (условно, потому что вся система все равно имеет одну степень свободы и является редуктором). Два подвижных звена первой ступени 1' и 2 являются входными звеньями для второй ступени, вынуждая третье звено вращаться с редукцией (мультипликацией). Звено 1' жестко соединено со звеном 1'', а звено 2 для первой ступени имеет число пазов  $Z_1' + Z_3'$ , а для второй ступени –  $Z_1'' + Z_3''$ .

Определим передаточное отношение всего редукторно-дифференциального механизма (РДМ), используя формулу Виллиса и принцип остановки водила для двух ступеней (звено 2 – водило). Для первой ( $\omega_3' = 0$ ) и второй ступеней соответственно данная формула запишется как

$$\frac{\omega_1' - \omega_2}{-\omega_2} = -\frac{Z_3'}{Z_1'}, \quad \frac{\omega_1'' - \omega_2}{\omega_3'' - \omega_2} = -\frac{Z_3''}{Z_1''}. \quad (4.69)$$

Выразив из выражений (4.69) угловую скорость водила  $\omega_2$  и приравняв эти выражения, получим

$$\omega_1' (Z_1'' + Z_3'') = (Z_1'' \omega_1'' + Z_3'' \omega_3'') \left( 1 + \frac{Z_3'}{Z_1'} \right). \quad (4.70)$$

Из уравнения (4.70) с учетом равенства  $\omega_1' = \omega_1''$  находим передаточное отношение редуктора:

$$u = \frac{\omega_1'}{\omega_3''} = \frac{Z_3' \left( 1 + \frac{Z_3'}{Z_1'} \right)}{Z_3'' - Z_1'' \frac{Z_3'}{Z_1'}}. \quad (4.71)$$

Если в рассматриваемой кинематической схеме (рисунок 4.22) принять  $Z_1' = Z_1''$  и объединить две цепочки тел качения в одну, то получим схему передачи, изображенной на рисунке 4.23. Данную передачу можно назвать трехсинусоидной [122], т. к. происходит взаимодействие трех звеньев, каждое из которых содержит периодическую беговую дорожку. В [68] изложены основы кинематического анализа трехсинусоидных передач. Однако целесообразность дальнейшей разработки в этом направлении сомнительна, по крайней мере, для передач цилиндрического типа, т. к. трехсинусоидные (трехциклоидальные и т. д.) передачи в классическом исполнении имеют ограниченное количество шариков, передающих нагрузку, а их кинематические возможности не превосходят возможности обычных ППТК.

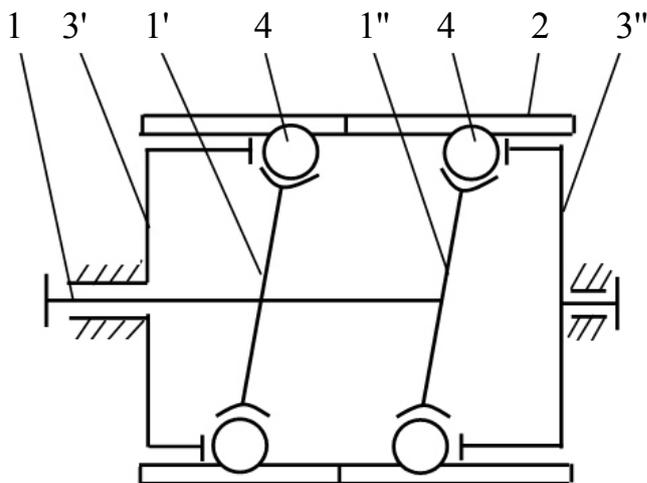


Рисунок 4.22 – Кинематическая схема редукторно-дифференциального механизма

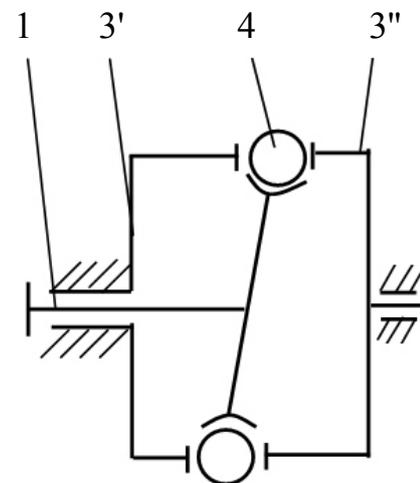
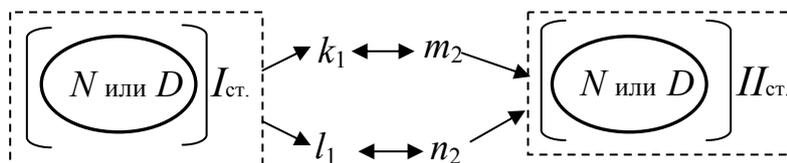


Рисунок 4.23 – Схема цилиндрической трехсинусоидной передачи

Каждая из шести кинематических схем ППТК может обеспечить вращение двух звеньев. Поочередно соединяя эти звенья с двумя звеньями из трех второй ступени, образуем механизм с одной степенью

свободы, в котором выходным звеном является третье подвижное звено второй ступени. Таким образом, на базе каждой кинематической схемы можно реализовать 6 кинематических схем РДМ, а всего реализуемых схем РДМ – 36.

Нами предлагается обозначение РДМ, приведенное на рисунке 4.24.



$N$  – номер кинематической схемы редукторной ступени ( $D$  – если ступень дифференциальная);  $k_1, l_1$  – подвижные звенья первой ступени, соединенные со звеньями второй ступени;  $m_2, n_2$  – подвижные звенья второй ступени, соединенные со звеньями первой ступени

Рисунок 4.24 – Структура обозначения кинематических схем РДМ

Передаточное отношение РДМ, схема которого показана на рисунке 4.24, запишется в следующем виде:

$$u(1)_{1-1}^{2-2}(D) = u(1)_{a-a}^{h-h}(D) = \frac{\omega_1'}{\omega_3''}. \quad (4.72)$$

В формуле (4.72) учтена и традиционная для планетарных зубчатых механизмов индексация: звено 1 обозначено  $a$ , звено 2 –  $h$ , звено 3 –  $b$ .

Выделять в отдельную структурную группу передачи с измененным порядком следования редукторной и дифференциальной ступеней, на наш взгляд, нецелесообразно. Если в передаче (см. рисунок 4.22) направить поток мощности в обратную сторону от звена 3'' к звену 1', то для определения передаточного отношения необходимо использовать дробь, обратную дроби в выражении (4.71).

$$u(D)_{1-1}^{2-2}(3) = \frac{\omega_3''}{\omega_1'} = \frac{Z_3'' - Z_1'' \frac{Z_3'}{Z_1'}}{Z_3' \left(1 + \frac{Z_3'}{Z_1'}\right)}. \quad (4.73)$$

В случае, если дифференциальная ступень будет содержать и входное и выходное звенья, получим преобразованную формулу (4.71) с

с измененной индексацией числа периодов.

$$u(D)_{1-1}^{2-2}(1) = \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = \frac{Z_3'' \left( 1 + \frac{Z_3''}{Z_1''} \right)}{Z_3' - Z_1' \frac{Z_3''}{Z_1''}}. \quad (4.74)$$

Сравнивая РДМ с простыми двухступенчатыми передачами со ступенями, соединенными последовательно можно отметить следующее [168]:

- РДМ имеют большую жесткость, т. к. два звена для первой и второй ступеней зафиксированы на общем основании, менее трудоемки в изготовлении и сборке, т. к. имеют меньшее число деталей;
- РДМ имеют меньшую нагрузочную способность, т. к. реактивный момент воспринимает только одно звено. Необходимо также решать вопрос о снижении вредного влияния циркуляции внутренних мощностей.

## 5 Динамический анализ и оценка механических потерь в ППТК

### 5.1 Вывод уравнения движения ППТК

Рассматриваем модель одной секции передачи с абсолютно жесткими звеньями. Кинетическая энергия ППТК в общем случае

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \sum_{i=1}^n T_{4i}, \quad (5.1)$$

где  $T_1$  – кинетическая энергия (КЭ) внутреннего кулачка;

$T_2$  – КЭ вала с пазами;

$T_3$  – кинетическая энергия наружного кулачка;

$T_{4i}$  – КЭ  $i$ -го тела качения;

$n$  – количество тел качения в передаче.

Анализируя первую кинематическую схему передачи ( $T_3 = 0$ ), принимая  $\varphi_1$  в качестве обобщенной координаты и учитывая соотношение  $\varphi_2 = \varphi_1/u$ , получим

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \dot{\varphi}_1^2}{2u^2}; \quad T_4 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_s v_{c4i}^2}{2} + \frac{J_4 \dot{\zeta}_{4i}^2}{2} \right), \quad (5.2)$$

где  $J_1, J_2, J_4$  – моменты инерции тел 1, 2 и 4 соответственно;

$m_s$  – масса тела качения;

$v_{c4i}$  – скорость центра масс  $i$ -го тела качения;

$\dot{\zeta}_{4i}$  – угловая скорость вращения  $i$ -го тела качения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Скорость центра масс  $i$ -го тела качения определится как геометрическая сумма переносной  $v_{ce4i}$  и относительной  $v_{cr4i}$  скоростей:

$v_{c4i} = \sqrt{v_{ce4i}^2 + v_{cr4i}^2}$ . Согласно данным, приведенным в таблице 4.4, для синусоидальных кривых

$$v_{c4i} = \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 R^2 + \left( \frac{df_3(\varphi_1)}{dt} \right)^2} = \frac{\dot{\varphi}_1}{u} \sqrt{R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2 \left( Z_3 \frac{\varphi_1}{u} \right)}. \quad (5.3)$$

Угловые скорости  $\dot{\zeta}_4$  в первом приближении можно рассматривать

как линейные функции угловой скорости входного вала, т. е.  $\dot{\zeta}_4 = k\dot{\varphi}_1$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, и принять у всех тел качения равными. Тогда кинетическая энергия ППТК

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left( J_1 + \frac{J_2}{u^2} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_s}{u^2} \left( R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2 \left( Z_3 \left( \frac{\varphi_1}{u} + \frac{2\pi}{n} i \right) \right) \right) + k^2 n J_4 \right). \quad (5.4)$$

В выражении (5.4) присутствует функция суммы квадратов косинусов. Для упрощения этого выражения и дальнейших расчетов выполним преобразования сумм некоторых тригонометрических функций.

Рассмотрим непрерывную периодическую функцию  $f(ax + b)$ , где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, на интервале  $[0; 2\pi R]$ . Интервал разобьем на  $n$  равных отрезков с длиной  $2\pi R/n$ . При этом образуется  $n$  фигур, ограниченных графиком функции, отрезками на оси абсцисс и линиями, параллельными оси ординат, проведенными на границах отрезков. Площадь одной фигуры можно считать приблизительно равной площади прямоугольника со сторонами, равными  $2\pi R/n$  и  $y_i$ , где  $y_i$  – ордината середины  $i$ -го отрезка.

С одной стороны, суммарная площадь  $S$  всех фигур (с учетом знаков  $y_i$ )

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi R}{n} y_i = \frac{2\pi R}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (5.5)$$

С другой стороны, эта же площадь  $S$  может быть определена интегрированием функции  $f(x)$ :

$$S = \int_0^{2\pi R} f(ax + b) dx.$$

Рассмотрим синусоидальную кривую:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi R} \sin(ax + b) dx &= \frac{-\cos(2a\pi R + b) + \cos b}{a} = \\ &= \frac{-(\cos(2a\pi R) \cdot \cos b - \sin(2a\pi R) \cdot \sin b) + \cos b}{a} = \frac{-\cos b + \cos b}{a} = 0, \quad (5.6) \end{aligned}$$

причем  $a$  – целое число (в рассматриваемой модели  $a = Z_3$ ).

Аналогично доказывается равенство нулю определенного интеграла функции  $\cos(ax + b)$  с пределами интегрирования 0 и  $2\pi R$ .

Рассмотрим результаты интегрирования квадратов функций.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi R} \sin^2(ax + b) dx &= \int_0^{2\pi R} \frac{1}{2} (1 - \cos(2(ax + b))) dx = \\ &= \pi R - \int_0^{2\pi R} \cos(2(ax + b)) dx = \pi R, \end{aligned} \quad (5.7)$$

т. к. интеграл в последнем преобразовании выражения (5.7) равен нулю согласно выражению (5.6).

Аналогично доказывается равенство  $\int_0^{2\pi R} \cos^2(ax + b) dx = \pi R$ .

Выражение (5.7) характеризует суммарную площадь, ограниченную функцией  $\sin^2(ax + b)$  и осью абсцисс. Чтобы найти сумму ординат точек, равномерно распределенных вдоль оси абсцисс, необходимо разделить это выражение на длину интервала  $l = 2\pi R$  (общая длина участка на оси абсцисс, на которой вычисляется интеграл). Таким образом, для двух видов функций

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2(ax + b) &= \frac{\int_0^{2\pi R} \sin^2(ax + b) dx}{l/n} = \frac{\pi R n}{l} = \frac{n}{2}; \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2(ax + b) &= \frac{\int_0^{2\pi R} \cos^2(ax + b) dx}{l/n} = \frac{\pi R n}{l} = \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

где  $n$  – количество интервалов.

Применительно к выражению (5.4) получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2\left(Z_3 \frac{\varphi_1}{u} + \frac{2\pi}{n} i\right) = \frac{n}{2}.$$

Выполним преобразования, предусмотренные уравнением Лагранжа 2-го рода  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}$ , где  $Q_{\varphi_1}$  – обобщенная сила,

соответствующая обобщенной координате  $\varphi_1$ .

$$Q_{\varphi_1} = M_1 - \frac{M_2}{u} - M_{mp}. \quad (5.8)$$

где  $M_{mp}$  – момент сил трения в передаче.

После преобразований выражение (5.4) примет вид:

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left( J_1 + \frac{J_2}{u^2} + n \left( \frac{m_s R^2}{u^2} + \frac{m_4 A^2 Z_3^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right) \right). \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) можно представить в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} J_{\Pi}, \quad (5.10)$$

где  $J_{\Pi}$  – постоянный инерционный коэффициент, равный выражению в скобках в формуле (5.9).

Для первой и остальных кинематических схем передачи инерционные коэффициенты приведены в таблице 5.1.

Произведя преобразования Лагранжа для выражения (5.10), получим для всех кинематических схем

$$J_{\Pi i} \ddot{\varphi}_j = Q_{\varphi_i}, \quad (5.11)$$

где  $i$  – номер кинематической схемы;

$j$  – индекс обобщенной координаты (таблица 5.1).

С учетом формул (5.8) и (5.9) для первой кинематической схемы окончательно

$$\ddot{\varphi}_1 \left( J_1 + \frac{J_2}{u^2} + n \left( \frac{m_s R^2}{u^2} + \frac{m_4 A^2 Z_3^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right) \right) = M_1 - \frac{M_2}{u} - M_{mp}. \quad (5.12)$$

Выражение (5.12) представляет уравнение движения трехзвенной ППТК с одним остановленным звеном. Анализируя его, можно отметить, что это выражение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения. Линейная зависимость углового ускорения от обобщенной силы, а также постоянство во времени инерционного

коэффициента  $J_{\Pi}$  свидетельствует о постоянстве осевого момента инерции системы тел качения. Это означает то, что несмотря на сложный характер взаимных перемещений тел качения относительно друг друга и неподвижной системы отсчета, всю эту систему можно рассматривать как единое тело, совершающее вращательное движение с массой, приведенной к ведущему валу.

Таблица 5.1 – Формулы для определения инерционных коэффициентов для различных кинематических схем

Номер кинематической схемы	Обобщенная координата	Инерционный коэффициент $J_{\Pi}$
1	$\varphi_1$	$J_1 + \frac{J_2}{u^2} + n \left( \frac{m_s R^2}{u^2} + \frac{m_4 A^2 Z_3^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right)$
2	$\varphi_1$	$J_1 + \frac{J_3}{u^2} + n \left( \frac{m_s A^2 Z_1^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right)$
3	$\varphi_2$	$J_2 + \frac{J_1}{u^2} + n \left( m_4 R^2 + \frac{m_s A^2 Z_3^2}{2} + k^2 J_4 \right)$
4	$\varphi_2$	$J_2 + \frac{J_3}{u^2} + n \left( m_4 R^2 + \frac{m_s A^2 Z_1^2}{2} + k^2 J_4 \right)$
5	$\varphi_3$	$J_3 + \frac{J_1}{u^2} + n \left( \frac{m_s A^2 Z_3^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right)$
6	$\varphi_3$	$J_3 + \frac{J_2}{u^2} + n \left( \frac{m_s R^2}{u^2} + \frac{m_s A^2 Z_1^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right)$
Примечание – Передаточные отношения $u$ в выражениях для $J_{\Pi}$ зависят от номера кинематической схемы		

Постоянство осевого момента инерции  $J_{Z_4}$  для передач цилиндрического типа очевидно, т. к. расстояния от центров тел качения до оси вращения передачи остаются неизменными при любом их взаимном перемещении. Рассмотрим, как определяется момент инерции системы тел качения относительно полюса  $O$  (рисунок 5.1) в общем случае для периодической кривой, расположенной на конической

поверхности. За полюс примем центр окружности, образованной средней линией.

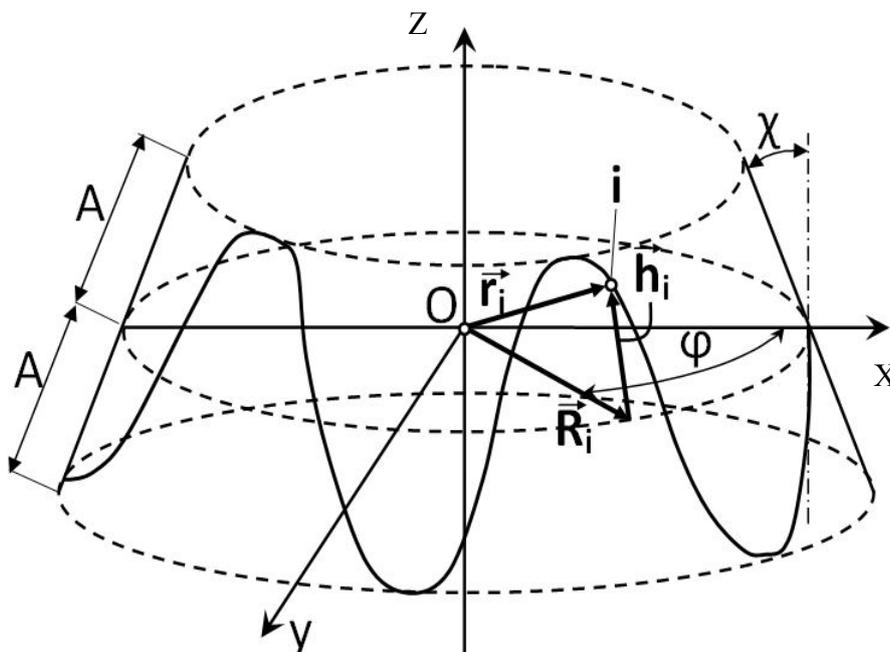


Рисунок 5.1 – Схема для определения момента инерции системы тел качения относительно полюса  $O$

Для каждого центра тела качения справедливо векторное равенство

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{h}_i, \quad (5.13)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, соединяющий центр  $i$ -го тела качения ( $i = 1 \dots n$ ) с полюсом  $O$ ;

$\vec{R}_i$  – радиус  $R$  средней окружности, представленный в виде вектора;

$\vec{h}_i$  – координата, отмеряемая от средней линии до центра шарика вдоль оси передачи.

Просуммируем выражение (5.13) по всем телам качения:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{r}_i = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{R}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \vec{h}_i. \quad (5.14)$$

Рассмотрим проекции выражения (5.14) на оси координат, направив ось  $Oz$  по оси передачи, а ось  $Ox$  – на тело качения с номером  $i = 0$ .

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{ix} = \sum_{i=0}^{n-1} R_x = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \left( R - f \left( \varphi + \frac{2\pi}{n} i \right) \sin \chi \right) \cos \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) \right); \quad (5.15)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{iy} = \sum_{i=0}^{n-1} R_y = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \left( R - f \left( \varphi + \frac{2\pi}{n} i \right) \sin \chi \right) \sin \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) \right); \quad (5.16)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{iz} = \sum_{i=0}^{n-1} R_z + \sum_{i=0}^{n-1} z_i = \sum_{i=0}^{n-1} f \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) \cos \chi = 0. \quad (5.17)$$

Для цилиндрических синусоид:

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{ix} = \sum_{i=0}^{n-1} R_x = \sum_{i=0}^{n-1} R \cos \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) = 0; \quad (5.18)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{iy} = \sum_{i=0}^{n-1} R_y = \sum_{i=0}^{n-1} R \sin \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) = 0; \quad (5.19)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_{iz} = \sum_{i=0}^{n-1} R_z + \sum_{i=0}^{n-1} h_i = \sum_{i=0}^{n-1} A \sin \left( Z \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) \right) = 0. \quad (5.20)$$

Равенство нулю выражений (5.18)–(5.20) следует из выражения (5.6).

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} m_s \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_{si} \vec{r}_i}{\sum_{i=0}^{n-1} m_{si}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \vec{r}_i}{n} = 0. \quad (5.21)$$

Из (5.21) следует, что центр масс системы тел качения совпадает с точкой  $O$  и его положение не зависит от взаимного перемещения тел качения в передаче. В общем же случае для конических и плоских передач центр масс системы тел качения не совпадает с центром  $O$ , причем эксцентриситет увеличивается по мере увеличения значения угла  $\chi$  от 0 до  $\pi/2$ . Данный эксцентриситет для синусоидальных кривых определится по формуле [107]

$$\Delta r_c = \frac{A}{2} \sin \chi. \quad (5.22)$$

Координаты центра масс системы тел качения:

$$\Delta x_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n}; \quad \Delta y_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_i}{n}; \quad \Delta z_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} z_i}{n};$$

$$|\Delta r_c| = \sqrt{(\Delta x_c)^2 + (\Delta y_c)^2 + (\Delta z_c)^2}$$

для передачи с взаимодействующими синусоидами ( $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм), расположенными на конической поверхности с углом образующих  $\chi = \pi/4$  (рисунок 5.2).

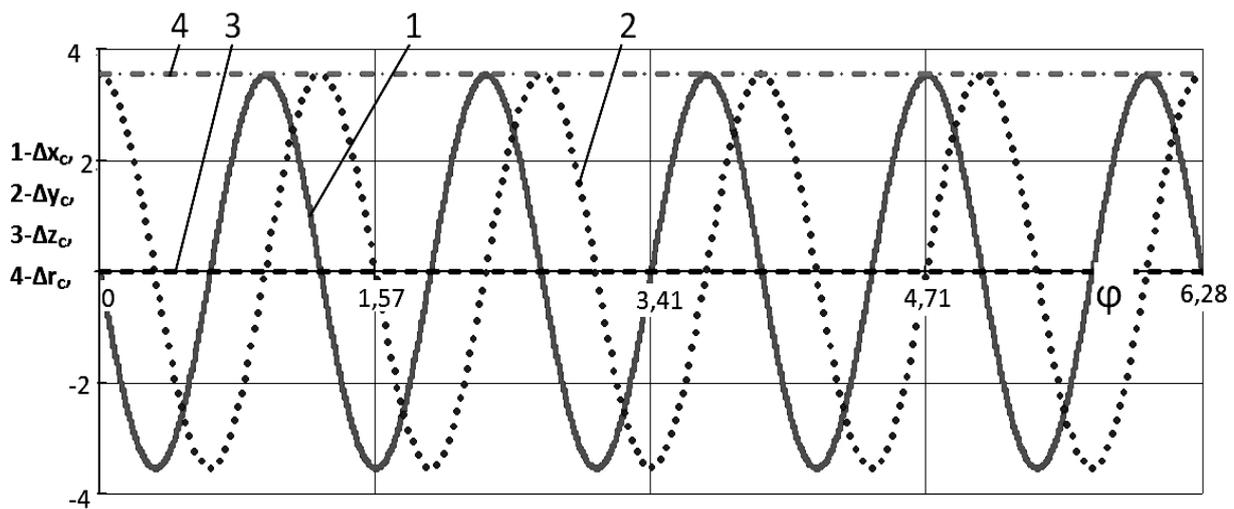


Рисунок 5.2 – Изменение координат центра масс систем тел качения

Исследование численными методами других типов кривых не подтвердило универсальность формулы (5.22). У кусочно-винтовой кривой и кривой, представляющей сочетание дуг окружностей, эксцентриситет  $\Delta r_c$  не является постоянной величиной. Изменение  $\Delta z_c$  повторяет характер исследуемых кривых.

Докажем постоянство полярного момента инерции системы тел качения  $J_0$  (полюс – точка  $O$ ) для цилиндрических передач с синусоидальными кривыми:

$$r_i^2 = R^2 + z_i^2 = R^2 + A^2 \sin^2(Z\varphi_i); \quad (5.23)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} R^2 + \sum_{i=0}^{n-1} A^2 \sin^2 \left( Z \left( \varphi_i + \frac{2\pi}{n} i \right) \right) = n \left( R^2 + \frac{A^2}{2} \right) = const; \quad (5.24)$$

$$J_0 = \sum_{i=0}^{n-1} m_s r_i^2 = m_s n \left( R^2 + \frac{A^2}{2} \right) = const. \quad (5.25)$$

Постоянство полярного момента инерции доказывает полную уравновешенность системы тел качения для цилиндрических синусоидальных кривых.

## 5.2 Анализ динамической модели ППТК

Исследование динамической модели механической передачи позволяет оценить устойчивость системы в переходных состояниях, определить резонансные частоты колебаний, определить максимальные нагрузки, действующие на звенья передачи. И если составление дискретной динамической модели для обычных (в том числе и многоступенчатых) трансмиссий не представляет трудностей, то в планетарных передачах необходимо учесть сложное движение сателлитов и то, что они одновременно контактируют с несколькими звеньями. В [169] отмечается, что динамическая модель планетарной передачи имеет топологическое вырождение, что усложняет ее разработку существующими методами. При этом авторами предлагается эквивалентная двухмассовая динамическая модель, учитывающая жесткость только валов трансмиссии. В [170] сложное движение сателлита раскладывается на два самостоятельных вращения – переносное и относительное. Однако в предложенной модели одна из сосредоточенных масс в контуре соединяется с основанием (базой), что позволяет оценить только малые колебания системы относительно равновесного состояния. Переменные типа потока (скорости) будут стремиться к нулю с течением времени. В [171] приводятся динамические модели трансмиссий автомобилей и планетарная передача представлена в виде гираторного (замкнуто-кольцевого) трехмассового соединения, что также, при торможении одной из сосредоточенных масс, приводит к стремлению угловых скоростей остальных масс к нулю. Для моделирования планетарных коробок передач предложен метод внутренних моментов [172], предполагающий решение системы алгебраических уравнений на каждом шаге интегрирования. Анализ существующих методик свидетельствует о

том, что задача создания динамической модели планетарной передачи не решена окончательно, тем более для передач новых типов.

Для анализа малых колебаний системы рассмотрим дискретную модель ППТК, учитывающую крутильные колебания. В общем случае (для дифференциальных механизмов) данная модель будет четырехмассовой, а для редукторов – трехмассовой, в связи с тем, что одно из основных звеньев передачи остановлено – соединено с нулевым (базовым) узлом. Применим структурно-матричный метод [173] для исследования динамики передачи. От выбора кинематической схемы зависит направление сигналов в ветвях орграфа динамической модели. Передаточные отношения трансформаторных элементов будет определять формула Виллиса:

$$(\omega_1 - \omega_2)/(\omega_3 - \omega_2) = -Z_3/Z_1.$$

В общем случае рассматривается система с четырьмя степенями свободы, состоящая из четырех сосредоточенных масс, и вводятся следующие обозначения: 1 – внутренний кулачок, 2 – вал с пазами, 3 – наружный кулачок, 4 – система тел качения. Система имеет разветвление на элементе 4. Сосредоточенные массы (осевые моменты инерции)  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и  $J_4$  отражают инерционные свойства объекта. Фазовыми переменными типа потока являются угловые скорости, а типа потенциала – вращающие моменты. Разработанная модель передачи при торможении наружного кулачка представляет собой последовательное соединение сосредоточенных масс посредством упругих, диссипативных и трансформаторного элементов. Однако на динамику планетарной передачи также оказывает влияние упругость и податливость выступов наружного кулачка (зубьев центрального колеса с внутренним зацеплением), что учтено введением в модель узла 3\*, создающего источник потока  $\omega_{B3}^*(t)$ . Так как колебания системы, вызванные деформацией выступов (зубьев) остановленного звена, дополнительно приводят к расходу энергии, подводимой к ведущему звену 1, направление сигнала в ветви источника потока  $\omega_{B3}^*(t)$  принимаем от узла 3\* к базе, а реакцию внешней среды  $M_{B3}^*(t)$ , обусловленную этим источником, также считаем отрицательной. При этом для сохранения кинематической адекватности модели реальному объекту, согласно принципу остановки водила, остановленному звену сообщается условная угловая скорость, равная скорости водила (звена 2):

$$\omega_{B3}^*(t) = \omega_2(t).$$

Орграф и динамическая модель планетарной передачи приведены на рисунке 5.3. Направление сигналов соответствует первой кинематической схеме, при которой звено 1 ( $a$ ) ведущее, звено 2 ( $h$ ) ведомое, звено 3 ( $b$ ) остановлено.

Введем функции выбора  $L_i$  и  $W_i$  для  $i$ -го звена:

1)  $L_i = 1$ , если  $i$ -е звено ведущее;  $L_i = -1$ , если  $i$ -е звено ведомое или остановленное;

2)  $W_i = 1$ , если соответствующая ветвь ( $c_i$  и  $\mu_i$ ) подходит к узлу;  $W_i = -1$ , если соответствующая ветвь ( $c_i$  и  $\mu_i$ ) ответвляется от узла;  $W_i = 0$ , если соответствующая ветвь ( $c_i$  и  $\mu_i$ ) не соединена с узлом.

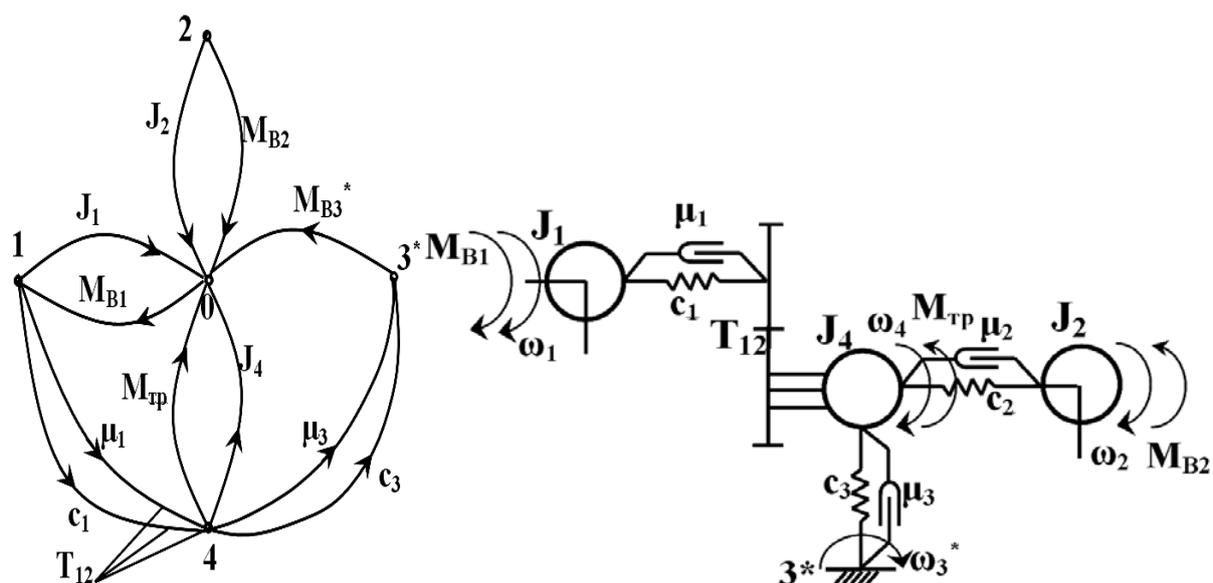


Рисунок 5.3 – Орграф и динамическая модель планетарной передачи (первая кинематическая схема)

Матрица инцидентий и трансформаторных элементов системы приведена в таблице 5.2. Элементы матрицы трансформаторных элементов принимают значение  $V = 1$ , если трансформаторный элемент находится в цепи между соответствующей ветвью и узлом, и  $V = 0$  в остальных случаях. Обозначим как  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$  моменты, приложенные к ведущему и ведомому звеньям передачи.

Таблица 5.2 – Матрица инцидентий и трансформаторных элементов

Узел	Ветвь									
	Источник потенциалов				Упругий и диссипативный элементы			Трансформаторный элемент		
	$M_{B1}$	$M_{B2}$	$M_{B3}$	$M_{mp}$	$c_1 (\mu_1)$	$c_2 (\mu_2)$	$c_3 (\mu_3)$	$c_1 (\mu_1)$	$c_2 (\mu_2)$	$c_3 (\mu_3)$
1	$L_1$	0	0	0	$W$	$W$	$W$	$V$	$V$	$V$
2	0	$L_2$	0	0	$W$	$W$	$W$	$V$	$V$	$V$
3	0	0	$L_3$	0	$W$	$W$	$W$	$V$	$V$	$V$
4	0	0	0	-1	$W$	$W$	$W$	$V$	$V$	$V$
Подматрицы	$A_B$				$A_Y (A_D)$			$T_Y (T_D)$		

Математическая модель планетарной передачи будет описываться на основе следующей системы уравнений:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\sum_{l=1}^L I_{Bil} M_{Bl} + \sum_{j=1}^N I_{Yij} M_{Yj} T_{ij} + \sum_{k=1}^K I_{Dij} M_{Dk} T_{ij}}{J_i}, \quad i = \overline{1, U}; \quad (5.26)$$

$$\frac{dM_{Yj}}{dt} = -c_j \sum_{i=1}^U I_{Yij} \omega_i T_{ij}, \quad j = \overline{1, N}; \quad (5.27)$$

$$M_{Dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^U I_{Dik} \omega_i T_{ij}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (5.28)$$

где  $M_{Yj}$ ,  $M_{Dk}$  – потенциалы (моменты) упругих и диссипативных элементов соответственно;

$c_j$  – жесткости упругих элементов;

$\mu_k$  – коэффициенты диссипации;

$I_{Bil}$ ,  $I_{Yij}$ ,  $I_{Dik}$  – элементы матрицы инцидентий, характеризующие инцидентность  $l$ -й,  $j$ -й и  $k$ -й ветви орграфа  $i$ -му узлу соответственно;

$T_{ij}$  – функция, зависящая от значений элементов матрицы трансформаторных элементов;

$L$  – количество источников потенциалов;

$N$  – количество упругих элементов системы;

$K$  – количество диссипативных элементов;

$U$  – количество сосредоточенных масс системы.

Уравнения (5.26)–(5.28) получены на основе уравнений (5.21)–(5.23) [173, с. 161] с учетом специфики планетарной передачи. Особенностью разработанной модели является учет механических потерь в передаче не с помощью КПД трансформаторного элемента, а введением момента трения  $M_{TP}$ , условно приложенного к системе сателлитов. Функция  $T_{ij}$  определяется согласно следующей зависимости [174]:

$$T_{ij} = \begin{cases} u_{xy}^{iUij(Dij)} & \text{при } T_{\Delta ij} = 1; \\ 1 & \text{при } T_{\Delta ij} = 0. \end{cases}$$

где  $T_{\Delta ij}$  – инцидентор матрицы трансформаторных элементов;

$u_{xy}$  – передаточное отношение трансформаторного элемента.

Передаточное число трансформаторного элемента  $T_{12}$  равно  $u_{12} = (Z_1 + Z_3)/Z_1$ , где  $Z_1$  – число периодов кривой на звене 1 (число зубьев шестерни  $a$ );  $Z_3$  – число периодов кривой на звене 3 (число зубьев колеса  $b$ ). Индексация в обозначениях передаточных чисел принята следующая: 12 – передача движения от звена 1 к звену 2 (3-е звено остановлено). Значения передаточных отношений для всех шести возможных кинематических схем планетарных передач приведены в таблице 4.1.

Для первой кинематической схемы подматрицы ветвей источников  $A_B$ , упругих  $A_U$ , диссипативных  $A_D$  и трансформаторных  $T_{\Delta}$  элементов будут иметь следующий вид:

$$A_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_U = A_D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad T_{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Движение системы, соответственно, будет описываться системой следующих дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (третья строка матриц не учитывалась, т. к. звено 3 остановлено):

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{M_{B1} - (M_{U1} + M_{D1})}{J_1}; \quad (5.29)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-M_{B2} + (M_{Y2} + M_{D2})}{J_2}; \quad (5.30)$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \frac{(M_{Y1} + M_{D1})u_{12} - (M_{Y2} + M_{D2}) - (M_{Y3} + M_{D3}) - M_{mp}}{J_4}; \quad (5.31)$$

$$\frac{dM_{Y1}}{dt} = -c_1(-\omega_1 + \omega_4 u_{12}); \quad M_{D1} = -\mu_1(-\omega_1 - \omega_4 u_{12}); \quad (5.32)$$

$$\frac{dM_{Y2}}{dt} = -c_2(\omega_2 - \omega_4); \quad M_{D2} = -\mu_2(\omega_2 - \omega_4); \quad (5.33)$$

$$\frac{dM_{Y3}}{dt} = -c_3(-\omega_4 + \omega_{B3}^*); \quad M_{D3} = -\mu_3(-\omega_4 + \omega_{B3}^*). \quad (5.34)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (5.30)–(5.34) необходимо задание внешних воздействий  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$ ,  $M_{mp}$ , начальных условий  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{40}$ ,  $M_{Y10}$ ,  $M_{Y20}$ ,  $M_{Y30}$  и времени интегрирования. Начальные угловые скорости можно принять равными нулю либо присвоить им некоторые начальные значения –  $\omega_{10} = 50$  рад/с,  $\omega_{20} = 0$ ,  $\omega_{40} = 0$ . Внешние моменты находятся во взаимосвязи, и их значение необходимо находить из условий статического равновесия системы. При этом  $M_{B1} = M_{B2} / (u_{12}\eta)$ . Момент трения можно определить по формуле  $M_{TP} = M_{B2}(1 - \eta)$ , где  $\eta$  – КПД передачи. Условно введенный момент внешнего воздействия, формируемый при контакте сателлитов с кулачковыми выступами (зубьями) остановленного звена, определится из уравнения  $M_{B3} - (M_{Y3} + M_{D3}) = 0$ .

Коэффициенты  $c_1$  и  $\mu_1$  характеризуют упругие и диссипативные свойства ведущего вала и внутреннего кулачка,  $c_2$  и  $\mu_2$  – вала с пазами, а  $c_3$  и  $\mu_3$  – выступов наружного кулачка. Жесткость системы тел качения считается в данном случае на несколько порядков выше, чем жесткость других звеньев, и в модели не рассматривается.

**Определение момента инерции системы сателлитов  $J_4$  относительно оси передачи.** Данный приведенный момент инерции должен учитывать сложный характер движения тел качения. Он определится из равенства значений кинетических энергий при рассмотрении системы тел качения как единого звена, совершающего

вращательное движение, и суммы кинетических энергий тел качения, рассматриваемых в отдельности:

$$T_4 = \frac{J_4 \dot{\varphi}_4^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{4i} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_s v_{c4i}^2}{2} + \frac{J_{s4} \dot{\zeta}_{4i}^2}{2} \right), \quad (5.35)$$

где  $J_4$  – моменты инерции системы сателлитов (тел качения) относительно оси передачи;

$J_{s4}$  – момент инерции сателлита (тела качения) относительно оси вращения, проходящей через его центр масс;

$m_s$  – масса тела качения;

$v_{c4i}$  – скорость центра масс  $i$ -го тела качения;

$\dot{\zeta}_{4i}$  – угловая скорость вращения  $i$ -го тела качения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Выразим кинетическую энергию всех сателлитов в правой части формулы (5.35) через угловую скорость  $\dot{\varphi}_4$ . Скорость центра масс  $i$ -го тела качения определится как геометрическая сумма переносной  $v_{ce4i}$  и относительной  $v_{cr4i}$  скоростей:  $v_{c4i} = \sqrt{v_{ce4i}^2 + v_{cr4i}^2}$ . Для синусоидальных кривых относительная скорость определяется как производная от уравнения плоской развертки многопериодной кривой по времени:

$$v_{c4i} = \sqrt{\dot{\varphi}_4^2 R^2 + \left( \frac{df_3(\varphi_4)}{dt} \right)^2} = \dot{\varphi}_4 \sqrt{R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2(Z_3 \varphi_4)}.$$

Угловые скорости  $\dot{\zeta}_4$  нами рассматривались как линейные функции угловой скорости входного вала с коэффициентом пропорциональности  $k$  (см. формулы (5.3) и (5.4)). В первом приближении скорости  $\dot{\zeta}_4$  можно также рассматривать как линейные функции угловой скорости  $\dot{\varphi}_4$ , т. е.  $\dot{\zeta}_4 = k_p \dot{\varphi}_4$ , где  $k_p$  – коэффициент пропорциональности. У всех тел качения эти скорости примем равными. Проекции центров тел качения на плоскость, перпендикулярную оси передачи, распределены равномерно с угловым шагом  $2\pi/n$ . Тогда кинетическая энергия системы сателлитов ППТК определится согласно выражению

$$\sum_{i=1}^n T_{4i} = \frac{\dot{\varphi}_4^2}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_s \left( R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2 \left( Z_3 \left( \varphi_4 + \frac{2\pi}{n} i \right) \right) \right) + k_p^2 n J_{s4} \right). \quad (5.36)$$

С учетом доказанного в подразд. 5.1 (уравнения (5.5)–(5.7)) выражение (5.36) окончательно запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n T_{4i} = \frac{\dot{\varphi}_4^2}{2} \left( n \left( m_s R^2 + \frac{m_s A^2 Z_3^2}{2} + k_p^2 J_{s4} \right) \right). \quad (5.37)$$

Подставив выражение (5.37) в формулу (5.35), получим

$$J_4 = n \left( m_s R^2 + \frac{m_s A^2 Z_3^2}{2} + k_p^2 J_{s4} \right).$$

Для зубчатых планетарных передач, работающих по схеме 2К-Н, с ведущим звеном  $a$ , остановленным звеном  $b$  и ведомым звеном  $h$  осевой момент инерции  $J_4$  в уравнении (5.31) определится по формуле

$$J_4 = \left( 0,25m^2 \cdot m_g (z_a + z_g)^2 + J_g \left( \frac{z_a + z_g}{z_g} \right)^2 \right) n,$$

где  $m$  – модуль зубчатого зацепления;

$z_a, z_g$  – числа зубьев солнечной шестерни и сателлита соответственно;

$J_g$  – момент инерции сателлита относительно оси вращения, проходящей через центр масс;

$m_g$  – масса сателлита;

$n$  – число сателлитов.

Важным являлся вопрос определения угловых жесткостей  $c_i$  звеньев и их коэффициентов диссипаций  $\mu_i$ . Угловые жесткости для наружного кулачка и вала с пазами определялись по аналогии с угловыми жесткостями для зубчатых колес [175]:

$$c = ab_w,$$

где  $c$  – коэффициент для стальных деталей,  $c = 15000$  МПа;

$b_w$  – длина зубьев, мм.

Для наружного кулачка параметр  $b_w$  определялся шириной рабочей поверхности, а для вала с пазами – рабочей длиной паза. Угловая жесткость ведущего вала и двух внутренних кулачков определялась по формуле

$$c = \frac{GJ_p}{l_p} = \frac{G\pi\left(\frac{d_n + d_e}{2}\right)^4}{32l_p},$$

где  $G$  – модуль упругости 2-го рода,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;

$J_p$  – полярный момент инерции;

$l_p$  – длина вала;

$d_n, d_e$  – наружный и внутренний диаметры внутренних кулачков.

Осевые моменты инерции деталей подсчитывались по известным формулам из курса сопротивления материалов. Из-за отсутствия информации и опытных данных коэффициенты диссипации были приняты ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$  Нс/м) по аналогии с коэффициентами диссипации звеньев автомобильной трансмиссии [169]. Коэффициент  $k_p$  был принят равным 5, т. е. за один оборот ведомого вала тело качения совершит пять оборотов вокруг своей оси.

Проанализируем движение системы на основе составленной математической модели при следующих параметрах:  $J_1 = 2,03 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,65 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_3 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_4 = 8,11 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup>,  $c_1 = 17,8 \cdot 10^5$  Н/м,  $c_2 = 312,7 \cdot 10^5$  Н/м,  $c_3 = 0,57 \cdot 10^5$  Н/м,  $M_{B1} = 11,1$  Н·м,  $M_{B2} = 50$  Н·м,  $\eta = 0,9$ . Звенья 2, 3 и 4 в начальный момент времени находятся в покое, а ведущему валу сообщена начальная скорость  $\omega_{10} = 50$  рад/с. Передаточное число ППТК равно 5 ( $Z_1 = 1, Z_3 = 4$ ), амплитуда  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм.

На рисунке 5.4 показаны изменения угловых скоростей, а на рисунке 5.5 – изменения моментов упругих элементов за период времени  $t = 0-0,001$  с и  $t = 0-0,005$  с соответственно.

Из рисунков 5.4 и 5.5 видно, что процесс стабилизации ППТК при указанных параметрах носит апериодический характер. Значения  $M_{y3}$  отражают не реактивный момент на остановленном звене, который определяется из баланса мощностей  $\vec{M}_{B1} + \vec{M}_{B2} + \vec{M}_{R3} = 0$ , а момент, возникающий из-за жесткости и податливости кулачковых выступов (зубьев) звена 3 ( $b$ ).

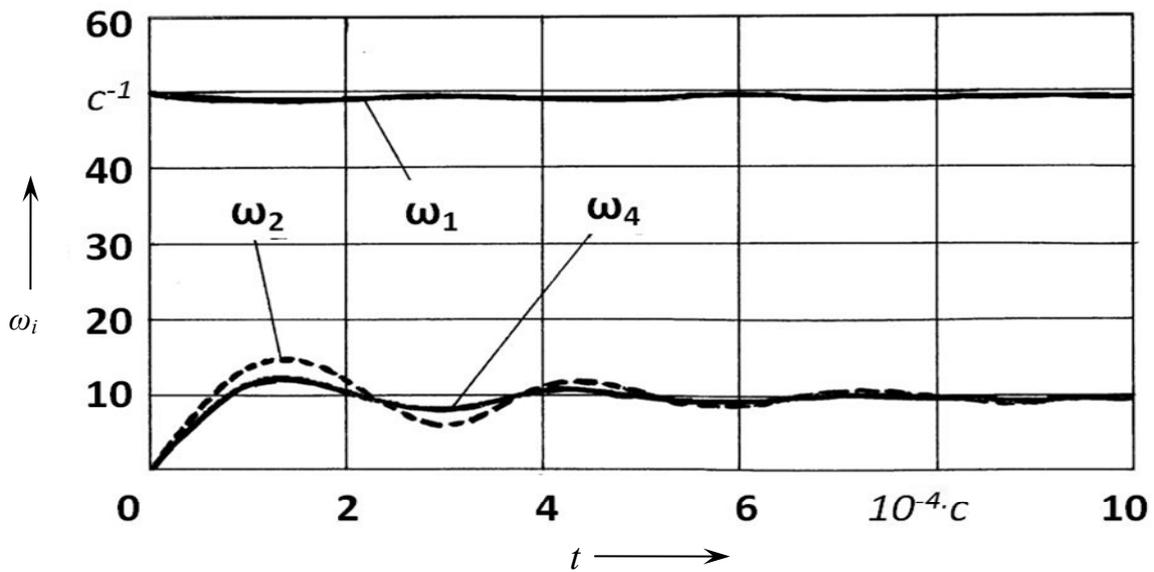


Рисунок 5.4 – Изменение угловых скоростей звеньев ПТК

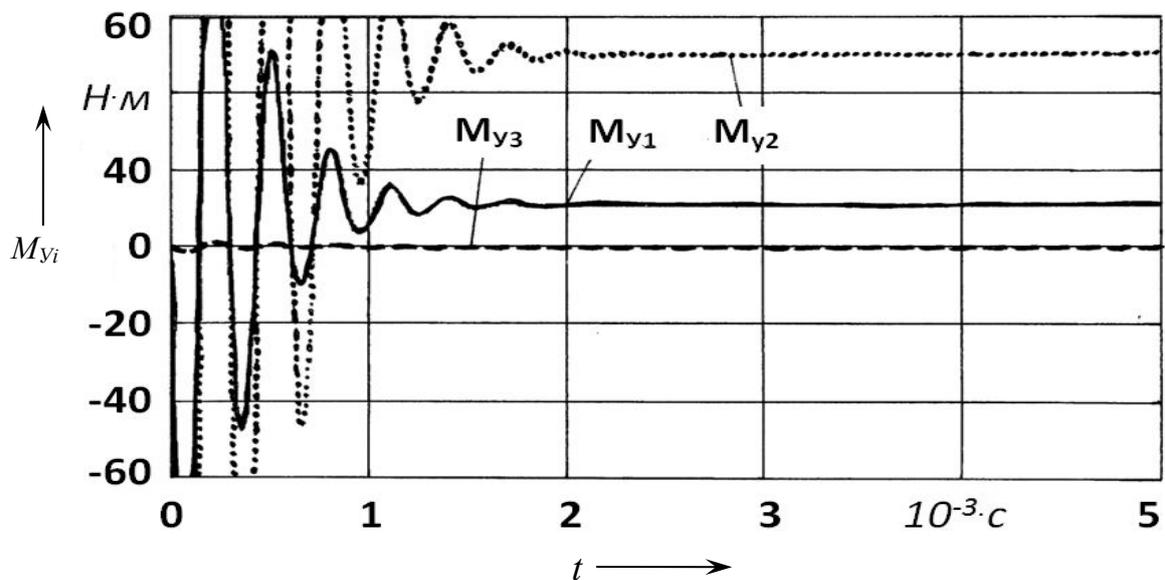


Рисунок 5.5 – Изменение моментов упругих элементов системы

**Анализ статического состояния передачи.** Производные в левых частях уравнений (5.38) и (5.39) примем равными нулю. Также нулю будут равны моменты диссипативных элементов:  $M_{д1} = M_{д2} = M_{д3} = 0$ . При этом

$$\begin{aligned}
 M_{y1} &= M_{B1}; & M_{y2} &= M_{B2}; \\
 M_{y1}u_{12} - M_{y2} - M_{y3} - M_{mp} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

Проинтегрировав выражения для  $M_{y_i}$  в уравнениях (5.32)–(5.34) по времени, получим

$$\begin{aligned}
 M_{y1} &= -c_1(-\varphi_1 + \varphi_4 u_{12}); & M_{y2} &= -c_2(\varphi_2 - \varphi_4); \\
 M_{y3} &= -c_3(-\varphi_4 + \varphi_3^*).
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

Подставив уравнения (5.39) в формулы (5.38), получим систему уравнений, переменными в которой будут углы поворота  $\varphi_i$ . Матрица Якоби данной системы (с учетом соотношения  $\varphi_2 = \varphi_3^*$ ) будет записана в виде

$$\begin{vmatrix}
 c_1 & 0 & -c_1 u_{12} \\
 0 & -c_2 & c_2 \\
 c_1 u_{12} & c_2 + c_3 & -c_1 u_{12}^2 - c_2 - c_3
 \end{vmatrix}.$$

Если собственные значения матрицы Якоби вещественны и отрицательны, приходим к выводу об устойчивости системы, хотя систему дифференциальных уравнений следует признать жесткой, если число обусловленности матрицы Якоби более  $10^5$ .

### **5.3 Оценка механических потерь в ППТК на основе плоской и пространственной моделей зацепления**

Одним из критериев сравнения той или иной конструкции или передачи является механический коэффициент полезного действия (КПД). Теоретической оценкой КПД, несмотря на ее приблизительный характер, не следует пренебрегать, т. к. она позволяет определить основные геометрические параметры передачи, приближенные к оптимальным, и наиболее благоприятные режимы ее работы на стадии проектирования. В дальнейшем необходимо практическое подтверждение результатов теоретических расчетов КПД.

Общий КПД ППТК, как и любого механизма,

$$\eta = \frac{P_{вых}}{P_{вх}} = \frac{P_{вх} - P_{TP}}{P_{вх}} = 1 - \frac{P_{TP}}{P_{вх}} = 1 - \frac{P_{TP.3} + P_{TP.0}}{P_{вх}},$$

где  $P_{вх}$  – средняя мощность на входном звене передачи;  
 $P_{вых}$  – средняя мощность на выходном звене передачи;  
 $P_{ТР}$  – средняя мощность сил трения;  
 $P_{ТР.з}$  – мощность сил трения в зацеплении;  
 $P_{ТР.о}$  – мощность сил трения в опорах.

Оценим механические потери в зацеплении. Для этого обратимся к плоской модели контакта одного тела качения с рабочими поверхностями деталей передачи. При этом условимся считать  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , т. к. при рассмотрении реального зацепления влияние этих радиусов на нагрузочную способность и КПД ППТК неоднозначно.

Вопрос взаимодействия промежуточного тела (плунжера) с поверхностями трех тел рассмотрен при анализе работы автомобильных кулачковых дифференциалов [176, 177]. Некоторые вопросы силового анализа исследуемых передач рассмотрены в [178–181]. В общем случае применительно к планетарным передачам с телами качения (первая кинематическая схема) замкнутый треугольник сил, действующий на шарик (плунжер), приведен на рисунке 5.6.

По теореме синусов (см. рисунок 5.6)

$$\frac{P_1}{\cos(\alpha_3 - 2\phi)} = \frac{P_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)} = \frac{P_3}{\cos(\alpha_1 + 2\phi)}. \quad (5.40)$$

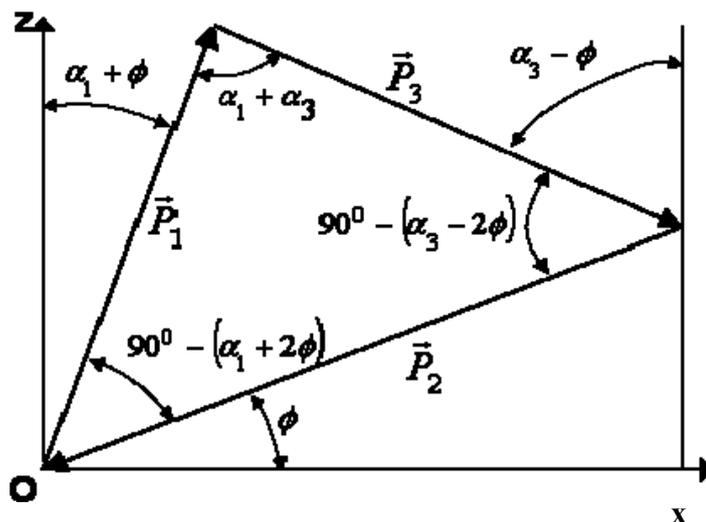


Рисунок 5.6 – Система сил, действующих на шарик ППТК (плоская фрикционная модель зацепления), для кинематических схем № 1, 2 и 4

Найдем зависимость силы  $P_2$  от силы  $P_1$ :

$$P_2 = P_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)}{\cos(\alpha_3 - 2\phi)}.$$

С учетом выражений

$$P_1 = \frac{M_1}{R \sin(\alpha_1 + \phi)}; \quad N_2 = \frac{M_2}{R}; \quad N_2 = P_2 \cos \phi,$$

выражение для момента  $M_2$  запишется как

$$M_2 = N_2 R = P_2 R_2 \cos \phi = M_1 \frac{\cos \phi \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)} = M_1 K_\alpha, \quad (5.41)$$

где  $K_\alpha$  – коэффициент передачи.

Мгновенный КПД зацепления для первой кинематической схемы

$$\eta_{12}^{(3)} = P_{\text{вых}} / P_{\text{вх}} = M_2 \omega_2 / M_1 \omega_1. \quad (5.42)$$

Преобразуя уравнение (5.42), учтем, что для первой кинематической схемы  $\omega_2 / \omega_1 = 1/u$ . Подставив выражение (5.41) в выражение (5.42), окончательно получим

$$\eta_{13}^{(2)} = K_\alpha / u = \frac{\cos \phi \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)}. \quad (5.43)$$

Можно выразить из уравнения (5.40) зависимость сил  $P_1$  и  $P_3$ , чтобы определить КПД передачи при второй кинематической схеме:

$$\eta_{13}^{(2)} = \frac{M_3 \omega_3}{M_1 \omega_1} = \frac{\sin(\alpha_3 - \phi) \cos(\alpha_1 + 2\phi)}{\sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)}. \quad (5.44)$$

Для кинематических схем № 5 и 6 силовой многоугольник представлен на рисунке 5.7.

Теорема синусов запишется следующим образом:

$$\frac{P_1}{\cos(\alpha_3 + 2\phi)} = \frac{P_3}{\cos(\alpha_1 - 2\phi)} = \frac{P_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)}. \quad (5.45)$$

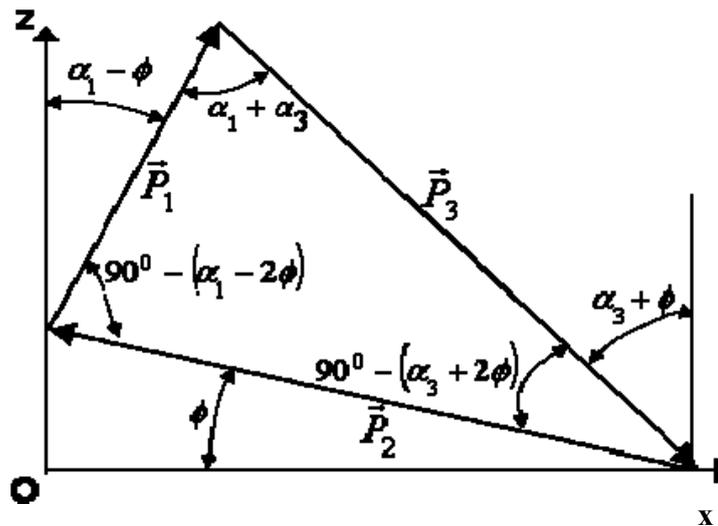


Рисунок 5.7 – Силовой треугольник для кинематических схем № 3, 5 и 6

КПД для кинематических схем № 5 и 6 соответственно:

$$\eta_{31}^{(2)} = \frac{M_1 \omega_1}{M_3 \omega_3} = \frac{1}{u} \cdot \frac{P_1 \sin(\alpha_1 - \phi)}{P_3 \sin(\alpha_3 + \phi)} = \frac{1}{u} \cdot \left( \frac{\cos(\alpha_3 + 2\phi) \cdot \sin(\alpha_1 - \phi)}{\cos(\alpha_1 - 2\phi) \cdot \sin(\alpha_3 + \phi)} \right). \quad (5.46)$$

$$\eta_{32}^{(1)} = \frac{M_2 \omega_2}{M_3 \omega_3} = \frac{1}{u} \cdot \frac{P_2 \cos \phi}{P_3 \sin(\alpha_3 + \phi)} = \frac{1}{u} \cdot \left( \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_3) \cdot \cos \phi}{\cos(\alpha_1 - 2\phi) \cdot \sin(\alpha_3 + \phi)} \right). \quad (5.47)$$

Для кинематической схемы № 3 силовой треугольник также определяется схемой, изображенной на рисунке 5.7:

$$\eta_{21}^{(3)} = \frac{1}{u} \cdot \left( \frac{\cos(\alpha_3 + 2\phi) \cdot \sin(\alpha_1 - \phi)}{\cos \phi \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_3)} \right). \quad (5.48)$$

Для кинематической схемы № 4 силовой треугольник определяется схемой, изображенной на рисунке 5.6:

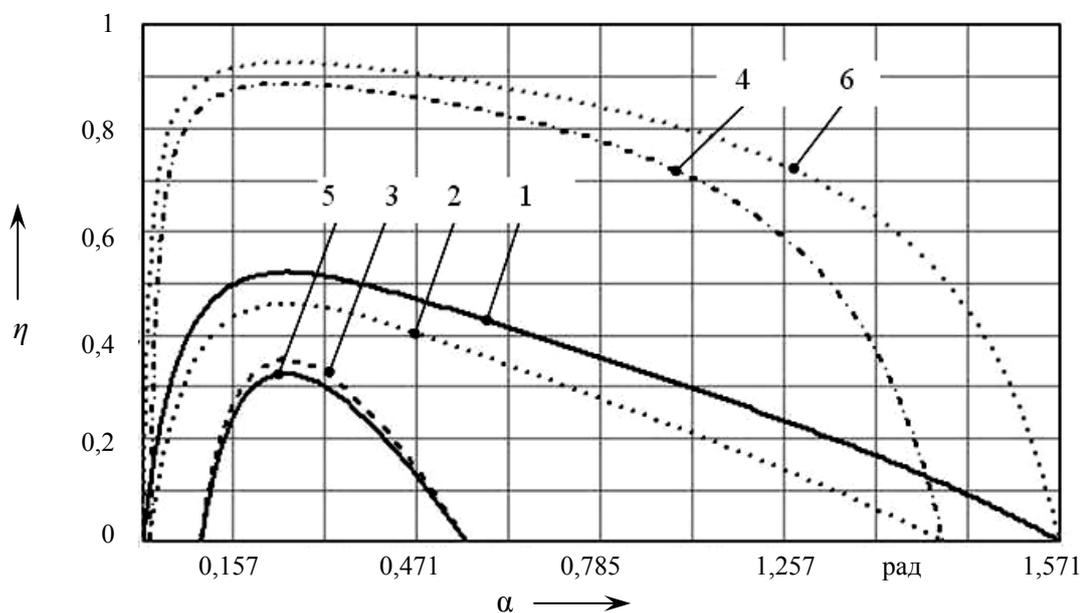
$$\eta_{23}^{(1)} = \frac{1}{u} \cdot \left( \frac{\cos(\alpha_1 + 2\phi) \cdot \sin(\alpha_3 - \phi)}{\cos \phi \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_3)} \right). \quad (5.49)$$

Выражения для определения мгновенного КПД для всех кинематических схем ППТК сведены в таблицу 5.3 [182].

Таблица 5.3 – Выражение для определения КПД ППТК

Номер кинематической схемы	Выражение для определения мгновенного КПД зацепления	Номер кинематической схемы	Выражение для определения мгновенного КПД зацепления
1	$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_3) \cos \phi}{u \sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)}$	4	$\frac{\sin(\alpha_3 - \phi) \cos(\alpha_1 + 2\phi)}{u \cos \phi \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}$
2	$\frac{\sin(\alpha_3 - \phi) \cos(\alpha_1 + 2\phi)}{u \sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)}$	5	$\frac{\sin(\alpha_1 - \phi) \cos(\alpha_3 + 2\phi)}{u \sin(\alpha_3 + \phi) \cos(\alpha_1 - 2\phi)}$
3	$\frac{\sin(\alpha_1 - \phi) \cos(\alpha_3 + 2\phi)}{u \cos \phi \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}$	6	$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_3) \cos \phi}{u \sin(\alpha_3 + \phi) \cos(\alpha_1 - 2\phi)}$

На рисунке 5.8 показана графическая зависимость мгновенного КПД ППТК от угла подъема  $\alpha_1$  в одной ячейке зацепления для различных кинематических схем при коэффициенте трения скольжения  $f = 0,1$  и параметрах передач  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ .



1 – для схемы № 1; 2 – для схемы № 2; 3 – для схемы № 3; 4 – для схемы № 4; 5 – для схемы № 5; 6 – для схемы № 6

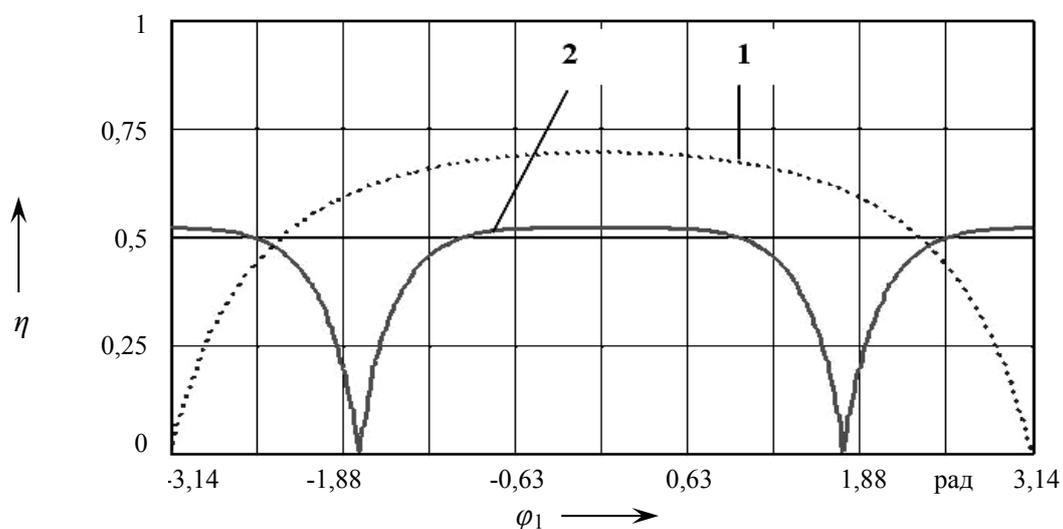
Рисунок 5.8 – Зависимость мгновенного КПД ППТК для различных кинематических схем

Анализируя графические зависимости на рисунке 5.8, можно сделать следующие выводы.

1 Максимальный КПД достижим в схемах № 4 и 6, однако их практическая полезность неоднозначна – передаточное отношение при указанных параметрах равно 0,9 и 1,11 соответственно. Наиболее целесообразна для использования схема № 1.

2 Передача движения осуществима при любых значениях углов подъема кривых (за исключением 0 и  $90^0$ , что очевидно) в схемах № 1 и 6. В остальных схемах существуют диапазоны {от 0 до  $\alpha_1$ } и {от  $\alpha_2$  до  $\pi/2$ }, при которых КПД отрицателен (передача движения невозможна из-за явления самоторможения).

Из рисунка 5.8 также видно, что все зависимости имеют максимум приблизительно при  $\alpha_{1(3)} = 35^0$ . На рисунке 5.9 приведена зависимость мгновенного КПД ППТК от угла поворота ведущего вала для схемы № 1 за цикл зацепления для двух случаев ( $Z_1 = Z_3 = 1$  и  $Z_1 = 1, Z_3 = 8$  при фиксированных значениях других параметров:  $A = 10$  мм,  $R = 40$  мм,  $f = 0,1$ ).



1 – однопериодное зацепление; 2 – многопериодное зацепление

Рисунок 5.9 – Зависимость мгновенного КПД в одной ячейке зацепления ППТК от угла поворота ведущего вала за цикл зацепления

Мгновенный КПД при рассмотрении контакта одного тела качения становится равным нулю при попадании его на вершины кривых (см. рисунок 5.9).

При разработке пространственной модели очевидно приближение к реальному процессу по сравнению с плоской моделью, т. к. мы уходим от некоторых допущений, упрощавших действительную картину зацепления.

Рассмотрим укрупненно алгоритм силового анализа, основанный на методе кинестатики, на примере одной из разновидностей ППТК. Выберем единую систему координат для всех рассматриваемых тел так, чтобы ось  $Oz$  совпадала с осью передачи, за нулевое положение примем положение одного тела качения в точке с максимальным значением углов подъема беговых дорожек. Анализируем первую кинематическую схему ППТК. Схема силового взаимодействия приведена на рисунке 5.10.

Заданными считаются момент полезных сопротивлений на выходном валу  $M_2$ , геометрические параметры передачи и коэффициент трения скольжения  $f$ . Известными считаются также угловые скорости и ускорения звеньев, а также зависимости между угловыми скоростями и углами поворота после проведенного кинематического анализа ППТК.

1 Определяем значение реакции  $N_2$  :

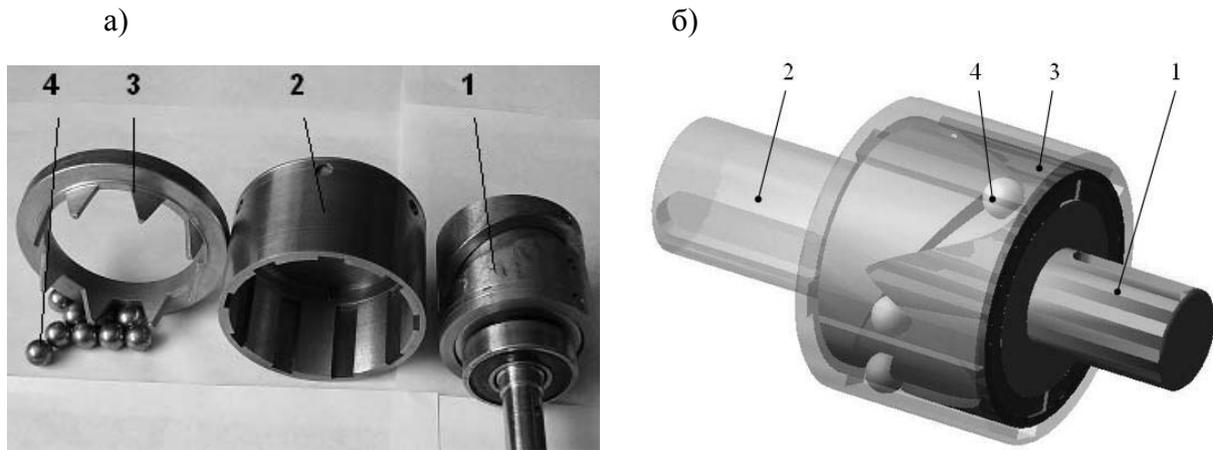
$$N_2 = \frac{M_2 + I_{z2}\varepsilon_2 + M_{TP2}}{R_2 n \cos \beta}. \quad (5.50)$$

2 Рассматриваем кинестатическое равновесие системы тел качения и решаем совместно систему уравнений  $\sum F_{xi} = 0$ ;  $\sum F_{yi} = 0$ ;  $\sum F_{zi} = 0$  для тела качения (рисунок 5.10, е):

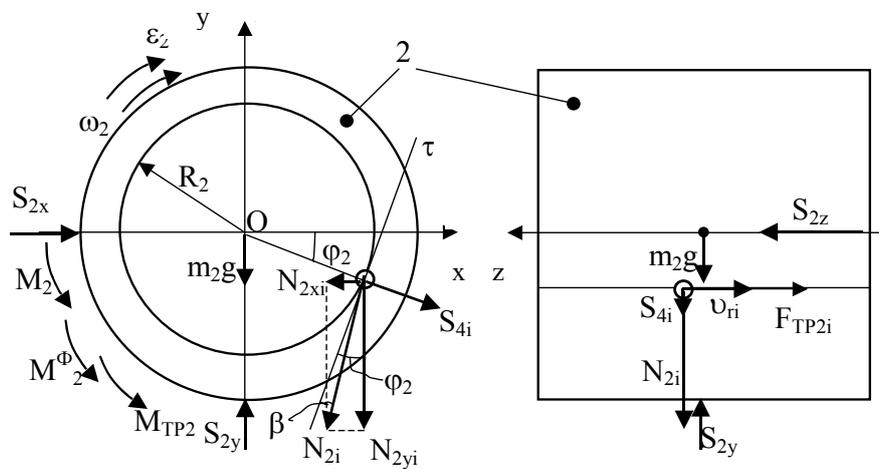
$$S_4 n = -N_2 n \sin \beta + m_s R n \omega_2^2; \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} N_1 \sum_{i=0}^{n-1} (\sin |\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) + N_3 \sum_{i=0}^{n-1} (\sin |\alpha_{3i}| - f \cdot \text{sign}(\alpha_{3i}) \cos \alpha_{3i}) = \\ = n N_2 \cos \beta; \end{aligned} \quad (5.52)$$

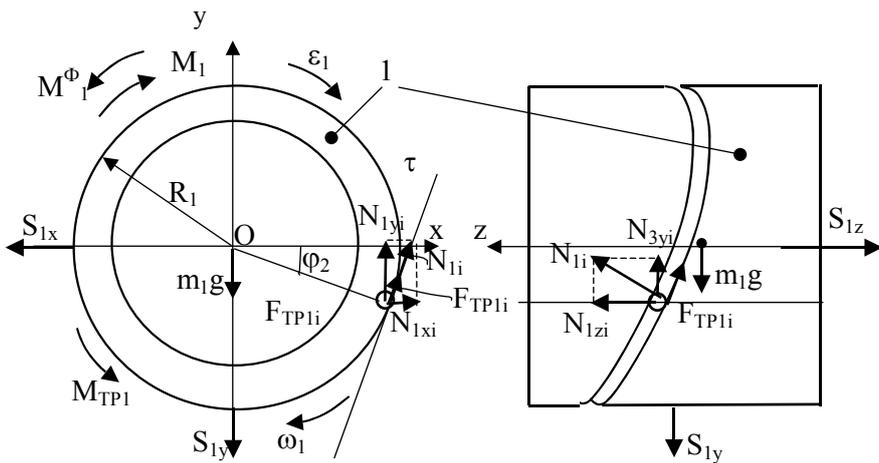
$$\begin{aligned} N_1 \sum_{i=0}^{n-1} (f \sin |\alpha_{1i}| - \cos \alpha_{1i}) + N_3 \sum_{i=0}^{n-1} (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i}) + S_4 f n = \\ = -N_2 f n + m_s \sum_{i=0}^{n-1} \frac{AZ_3^2}{u^2} \omega_1^2 \sin \left( \varphi_{2i} + \frac{2\pi i}{n} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$



в)

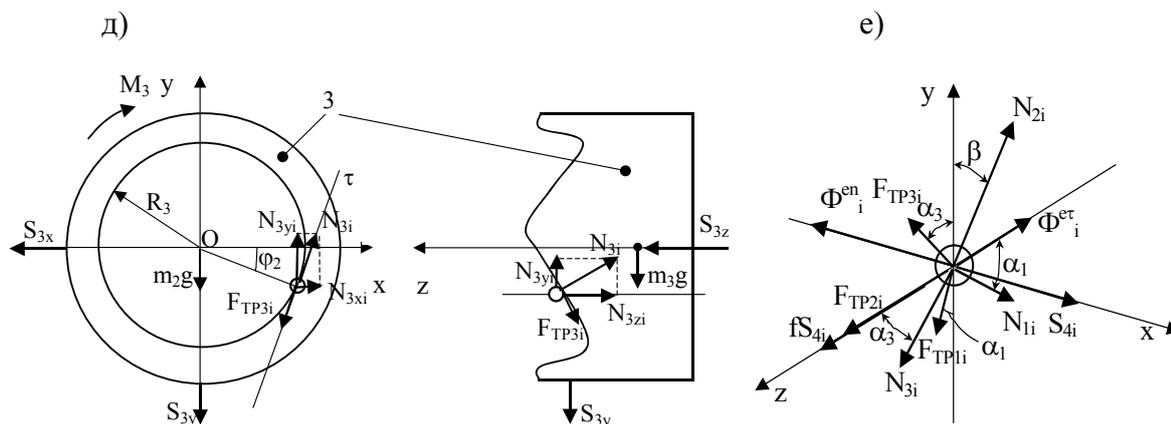


г)



а – основные детали; б – модель передачи; в – вал с пазами (2); г – внутренний кулачок (1); д – наружный кулачок (3); е – тело качения;  $\Phi$  – силы инерции,  $g$  – ускорение свободного падения

Рисунок 5.10 – Исследуемая ПШТК



Окончание рисунка 5.10

Находим значения реакций  $N_1$ ,  $N_3$  и  $S_4$  в матричной форме, представив систему уравнений (5.51)–(5.53) равновесия в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}N_1 + a_{12}N_3 + a_{13}S_4 &= b_1; \\ a_{21}N_1 + a_{22}N_3 + a_{23}S_4 &= b_2; \\ a_{31}N_1 + a_{32}N_3 + a_{33}S_4 &= b_3. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_1 \\ N_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

где  $a_{11}, \dots, a_{33}$  – коэффициенты при реакциях  $N_1$ ,  $N_3$  и  $S_4$  в системе уравнений;

$b_1, b_2, b_3$  – выражения, стоящие в правых частях уравнений (проекции реакции  $N_2$  и сил инерции).

3 Поочередно составляем и решаем системы уравнений  $\Sigma F_{xi} = 0$ ;  $\Sigma F_{yi} = 0$ ;  $\Sigma F_{zi} = 0$ ;  $\Sigma M_{zi} = 0$  для звеньев 1, 2 и 3 согласно схемам, изображенным на рисунке 5.10, в–д. Из данных систем определяются крутящие моменты  $M_1$  и  $M_3$ , а также составляющие внешних реакций  $S_{2x}$ ,  $S_{2y}$ ,  $S_{2z}$ ,  $S_{1x}$ ,  $S_{1y}$ ,  $S_{1z}$  и  $S_{3x}$ ,  $S_{3y}$ ,  $S_{3z}$ . Значения полных реакций, образованных этими составляющими, определяют силы давления передачи на опоры (подшипники).

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2 + S_{1z}^2}; \quad S_2 = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2 + S_{2z}^2}; \\ S_3 &= \sqrt{S_{3x}^2 + S_{3y}^2 + S_{3z}^2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Составляющие реакций в выражениях (5.54) с индексами «x» и «y» характеризуют радиальные нагрузки, а с индексами «z» – осевые нагрузки на подшипники. Аналогично определяется и результирующая реакция  $\vec{S}_2$ , действующая на вал с пазами 2 со стороны кулачков 1 и 3. По значению реакции  $\vec{S}_2$  подбирают подшипники качения.

Рассмотрим результаты функционирования разработанной модели на конкретном примере. Имеем передачу с параметрами  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $R = 20$  мм,  $A = 10$  мм,  $r_s = 3$  мм (остальные геометрические параметры являются производными от указанных). Частота вращения ведущего вала  $n_1 = 1000$  об/мин. Режим работы – установившийся. Крутящий момент на выходном валу  $M_2 = 200$  Н·м, коэффициент трения принят  $f = 0,05$ .

Результаты (средние значения за цикл зацепления):  $N_2 = 1,2$  кН,  $N_1 = 505$  Н,  $N_3 = 1$  кН,  $S_{1x} = S_{1y} \approx 0$  Н,  $S_{1z} = 574$  Н,  $S_2 = 31$  Н,  $S_{3x} \approx 0$  кН,  $S_{3y} = 5,4$  кН,  $S_{3z} = 4$  кН,  $S_4 = 594$  Н,  $M_1 = 31,3$  Н·м,  $M_3 = 1,9$  Н·м,  $\eta = 0,71$ .

Мгновенные значения сил и КПД колеблются относительно некоторого среднего значения за цикл зацепления (поворота ведомого вала на угол  $2\pi$ ). Это связано с непостоянством суммы синусов и косинусов углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ . Однако величина этих колебаний незначительна. Например, максимальное отклонение КПД от среднего значения при указанных параметрах составляет около  $\Delta\eta = 0,04$ . При увеличении значений  $Z_3$  эти колебания уменьшаются (например, при  $Z_3 = 20$ ,  $\Delta\eta = 0,016$ ).

#### **5.4 Оптимизация геометрических параметров ППТК и рекомендации по повышению КПД передач**

Фактически только два последних уравнения из системы (5.51)–(5.53) определяют значения реакций  $N_1$  и  $N_3$ . Первое уравнение позволяет определить только реакцию  $S_4$ . Рассматривая установившийся режим работы и пренебрегая силами тяжести деталей передачи, выразим из выражения (5.52) реакцию  $N_3$ :

$$N_3 = \frac{N_1 \sum_{i=1}^n (\cos(\alpha_{1i}) - f \sin(|\alpha_{1i}|)) - N_2 fn - S_4 fn}{\sum_{i=1}^n (\cos(\alpha_{3i}) + f \sin(\alpha_{3i}))}, \quad (5.55)$$

Подставив в выражение (5.51) формулу (5.55), получим зависимость между реакциями на ведущем и ведомом звеньях:

$$K_1 N_1 = K_2 N_2 + K_3, \quad (5.56)$$

где  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  – коэффициенты.

$$K_1 = \sum_{i=1}^n (\sin|\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) + \frac{\sum_{i=1}^n (\cos \alpha_{1i} - f \sin(|\alpha_{1i}|))}{\sum_{i=1}^n (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i})} \left( \sum_{i=1}^n (\sin|\alpha_{3i}| - f \cdot \text{sign}(\alpha_{3i}) \cos \alpha_{3i}) \right). \quad (5.57)$$

$$K_2 = n \left[ \begin{array}{l} \cos \beta + \frac{f(1 - \sin \beta)}{\sum_{i=1}^n (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i})} \times \\ \times \left( \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{3i}|) - f \cdot \text{sign}(\alpha_{3i}) \cos \alpha_{3i}) \right) \end{array} \right]. \quad (5.58)$$

$$K_3 = \frac{m_s R n \omega_2^2}{\sum_{i=1}^n (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i})} \left( \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{3i}|) - f \cdot \text{sign}(\alpha_{3i}) \cos \alpha_{3i}) \right). \quad (5.59)$$

Учитывая, что крутящий момент на ведущем и ведомом валах можно определить согласно выражениям

$$M_1 = N_1 R_1 \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{1i}|) + f \cos \alpha_{1i}), \quad M_2 = N_2 R_2 n \cos \beta, \quad (5.60)$$

и используя известную зависимость для определения КПД  $\eta = M_2 / M_1 u$ , можно показать, что

$$\eta = \frac{N_2 R_2 n \cos \beta}{u N_1 R_1 \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{1i}|) + f \cos \alpha_{1i})}. \quad (5.61)$$

Выразив из выражения (5.56) отношение  $N_2/N_1$  и подставив его в формулу (5.61), получим

$$\eta^* = \frac{R_2}{R_1} \frac{n \cos \beta}{u \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{1i}|) + f \cos(\alpha_{1i}))} \frac{K_1 - K_3 / N_1}{K_2}. \quad (5.62)$$

Функцию  $\eta^*$  целесообразно определить не как КПД, а как коэффициент передачи, т. к. при его определении присутствуют соотношения радиусов  $R_1$  и  $R_2$ .

Рассмотрим выражение (5.62) со следующими допущениями: отношение радиусов  $R_2$  и  $R_1$  примем равным единице, угол  $\beta$  – нулю (плоская модель), при этом рассматриваем картину зацепления в статике – коэффициентом  $K_3$ , зависящим от скоростей вращения звеньев, пренебрегаем. В этом случае

$$\eta^* = \frac{nK_1}{uK_2 \sum_{i=1}^n (\sin(|\alpha_{1i}|) + f \cos(\alpha_{1i}))}. \quad (5.63)$$

Аналитически исследовать зависимость (5.63) неудобно, т. к. там присутствуют многочисленные суммирования. Если рассмотреть модель для определения мгновенного КПД зацепления для одного тела качения для первой кинематической схемы, которая представлена в таблице 5.3, и преобразовать ее для всего зацепления, то можно получить следующую формулу:

$$\eta_{12}^{(3)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sin(\alpha_1 + \alpha_3) \cos \phi}{u \sum_{i=0}^{n-1} \sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)}. \quad (5.64)$$

Уже на стадии проектирования необходимо оценить КПД. Выражение для его определения при разработке инженерной методики расчета не должно быть громоздким и не должно содержать функций суммирования. На основании ранее проведенных исследований получены несколько формул для этой оценки.

Во-первых, это преобразованное выражение из таблицы 5.3, где мгновенные значения углов подъема заменены их средними значениями. Обозначим его  $\eta_1$ :

$$\eta_1 = \frac{\sin(\alpha_{1cp} + \alpha_{3cp}) \cos \phi}{u \sin(\alpha_{1cp} + \phi) \cos(\alpha_{3cp} - 2\phi)}. \quad (5.65)$$

Во-вторых, это выражение (5.63), которое обозначим  $\eta_2$ .

Соответствие формул (5.63) и (5.65) реальной картине зацепления необходимо проверить с использованием зависимости (5.64) из таблицы 5.3 без использования средних углов подъема кривых, обозначив КПД  $\eta_3$ .

Также необходимо принять во внимание КПД, полученный на основе алгоритма пространственного силового анализа, рассмотренного в предыдущем пункте работы с применением выражения  $\eta = M_2/(M_1u)$  – КПД оказался равным 0,7–0,71. К этому значению нужно приближаться, т. к. в пространственной фрикционной модели было учтено большинство факторов.

Результаты сопоставления графически представлены на рисунке 5.11.

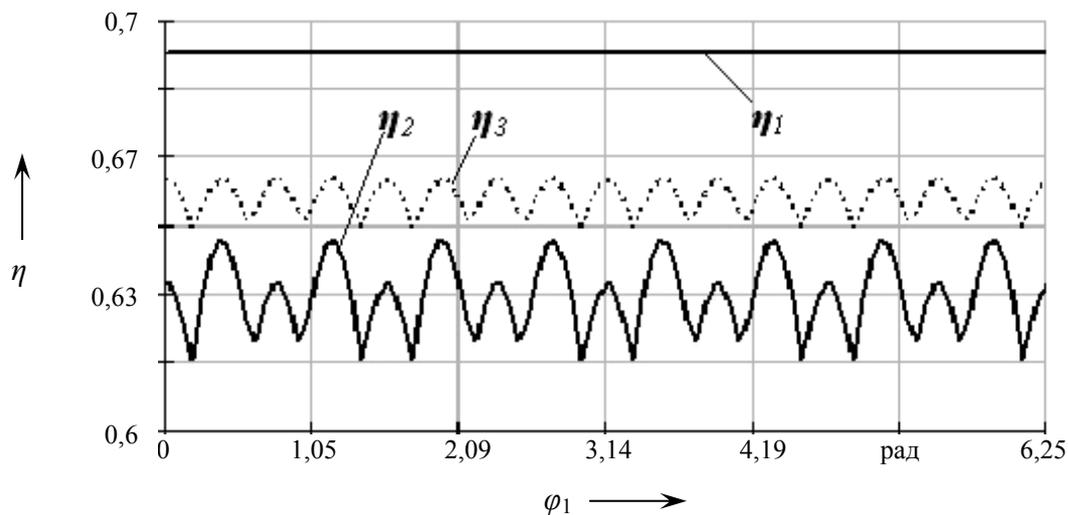


Рисунок 5.11 – К определению КПД на стадии проектирования

Из графиков на рисунке 5.11 следует, что значения, полученные согласно зависимости (5.65) наиболее близки к КПД, полученному на основе пространственной фрикционной модели передачи. Ее и будем использовать для инженерных расчетов. Значения  $\eta_2$  увеличатся и графики  $\eta_2$  и  $\eta_3$  совпадут, если не пренебрегать углом  $\beta$ . Оба графика  $\eta_2$  и  $\eta_3$  приблизятся к действительному значению КПД, если будет учтено соотношение  $R_2/R_1$ .

*Определение оптимального значения амплитуды.* Основными параметрами зацепления являются радиус расположения центров

шариков  $R$  и амплитуда  $A$ . Если радиус  $R$  во многом определяется максимально допустимыми габаритами, в которые необходимо встроить передачу, то амплитуду  $A$  необходимо оптимизировать по критерию минимальных механических потерь.

Преобразуем выражение для определения мгновенного КПД ППТК для первой кинематической схемы, приведенное в таблице 5.3. Выразим его при этом через угол  $\alpha_1$ .

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1) &= \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_3) \cos \phi}{u \sin(\alpha_1 + \phi) \cos(\alpha_3 - 2\phi)} = \\ &= \frac{(\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_3) \cos \phi}{u \sin(\alpha_1 + \phi) (\cos \alpha_3 \cos(2\phi) + \sin \alpha_3 \sin(2\phi))}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Разделим выражение (5.66) на  $\cos \alpha_3$ , предполагая, что передача при  $\alpha_3 = 90^\circ$  не существует.

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1) &= \frac{(\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3) \cos \phi}{u \sin(\alpha_1 + \phi) (\cos(2\phi) + \operatorname{tg} \alpha_3 \sin(2\phi))} = \\ &= \frac{\left( \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) \cos \phi}{\left( \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} \right) \sin(\alpha_1 + \phi) \left( \cos(2\phi) + \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin(2\phi) \right)} = \\ &= \frac{\sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right) \cos \phi}{\left( \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} \right) \sin(\alpha_1 + \phi) \left( \cos(2\phi) + \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin(2\phi) \right)} = \\ &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \phi}{\sin(\alpha_1 + \phi) \left( \cos(2\phi) + \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin(2\phi) \right)}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Взяв производную от выражения (5.68) по  $d\alpha_1$ , приравняв ее к нулю, определим угол, при котором осуществим оптимум функции  $\eta(\alpha_1)$ . После преобразования этот оптимум будет определен согласно выражению

$$\alpha_{1onm} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{2Z_3Z_1 - \operatorname{tg}^2 \phi}}{2Z_3} \right). \quad (5.68)$$

Проанализируем, зависит ли оптимум угла  $\alpha_1$  от кинематической схемы. Рассмотрим вторую кинематическую схему. При этом

$$\eta(\alpha_1) = \frac{\left( \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \phi - \sin \phi \right) \cos(\alpha_1 + 2\phi)}{\frac{Z_3}{Z_1} \sin(\alpha_1 + \phi) \left( \cos 2\phi + \frac{Z_3}{Z_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin 2\phi \right)}. \quad (5.69)$$

$$\alpha_{1onm} = -\phi + \operatorname{arctg} \left( \frac{Z_1 \sin \phi (2 \cos^3 \phi - \cos \phi) + 2Z_3 \cos^3 \phi \sin \phi + \sqrt{2(\cos^2 \phi \cdot Z_1 Z_3 (2 \cos^2 \phi - 1))}}{Z_1 (1 - 3 \cos^2 \phi + 2 \cos^4 \phi) + 2Z_3 \cos^4 \phi} \right). \quad (5.70)$$

Сравнение выражений (5.68) и (5.70) с помощью средств ЭВМ показало их абсолютную идентичность. Кроме этого, независимость значения оптимального угла  $\alpha_1$  от кинематической схемы передачи подтверждается наглядным графиком (см. рисунок 5.8). Поэтому исследовать будем формулу (5.68) как менее громоздкую.

Так как в многопериодной ППТК многопарное зацепление, то при проектировании передачи угол  $\alpha_{1onm}$  можно принимать средним углом, который определяется из уравнения (4.14). Тогда

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{2A}{\pi R} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{2Z_3Z_1 - \operatorname{tg}^2 \phi}}{2Z_3} \right) \Rightarrow A_{onm} = \frac{\pi R \sqrt{2Z_3Z_1 - \operatorname{tg}^2 \phi}}{4Z_3}. \quad (5.71)$$

#### *Оптимизация величины заглубления шарика в детали передачи.*

При заглублении шарика во внутренний кулачок на величину  $r_s$  или более реакция взаимодействия тел направлена по касательной к окружности радиусом  $R$  (рисунок 5.12, а). При заглублении шарика на величину, меньшую  $r_s$ , реакция  $N_1$  отклоняется от касательной на угол  $\gamma$ . Рассмотрим выражение, согласно которому определяется момент  $M_1$ . В случае, когда  $\gamma \neq 0$ , действительная реакция внутреннего кулачка будет

равна  $N_1/\cos\gamma$ . Это увеличение не отразится на окружную составляющую силы, однако на увеличении силы трения скажется заметно.

В модели, изображенной на рисунке 5.12, б, были учтены некоторые допущения. Угол  $\beta$  определяется по формуле  $\beta = \arcsin(1 - r_{z2}/R)$  как угол между направлением вектора силы  $N_2$  и горизонталью (а не касательной к окружности радиусом  $R_2$ ), т. к. разница в значениях углов  $\beta$  и  $\beta'$  незначительна. Также направления сил  $N_1$  и  $N_3$  по схеме на рисунке 5.12 приняты горизонтальными.

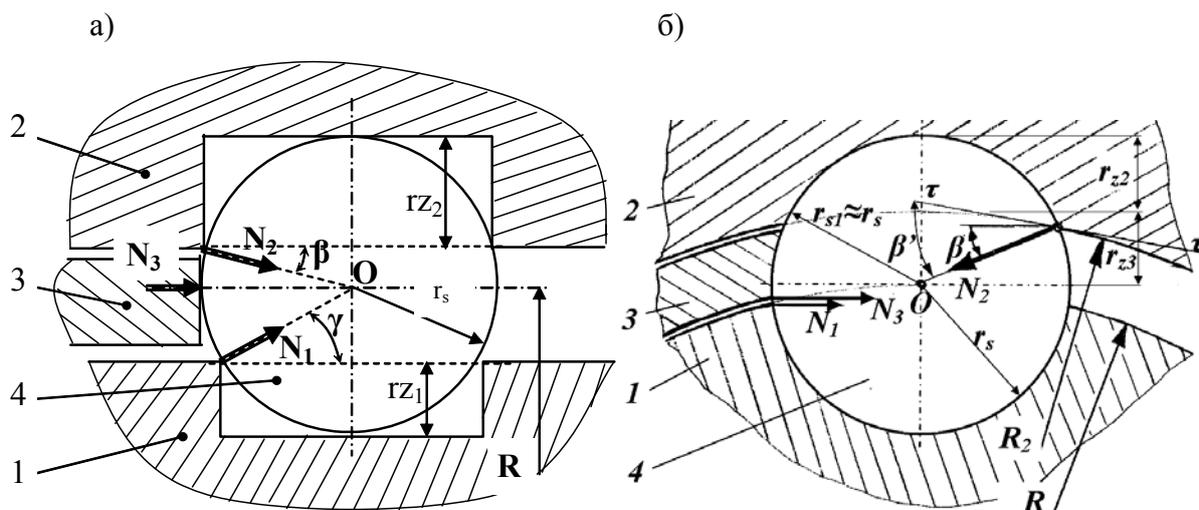


Рисунок 5.12 – К вопросу о величине заглубления шарика в детали ППТК

Выражение для  $M_1$  из условия кинестатического равновесия ведущего вала запишется в виде

$$M_1 = \frac{N_1}{\cos\gamma} R_1 \sum_{i=0}^{n-1} (\sin|\alpha_{1i}| \cos\gamma + f \cos\alpha_{1i}). \quad (5.72)$$

При этом динамические нагрузки не учитываем. При изменении угла  $\gamma$  радиус  $R_1$  также изменяется.

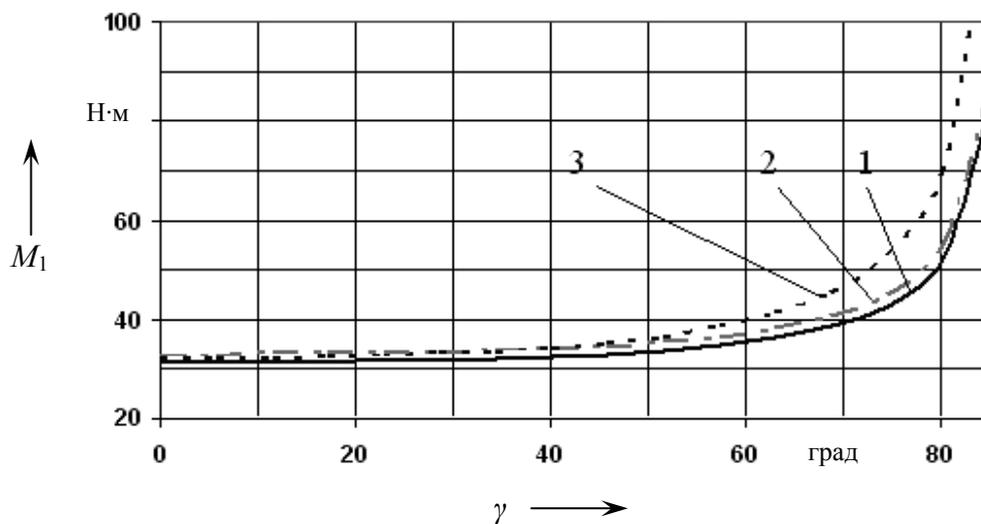
$$R_1 = R - r_s \sin\gamma. \quad (5.73)$$

Проанализируем, как изменяется крутящий момент  $M_1$  на входном валу передачи, для того, чтобы обеспечить крутящий момент на выходном валу  $M_2 = 200$  Н·м. Параметры передачи:  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $r_s = 3$  мм,  $R = 20$  мм,  $A = 10$  мм,  $f = 0,05$ . Рассмотрим также, как изменяется при

этом КПД передачи, определяемый по формуле

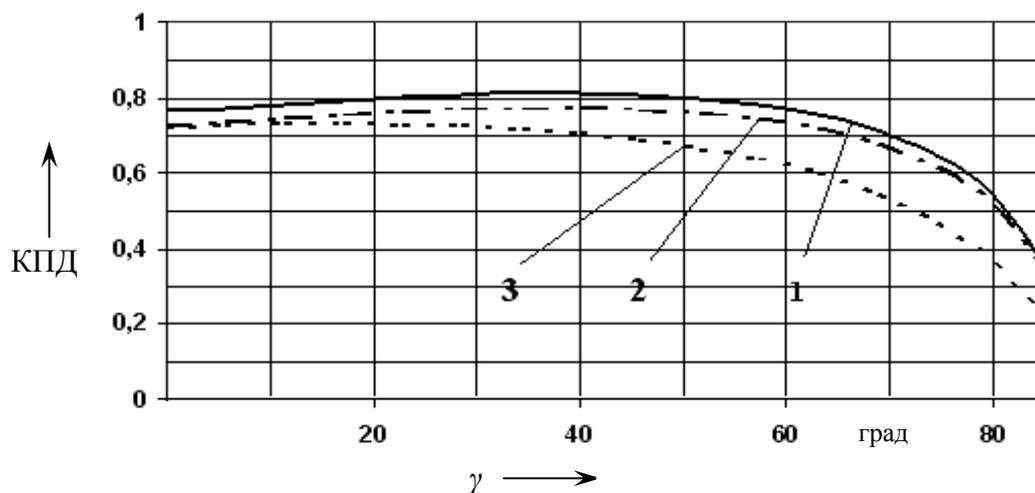
$$\eta' = M_2 / uM_1. \quad (5.74)$$

Функция  $R_2/R_1$  была введена в формулу для определения КПД, т. к. она присутствует в коэффициенте передачи. Результаты анализа представлены на рисунках 5.13 и 5.14.



1 –  $R = 20$  мм,  $f = 0,05$ ; 2 –  $R = 20$  мм,  $f = 0,1$ ; 3 –  $R = 40$  мм,  $f = 0,05$

Рисунок 5.13 – Изменение момента  $M_1$  от угла  $\gamma$



1 –  $R = 20$  мм,  $f = 0,05$ ; 2 –  $R = 20$  мм,  $f = 0,1$ ; 3 –  $R = 40$  мм,  $f = 0,05$

Рисунок 5.14 – Изменение КПД от угла  $\gamma$

Анализ этих графиков показывает, что с увеличением значения угла  $\gamma$  момент  $M_1$  возрастает сначала плавно, затем достаточно резко. График КПД имеет оптимум при некотором значении угла  $\gamma$ , которое, однако, стремится к нулю при увеличении соотношения  $R/r_s$ . На рисунках 5.13 и 5.14 линиями с индексом 3 показаны соответствующие зависимости при  $R = 40$  мм и прочих равных параметрах.

Таким образом, в силовых передачах угол  $\gamma$  следует принимать равным нулю и проектировать заглабление шарика во внутренний кулачок на величину  $rz_1 = r_s$ . Приближенность его к оптимальному значению (отличному от нуля для малогабаритных передач) на практике будет обеспечена благодаря кривизне поверхностей кулачка (на рисунке 5.13 кривизна радиусом  $R$  не учтена), а также естественному износу контактирующих кромок.

*Заглабление в тело вала с пазами.* Рассмотрим выражение (5.61) и проанализируем его с помощью ЭВМ, изменяя угол  $\beta$  (рисунок 5.15).

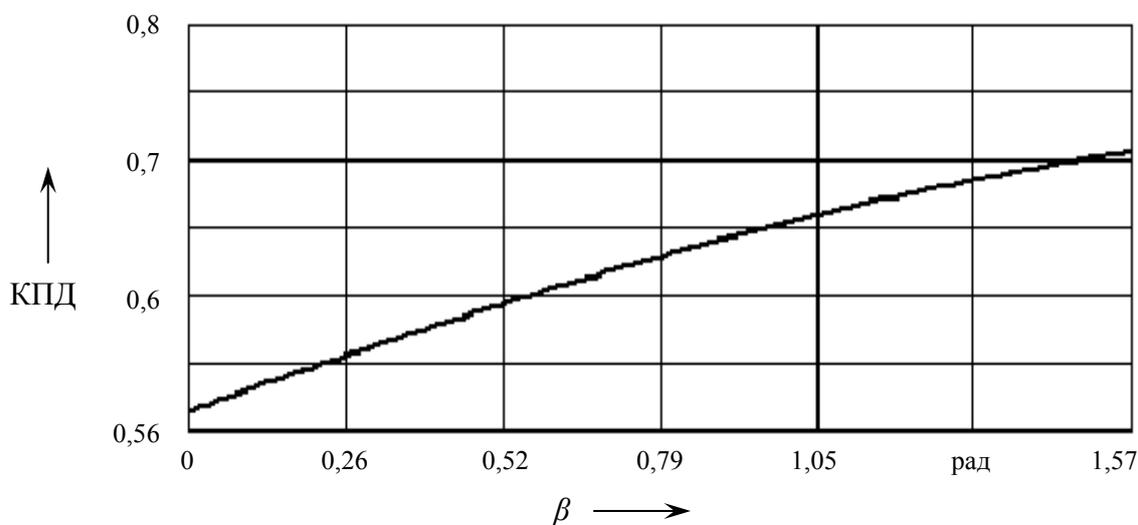


Рисунок 5.15 – Изменение КПД в зависимости от угла  $\beta$

При анализе было учтено, что радиус  $R_2$  зависит от угла  $\beta$ :

$$R_2 = R + r_s \sin \beta. \quad (5.75)$$

График на рисунке 5.15 показывает, что угол  $\beta$  необходимо увеличивать. Однако при угле  $\beta = \pi/2$  ППТК из передачи зацеплением превращается в передачу трением. Основной же вопрос заключается в том, что при увеличении угла  $\beta$  резко возрастают значения реакции  $N_2$  и остальных. Поэтому окончательно решать этот вопрос нужно после

проведения прочностных расчетов. Исходя из условия равной прочности можно назначить величину заглупления в вал с пазами  $rz_2 = 0,5r_s$ , тогда такая же величина, равная  $0,5r_s$  останется для контакта с поверхностью звена, несущего многопериодную беговую дорожку.

Значения углов  $\gamma$  и  $\beta$  определяются по следующей формуле:

$$\gamma(\beta) = \arcsin\left(\frac{r_s - rz_{1(2)}}{r_s}\right). \quad (5.76)$$

### 5.5 Упрощение силовых зависимостей для инженерного расчета передач

Для разработки методики инженерного расчета алгоритм силового анализа передачи следует упростить. Анализ формул, использующих суммы синусов и косинусов углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ , невозможен без применения ЭВМ. Оценим, можно ли заменить сумму значений углов подъема кривых средним значением этого угла и насколько адекватной будет эта замена.

Введем понятие средних суммарных углов передачи, определяемых по формуле

$$\alpha_{1\text{сум}} = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} / n; \quad \alpha_{3\text{сум}} = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} / n. \quad (5.77)$$

На рисунке 5.16 показано, как изменяются средние суммарные углы кривых за 4 оборота ведущего вала для передачи с параметрами  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $R = 20$  мм,  $A = 10$  мм.

При этом показаны для сравнения значения средних углов кривых, определяемые по формуле (4.14), и значения этих углов, вычисляемые по выражению (4.15).

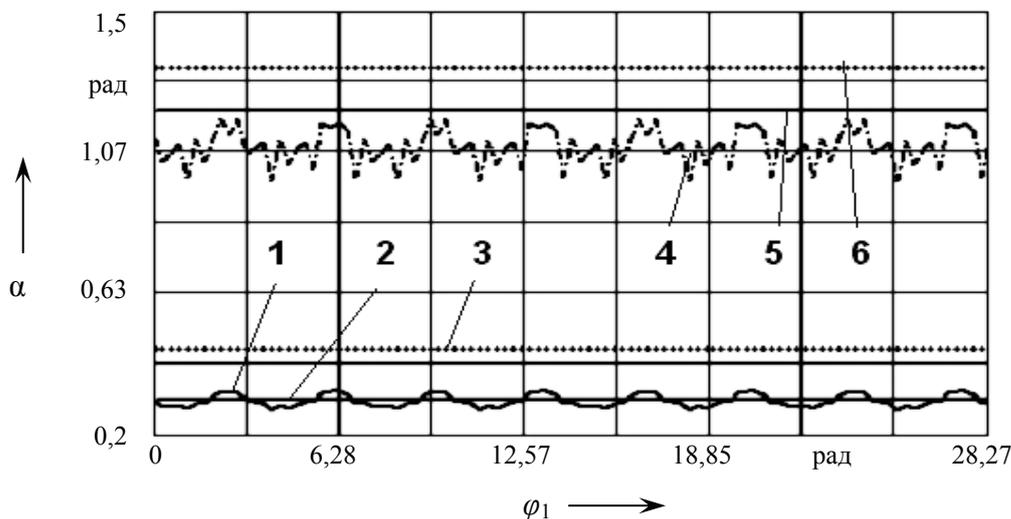
Анализ графиков на рисунке 5.16 позволяет сделать вывод, что для небольших значений чисел периодов замена значения  $\alpha_{i\text{сум}}$  значением  $\alpha_{i\text{ср}}$  полностью оправдана. При увеличении числа периодов среднее значение углов смещается в сторону максимальных значений колебания суммарного среднего угла, что может быть скорректировано поправочными коэффициентами. В целом, замену можно считать адекватной и в дальнейшем, при инженерных расчетах на прочность передачи оперировать средними значениями углов.

При этом выражения (5.51)–(5.53) можно упростить:

$$S_4 = -N_2 \sin \beta; \quad (5.78)$$

$$N_1(\sin \alpha_{1cp} + f \cos \alpha_{1cp}) + N_3 \sin \alpha_{3cp} = N_2 \cos \beta; \quad (5.79)$$

$$N_1(f \sin \alpha_{1cp} - \cos \alpha_{1cp}) + N_3(\cos \alpha_{3cp} + f \sin \alpha_{3cp}) + S_4 f = -N_2 f. \quad (5.80)$$



1 –  $\alpha_{1сум}(\varphi_1)$ ; 2 –  $\alpha_{1cp}(\varphi_1)$ ; 3 –  $\alpha_{1max}(\varphi_1)$ ; 4 –  $\alpha_{3сум}(\varphi_1)$ ; 5 –  $\alpha_{3cp}(\varphi_1)$ ; 6 –  $\alpha_{3max}(\varphi_1)$

Рисунок 5.16 – Анализ выражений, определяющих изменение углов подъема кривых

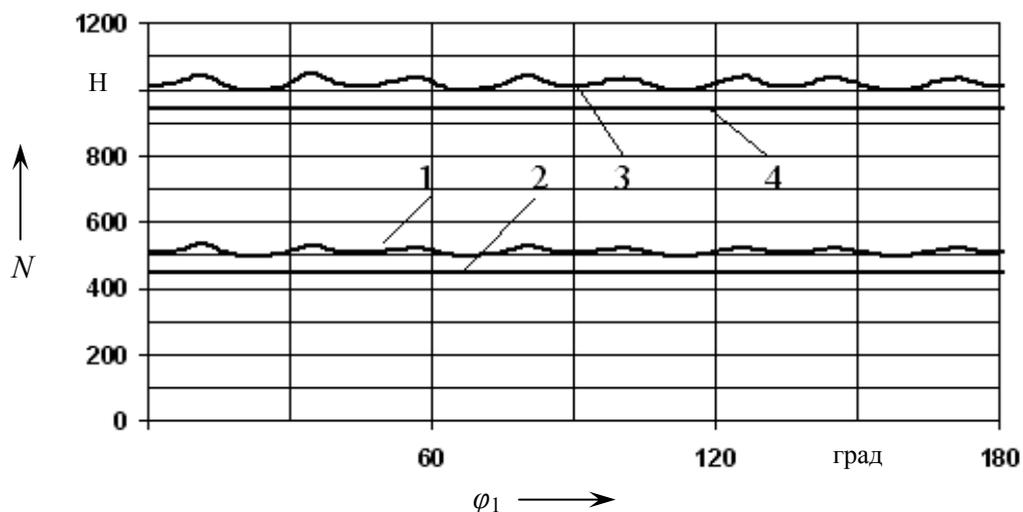
На основе выражений (5.78)–(5.80) получаем

$$N_2 = M_2 / (Rn \cos \beta); \quad (5.81)$$

$$N_1 = \frac{N_2 \left( -\frac{\cos \beta}{\sin \alpha_{3cp}} (\cos \alpha_{3cp} + f \sin \alpha_{3cp}) + f \sin \beta - f \right)}{f \sin \alpha_{1cp} - \cos \alpha_{1cp} - \frac{\sin \alpha_{1cp} + f \cos \alpha_{1cp}}{\sin \alpha_{3cp}} (\cos \alpha_{3cp} + f \sin \alpha_{3cp})}; \quad (5.82)$$

$$N_3 = \frac{N_2 \left( f \sin \beta - f - \frac{\cos \beta (f \sin \alpha_{1cp} - \cos \alpha_{1cp})}{\sin \alpha_{1cp} + f \cos \alpha_{1cp}} \right)}{\cos \alpha_{3cp} + f \sin \alpha_{3cp} - \frac{f \sin \alpha_{1cp} - \cos \alpha_{1cp}}{\sin \alpha_{1cp} + f \cos \alpha_{1cp}} \sin \alpha_{3cp}}. \quad (5.83)$$

Выполненная с помощью ЭВМ численная проверка для передачи с рассмотренными параметрами ( $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $R = 20$  мм,  $A = 10$  мм) показала следующие результаты. Значения реакций, вычисленные по формулам (5.82) и (5.83), составили:  $N_1 = 446$  Н,  $N_3 = 942$  Н. Коэффициент трения принимался  $f = 0,05$ . При этом значения этих же реакций  $N_1(\varphi_1)$  и  $N_3(\varphi_1)$ , полученные на основе анализа неупрощенной пространственной модели, оказались выше примерно на 10 % (рисунок 5.17).



1 —  $N_1(\varphi_1)$ ; 2 —  $N_1$ ; 3 —  $N_3(\varphi_1)$ ; 4 —  $N_3$

Рисунок 5.17 — Изменение реакций звеньев 1 и 3 за полуоборот ведущего вала

Дальнейший анализ графических зависимостей, представленных на рисунке 5.17 показал, что величина погрешности упрощенной модели зависит от числа периодов  $Z_3$  и от коэффициента трения. Увеличение коэффициента трения вдвое ( $f = 0,1$ ) практически устраняет погрешность. То же происходит при снижении числа периодов  $Z_3$  до единицы. С увеличением  $Z_3$  увеличивается погрешность.

Таким образом, установлено, что для инженерных расчетов допустимо использовать зависимости (5.81)–(5.83) при проведении силового анализа, возникающую погрешность можно компенсировать с помощью поправочных коэффициентов.

### 5.6 Алгоритм определения КПД передач с различными типами сопряженных кривых

Нами разработан алгоритм определения КПД ПШТК с использованием кривых различных типов.

Заданными считаются уравнения кривых (однопериодной и многопериодной) как функции от абсциссы  $s$  и угла поворота ведущего вала  $\varphi_1$ . Для первой кинематической схемы известны передаточное число  $u$ , длина развертки окружности  $L = 2\pi R$ . В качестве примера рассмотрим синусоидальные беговые дорожки, сочетание сопряженных дуг окружностей и ветвей эллипса и зацепление посредством кусочно-винтовых линий.

По заданным уравнениям составляется  $n$  зависимостей, которыми определяются ординаты точек пересечения. Для синусоидальных однопериодной и многопериодной беговых дорожек соответственно:

$$z_{1\sin i}(s, \varphi_1) = A \sin \left( Z_1 \frac{s + \frac{(i-1)L}{n}}{R} - \varphi_1 \left( 1 - \frac{1}{u} \right) \right); \quad (5.84)$$

$$z_{3\sin i}(s, \varphi_1) = -A \sin \left( Z_3 \frac{s + \frac{(i-1)L}{n}}{R} + \frac{Z_3 \varphi_1}{u} \right). \quad (5.85)$$

Для кривой, представляющей сочетание ветвей эллипса, и многопериодной кривой, представляющей сочетание сопряженных дуг окружностей:

$$z_{1\text{crug } i}(s, \varphi_1) = (-1)^{\left[ \frac{2 \left( s - \varphi_1 R \left( 1 - \frac{1}{u} \right) + \frac{L}{n} (i-1) \right)}{L} \right]} \times R_0 \times \sqrt{1 - \frac{\left( s - \varphi_1 R \left( 1 - \frac{1}{u} \right) + \frac{L}{n} (i-1) - \frac{L}{4} - \frac{L}{2} \left[ \frac{2 \left( s - \varphi_1 R \left( 1 - \frac{1}{u} \right) + \frac{L}{n} (i-1) \right)}{L} \right] \right)^2}{(0,25L)^2}}. \quad (5.86)$$

$$z_{3crugi} (s, \varphi_1) = (-1)^{\left[ \frac{s + \frac{\varphi_1 R}{u} + \frac{L}{n}(i-1)}{2R_0} \right]} \times \sqrt{R_0^2 - \left( s + \frac{\varphi_1 R}{u} + \frac{L}{n}(i-1) - 2R_0 \left( \left[ \frac{s + \frac{\varphi_1 R}{u} + \frac{L}{n}(i-1)}{2R_0} + 1 \right] - 1 \right) - R_0 \right)^2}, \quad (5.87)$$

где  $R_0$  – радиусы сопряженных дуг окружностей многопериодной кривой.

Для однопериодной и многопериодной кусочно-винтовых кривых соответственно:

$$z_{1vinti} (s, \varphi_1) = \frac{2}{\pi} A \arcsin \left( \sin \left( Z_1 \frac{s + \frac{(i-1)L}{n}}{R} - \varphi_1 \left( 1 - \frac{1}{u} \right) \right) \right); \quad (5.88)$$

$$z_{3vinti} (s, \varphi_1) = -A \arcsin \left( \sin \left( Z_3 \frac{s + \frac{(i-1)L}{n}}{R} + \frac{Z_3 \varphi_1}{u} \right) \right). \quad (5.89)$$

Определяем углы подъема в точках пересечения:

$$\alpha_{1i} (s, \varphi_1) = \arctg \left( \frac{d}{ds} z_1 (s, \varphi_1) \right); \quad (5.90)$$

$$\alpha_{3i} (s, \varphi_1) = \arctg \left( \frac{d}{ds} z_3 (s, \varphi_1) \right). \quad (5.91)$$

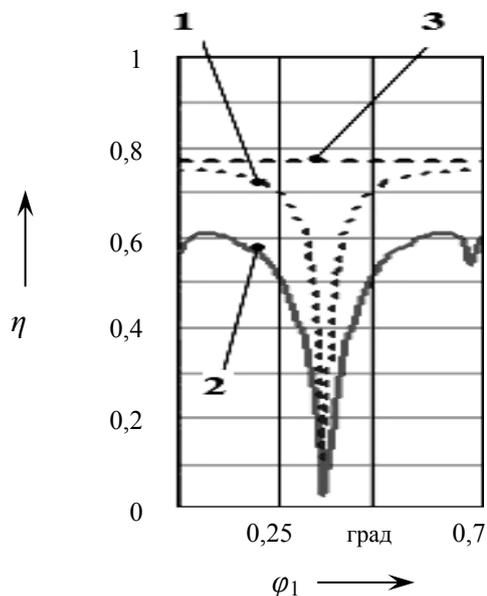
Определяем крутящий момент на входном звене, необходимый для обеспечения известного крутящего момента на выходе  $M_2$ :

$$M_1(s, \varphi_1) = \frac{M_2}{n \cos(\operatorname{arctg}(f))} \times \sum_i^n \frac{\sin(\alpha_{1i}(s, \varphi_1) + \operatorname{arctg}(f)) \cos(\alpha_{3i}(s, \varphi_1) - 2 \operatorname{arctg}(f))}{\sin(\alpha_{1i}(s, \varphi_1) + \alpha_{3i}(s, \varphi_1))}. \quad (5.92)$$

Определяем КПД передачи:

$$\eta(s, \varphi_1) = M_2 / (M_1(s, \varphi_1) u). \quad (5.93)$$

На рисунке 5.18 показаны результаты изменения КПД за один оборот ведущего вала для различных передач, беговые дорожки которых описаны уравнениями (5.84)–(5.90). При этом геометрические параметры для всех передач были приняты одинаковыми:  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $R = 10$  мм,  $A = 6$  мм. Всплески значений показывают значение КПД при попадании одного из тел качения на вершину кривой, где углы подъема кривых равны нулю. В реальной передаче нагрузка перераспределяется на другие тела качения.



1 –  $\eta$  (синусоидальная); 2 –  $\eta$  (ЭДСО); 3 –  $\eta$  (кусочно-винтовая)

Рисунок 5.18 – Изменение КПД передач за оборот ведущего вала

Как видно из рисунка 5.18, для заданных геометрических параметров наибольший КПД имеет передача с кусочно-винтовыми кривыми, а наименьший – передача с ЭДСО-зацеплением.

### 5.7 Силовые зависимости для дифференциалов на базе ППТК

В [68] в качестве передачи для создания автотракторного принудительно блокируемого дифференциала предлагается синусошариковая передача. Приведена принципиальная схема дифференциала и пояснен принцип его работы. Вопрос рассмотрен реферативно, как демонстрация одной из возможностей практической реализации СШР.

К конструкции дифференциала предъявляют следующие основные требования [183, с. 194]:

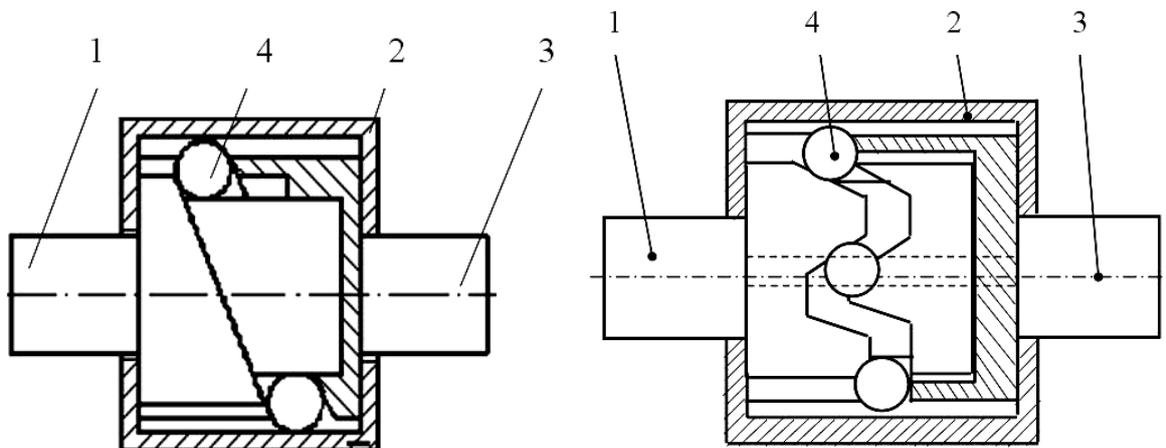
- осуществление пропорционального распределения крутящих моментов между колесами или осями. Для повышения проходимости автомобиля распределение моментов по отдельным колесам и мостам должно осуществляться пропорционально их вертикальным реакциям;
- обеспечение различной частоты вращения ведущих колес, что необходимо при повороте, движении автомобиля по неровной поверхности дороги и в других случаях;
- малые габаритные размеры и масса. Строгое соблюдение габаритных размеров имеет особое значение, т. к. дифференциалы устанавливают обычно внутри главной передачи или раздаточной коробки.

ППТК в полной мере удовлетворяет поставленным требованиям. Дополнительным преимуществом ППТК по сравнению с кулачковыми и синусошариковыми дифференциалами является возможность исполнения звена, суммирующего движения, как наружного [184, 185]. У СШР и кулачковых дифференциалов это звено (обойма, водило) является промежуточным, и его связь с корпусом и зубчатым колесом главной передачи представляет определенные трудности. На базе ППТК возможно создание межколесного симметричного дифференциала повышенного трения, в том числе и с принудительной блокировкой. Конструкции дифференциалов с однопериодным и многопериодным зацеплением приведены на рисунке 5.19. Применим для ППТК формулу Виллиса с учетом того, что для обращенной схемы механизма передаточное отношение равно минус единице:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_2} = -1 \Rightarrow \omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2.$$

Очевидно, что звено 2 должно передавать вращение от главной передачи и быть связанным с корпусом дифференциала. При этом выбираем вторую конструктивную схему ППТК (см. таблицу 3.2) с валом

с пазами, являющимся наружным звеном. Вал с пазами становится корпусной деталью механизма, и шпоночные пазы необходимо исполнять на внутренней цилиндрической поверхности.



1 – левая полуось; 2 – корпус; 3 – правая полуось; 4 – тела качения

Рисунок 5.19 – Схемы дифференциала с однопериодным (слева) и многопериодным зацеплением

Баланс внешних моментов, действующий на трехзвенный дифференциальный механизм, выражается уравнением:  $M_1 + M_3 = M_2$ , где  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_2$  – крутящие моменты на осях 1, 3 и корпусе 2 дифференциала соответственно.

Рассмотрим дифференциальный механизм, работающий в режиме редуктора. Пусть вал 1 является ведущим. Передаточное отношение при заторможенном корпусе 2 равно (у симметричного дифференциала) минус единице. Вал 3 – выходной. При этом КПД редуктора равен отношению выходной и входной мощностей:

$$\eta_{\partial} = \frac{M_3 \omega_3}{M_1 \omega_1} = \frac{M_3}{M_1} = \eta_{13}^{(2)}. \quad (5.94)$$

Это выражение справедливо и при вращающемся корпусе дифференциала 2 [183]. В блокирующемся дифференциале, как и в рассматриваемом редукторе, внешний момент и относительная угловая скорость на отстающей оси совпадают по направлению, а на забегающей – противоположны. В рассматриваемом случае ось 1 – отстающая, ось 3 – забегающая. Согласно выражению (5.94)  $M_3 = M_1 \eta_{\partial}$ . Разность моментов

$M_1$  и  $M_3$  обозначим как момент трения:  $M_{TP} = M_1 - M_3$ . Крутящие моменты на осях:

$$M_1 = 0,5(M_2 + M_{TP}); \quad M_3 = 0,5(M_2 - M_{TP}).$$

В обычном дифференциале  $M_{TP}$  приблизительно равен нулю, т. е. потери на трение пренебрежимо малы и момент, ответвляемый от корпуса дифференциала, делится между полуосями поровну. В блокирующемся дифференциале момент может перераспределяться иначе. Степень перераспределения моментов между осями характеризуется коэффициентом блокировки, который в различной литературе по расчету трансмиссий автомобиля имеет две трактовки:

$$K_{\delta 1} = \frac{M_1}{M_3} = \frac{1}{\eta_{13}^{(2)}}; \quad (5.95)$$

$$K_{\delta 2} = \frac{M_{TP}}{M_2} = \frac{M_1 - M_3}{M_1 + M_3} = \frac{1 - \eta_{13}^{(2)}}{1 + \eta_{13}^{(2)}}. \quad (5.96)$$

Следовательно, связь между коэффициентами выражается следующей формулой:

$$K_{\delta 1} = \frac{1 + K_{\delta 2}}{1 - K_{\delta 2}}. \quad (5.97)$$

КПД передачи связан с коэффициентом блокировки дифференциала зависимостью

$$\eta_n = 1 - \frac{B}{2R} K_{\delta 2} = 1 - \frac{B}{2R} \left( \frac{1 - \eta_{13}^{(2)}}{1 + \eta_{13}^{(2)}} \right), \quad (5.98)$$

где  $B$  – колея ведущих колес автомобиля;

$R$  – радиус поворота центра ведущей оси автомобиля.

Анализ выражения (5.98) свидетельствует о том, что относительно низкий КПД ППТК не является препятствием, а, наоборот, способствует применению этих передач для создания межколесных дифференциалов повышенного трения. Это обуславливается следующими причинами:

– КПД передачи, согласно выражению (5.98), является величиной переменной и зависит от радиуса поворота автомобиля;

– из-за большого трения в дифференциале снижаются время и относительная скорость перемещения поверхностей трения, что уменьшает их износ.

## 6 Обзор технологий изготовления деталей ППТК и разработка методик их расчета

### 6.1 Вопросы технологии изготовления деталей ППТК

6.1.1 *Анализ существующих методов изготовления сложных рабочих поверхностей кулачков.* Большинство деталей ППТК рассмотренных типов технологичны, себестоимость их изготовления низкая, что является одним из преимуществ этих передач.

Определенные сложности могут возникнуть при изготовлении одно- и многопериодных беговых дорожек на деталях. Операции изготовления волнообразного (периодического) профиля кулачков (рисунок 6.1) носят специфический характер и не распространены широко в практике общего машиностроения.

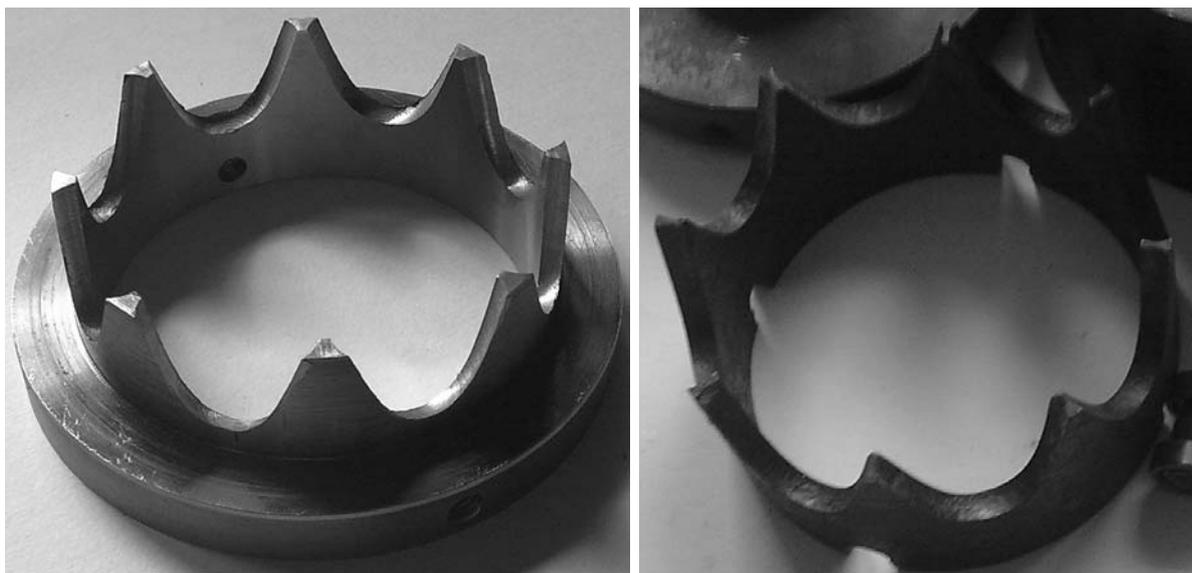


Рисунок 6.1 – Кулачки с периодическим профилем на торце

Известны методы, применяемые для изготовления кулачковых профилей (рисунок 6.2): обкатка, согласование движений, копирование, копирный и координатный с помощью станков с ЧПУ. Отдельно нужно рассматривать такие способы изготовления деталей со сложными рабочими поверхностями, как литье и штамповка. Они оправданы в случаях массового и крупносерийного производства, кроме того, требуют финишной обработки, что также может быть сопряжено с технологическими трудностями.

Чаще всего изготавливаемый нами профиль являлся синусоидальным. Профиль, близкий к эвольвентному, целесообразнее изготавливать методом обкатки (огибания) специально спрофилированными червячной фрезой, долбяком или зубчатой рейкой. В [186–188] предложен способ обработки торцовых поверхностей резцом-летучкой (резец закреплен на дисковом основании), легко реализуемый на зубофрезерном станке. В [189] для повышения производительности предлагается использовать фрезу-улитку (червячную одновитковую фрезу с прогрессирующим возрастанием профиля зуба). В данном случае наладка оборудования имеет более сложный характер. Технологический процесс изготовления на торце цилиндрической втулки профильной волнообразной поверхности аналогичен обработке зубьев на специальных станках для обработки зубчатых колес. Этот способ наиболее производителен, дает относительно высокую точность изготовления.

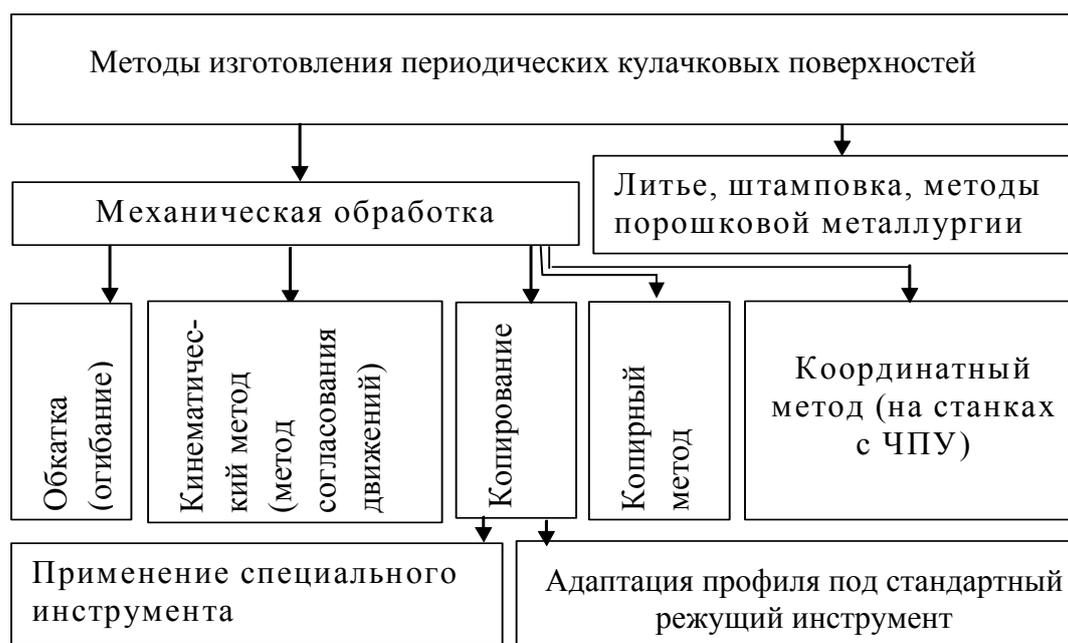


Рисунок 6.2 – Способы изготовления многопериодных профильных поверхностей

Кинематический метод основан на согласовании вращательного движения заготовки  $n_{заг}$  и возвратно-поступательного движения инструмента  $s_p$ . На рисунке 6.3 показана схема обработки на токарном станке, эта же операция осуществима и на вертикально-фрезерном станке. Для этих целей можно использовать станки с ЧПУ, однако не обязательно.

Профиль можно изготавливать на универсальных токарных и фрезерных станках с использованием специальных приспособлений, сообщающих заготовке возвратно-поступательные движения, согласованные с приводом шпинделя с помощью единой кинематической цепи. Кинематический метод применительно к изготовлению беговых дорожек СШП детально исследован в [189].

Метод копирования, применяемый для изготовления кулачков, аналогичен такому же способу изготовления зубчатых передач. Фрезерование производится дисковой или пальцевой фрезой с дискретными поворотами с определенным угловым шагом после исполнения очередной впадины с использованием делительной головки. Этот способ менее производителен и точен, однако не требует применения специального оборудования. Обработка может осуществляться долбежным резцом [190]. Сложность заключается лишь в применении специально спрофилированного режущего инструмента. Эта сложность устранима, если изготавливать так называемый адаптированный профиль (речь о нем пойдет ниже).

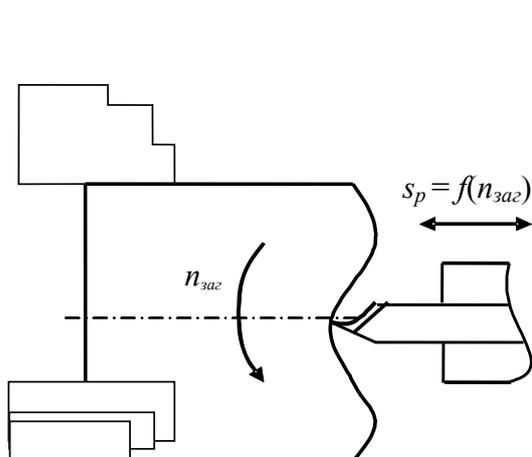


Рисунок 6.3 – Схема кинематического метода обработки

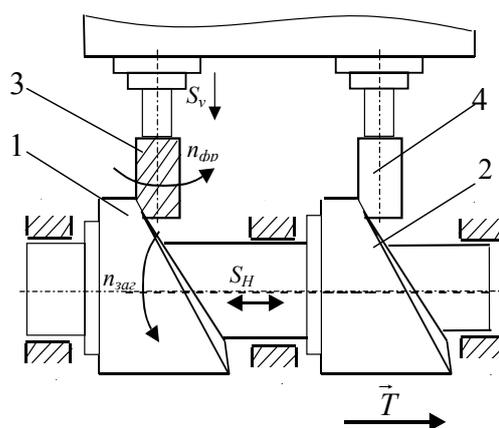


Рисунок 6.4 – Схема копирного метода обработки

При копирном методе обработки необходимые относительные движения инструмента и цилиндрической заготовки моделируются копиром, эталоном (образцовой деталью). Обработка производится на копировально-фрезерных станках с применением специальных приспособлений [191]. Схема этой операции изображена на рисунке 6.4. На оправке устанавливаются изготавливаемый кулачок 1 и копир 2, соответственно им на суппорте укреплены фреза 3, вращающаяся с

частотой  $n_{фр}$  и имеющая вертикальную подачу  $s_v$ , и копирный палец 4. Вращение кулачку и копиру сообщается механически, с постоянной угловой скоростью (с частотой вращения  $n_{заг}$ ). Односторонний контакт копирного пальца с копиром осуществляется силовым замыканием с помощью грузов (сила  $T$ ).

С совершенствованием станочного парка и появлением высокоточных многофункциональных станков с числовым программным управлением также актуальным становится координатный способ обработки кулачковых профилей. При этом заготовка остается неподвижной, а профиль или беговую дорожку обрабатывает шпиндельная головка станка с ЧПУ, воспроизводящая движение фрезы по координатам, заданным в программе.

В условиях современного машиностроения наиболее перспективными способами формообразования поверхностей многопериодных кулачков являются изготовление на станках с ЧПУ и методом обкатки [192].

### *6.1.2 Определение координат профиля беговых дорожек.* **Определение координат произвольного (в том числе синусоидального) профиля.**

Очевидно, что необходимый профиль беговых дорожек звеньев передач и других механизмов с телами качения с минимумом потерь мощности должен обеспечивать непрерывность контакта тел качения и взаимодействующих с ними рабочих поверхностей деталей. Исключение составляют вершины периодических кривых, где при определенных геометрических параметрах беговых дорожек и тел качения контакт все равно прервется. Искомый профиль будет образован следом окружности, центр масс которой перемещается по центральной кривой. Координаты точек профиля можно рассчитать по формулам (4.53) и (4.54), однако данные уравнения не являются параметрическими, что затрудняет их анализ. С учетом рассмотренного в разделе 4 явления искажения профиля определим координаты точек профиля кулачка.

Рассмотрим однопериодную кривую (синусоиду) с единичной амплитудой, по которой перемещается центр окружности с радиусом  $r_s$  (рисунок 6.5) в системе координат  $xOz$ .

Пусть требуемая траектория в декартовой системе координат описывается в явном виде уравнением  $z = f(x)$ . Тогда для того, чтобы центр масс тела качения совершал движение по этой траектории, необходимо свободное прохождение тела качения по желобу, или

свободное прохождение диаметра тела качения, перпендикулярного к направляющей кривой.

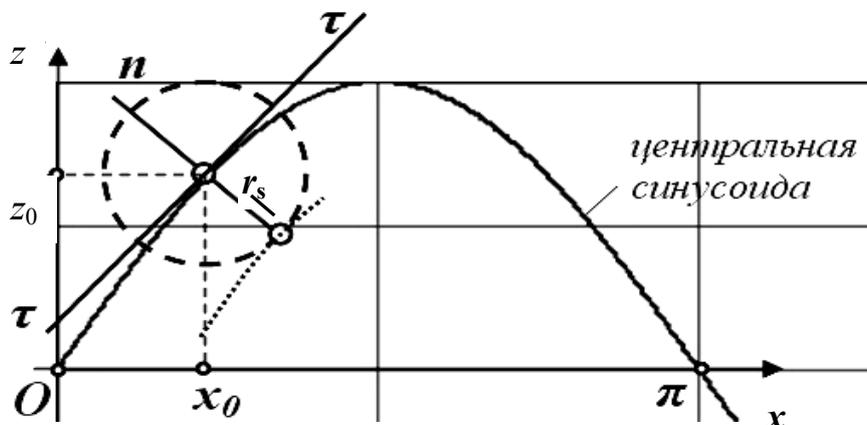


Рисунок 6.5 – К выводу уравнений профиля кулачка

Пусть  $(x; z)$  – координата точки, принадлежащей требуемой кромке дорожки в момент времени  $t$ , при котором координаты центра шарика  $(x_0; y_0)$ . Приняв радиус шарика равным  $r_s$ , получаем следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} = r_s; \\ z - z_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Решая данную систему уравнений, получим параметрические уравнения линий, ограничивающих желоб.

$$\left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = r_s^2; \quad z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \right. \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_0)^2 + \left( -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \right)^2 = r_s^2; \\ z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \end{array} \right. \quad (6.3)$$

$$\left\{ (x - x_0)^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{(f'(x_0))^2} \right)^2 = r_s^2; \quad z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \right\} \quad (6.4)$$

$$\left\{ (x - x_0)^2 = \frac{r_s^2 (f'(x_0))^2}{1 + (f'(x_0))^2}; \quad z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \right\} \quad (6.5)$$

$$\left\{ |x - x_0| = \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}; \quad z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \right\} \quad (6.6)$$

$$\left\{ x - x_0 = \pm \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}; \quad z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \right\} \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \pm \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}; \\ z = z_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \left( x_0 \pm \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} - x_0 \right). \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

$$\left\{ x = x_0 \pm \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}; \quad z = z_0 \mp \frac{1}{f'(x_0)} \frac{r_s |f'(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}. \right\} \quad (6.9)$$

В системе уравнений (6.9) можно ввести в обоих уравнениях один параметр, если учесть, что значение  $z_0$  определяется как  $z_0 = f(x_0)$ . Подставив вместо  $x_0$  параметр  $s$ , получим

$$\left\{ x(s) = s \pm \frac{r_s |f'(s)|}{\sqrt{1 + (f'(s))^2}}; \quad z(s) = f(s) \mp \frac{r_s |f'(s)|}{f'(s) \sqrt{1 + (f'(s))^2}}. \right\} \quad (6.10)$$

Уравнения (6.10) являются универсальными параметрическими, определяющими требуемые линии в случае произвольной траектории центра масс.

Для синусоидальной кривой имеем [193]

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= s \pm \frac{r_s \left| \frac{AZ}{R} \cos\left(\frac{Zs}{R}\right) \right|}{\sqrt{1 + \frac{A^2 Z^2}{R^2} \cos^2\left(\frac{Zs}{R}\right)}}; \\ z(s) &= f(s) \mp \frac{r_s \left| \frac{AZ}{R} \cos\left(\frac{Zs}{R}\right) \right|}{\frac{AZ}{R} \cos\left(\frac{Zs}{R}\right) \sqrt{1 + \frac{A^2 Z^2}{R^2} \cos^2\left(\frac{Zs}{R}\right)}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

### Определение координат кусочно-винтового профиля.

Уравнение плоской развертки  $z = f(s)$  кусочно-винтовой линии приведено в разделе 4. Реальный профиль будет также описываться уравнением кусочно-винтовой линии, смещенной вдоль оси передачи на некоторое расстояние. Для его определения необходимо рассмотреть явление заострения вершин для данного типа кривой (рисунок 6.6). Центр тела качения 1 с радиусом  $r_s$  перемещается по кусочно-винтовой линии 2 (центральной кривой), имитируя движение инструмента. При этом формируется профиль беговой дорожки 3.

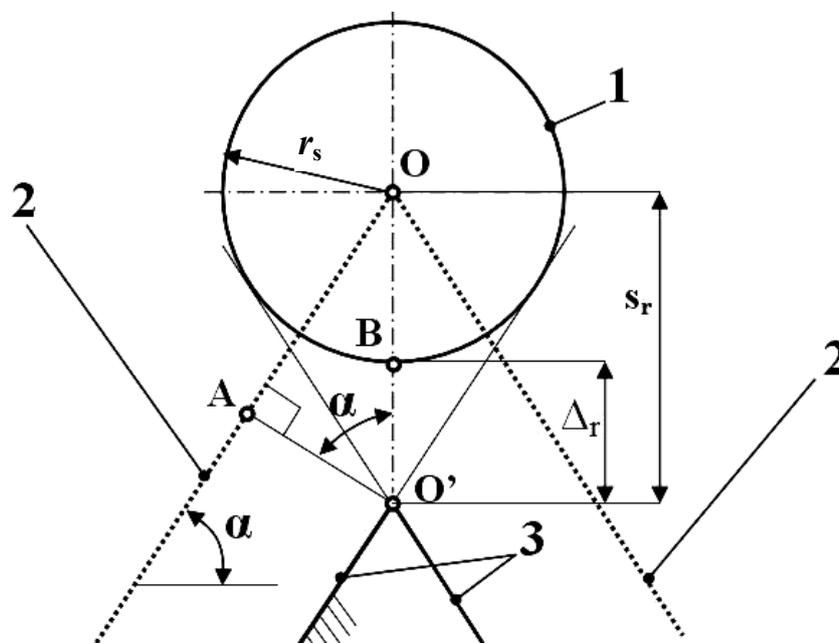


Рисунок 6.6 – Оценка явления подрезания вершин

Из геометрических построений и с учетом постоянства угла подъема  $\alpha$  для кусочно-винтовой линии с числом периодов  $Z$  в [107, с. 82–83] получено выражение для определения снижения профиля относительно оси передачи от центральной кривой:  $\Delta_r = r_s (1 - \cos(\arctg(2AZ / \pi R))) / \cos(\arctg(2AZ / \pi R))$ . Это означает, что для обеспечения непрерывности контакта верхний (или нижний) профиль необходимо сдвинуть вдоль оси  $Oz$  на  $\pm \Delta_r$ , а вершины срезать либо сделать радиусные закругления [107, рисунок 3.11]. Таким образом, уравнения верхнего и нижнего профилей

$$z_B = \frac{2A}{\pi} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right) + r_s - \Delta_r. \quad (6.12)$$

$$z_H = \frac{2A}{\pi} \arcsin\left(\sin\left(\frac{Zs}{R}\right)\right) - r_s + \Delta_r. \quad (6.13)$$

### Определение координат ЭСДО-профиля.

Рассмотрим профиль, остающийся от прохождения центра фрезы с диаметром, равным диаметру тела качения по многопериодной кривой, представляющей собой сочетание сопряженных дуг окружностей. Результатом будет такой же профиль, однако составленный из полуокружностей разного радиуса. Параметры образованного профиля наружного кулачка приведены на рисунке 6.7.

Получены аналитические зависимости для данного профиля:

$$x = R \cos(s / R); \quad (6.14)$$

$$y = R \sin(s / R); \quad (6.15)$$

$$z = -\sqrt{(R_0 + r_s)^2 - (s - ((4i - 3)R_0 + r_s))^2}$$

при

$$4(i - 1)R_0 \leq s < (4i - 2)R_0 + 2r_s \quad (6.16)$$

$$z = \sqrt{(R_0 - r_s)^2 - (s - ((4i - 1)R_0 + r_s))^2}$$

при

$$4(i - 2)R_0 + 2r_s \leq s < 4iR_0, \quad (6.17)$$

где  $s$  – аргумент, изменяемый от 0 до  $2\pi R$ ;  
 $i$  – номер периода.

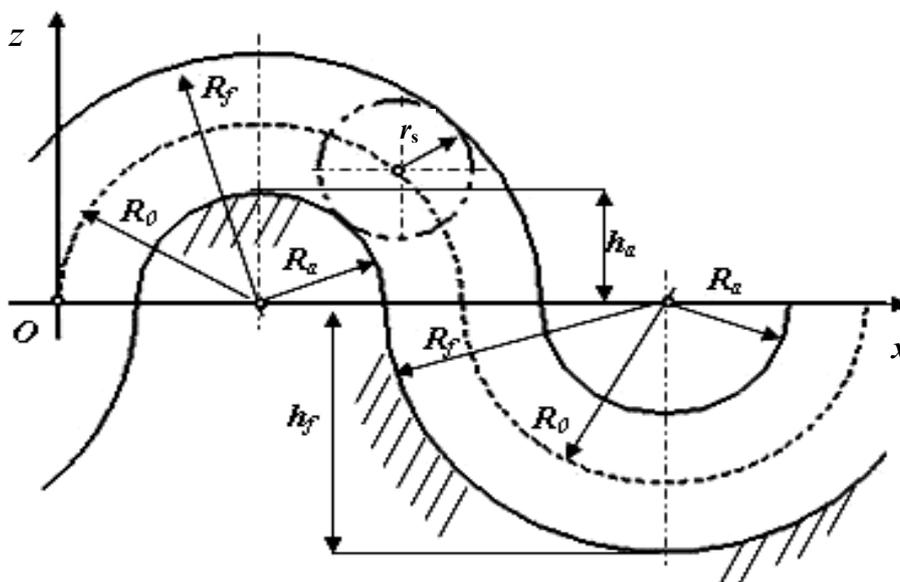


Рисунок 6.7 – Параметры ЭСДО-профиля

Преимущество данного профиля заключается в том, что полностью устраняется явление искажения профиля и его самопересечение.

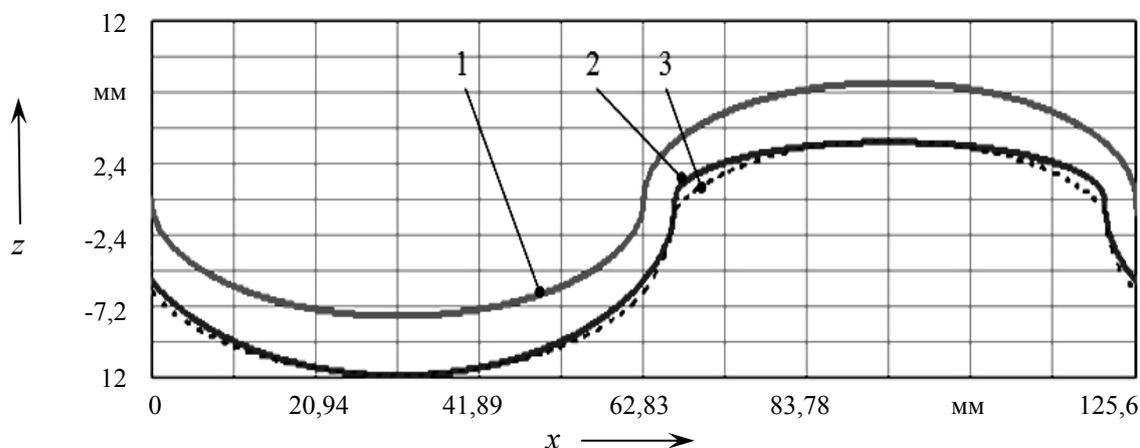
Для однопериодной кривой (рассматриваем только нижнюю часть профиля)

$$z = -(R_0 + r_s) \sqrt{1 - \frac{\left(s - \left(\frac{\pi R}{2} + r_s\right)\right)^2}{\left(r_s + \frac{\pi R}{2}\right)^2}} \quad \text{при } 0 \leq s \leq \pi R + 2r_s, \quad (6.18)$$

$$z = (R_0 - r_s) \sqrt{1 - \frac{\left(s - \left(\frac{3\pi R}{2} + r_s\right)\right)^2}{\left(-r_s + \frac{\pi R}{2}\right)^2}} \quad \text{при } \pi R + 2r_s < s \leq 2\pi R. \quad (6.19)$$

Центральная кривая и образующийся профиль показаны на рисунке 6.8. Там же изображены сопряженные ветви эллипса, смещенные на расстояние  $r_s$  вдоль оси  $Oz$ .

Из рисунка 6.8 видно, что для однопериодной кривой с ЭДСО-профилем присутствует явление искажения профиля.



1 – центральная однопериодная кривая ЭДСО-профиля; 2 – сопряженные ветви эллипса, смещенные вдоль оси  $Oz$ ; 3 – профиль, формируемый фрезой

Рисунок 6.8 – К выводу уравнений профиля однопериодной беговой дорожки ЭДСО-зацепления

*6.1.3 Адаптация профиля беговых дорожек ППТК к условиям единичного и мелкосерийного производства.* В математической модели передачи предполагается, что перемещение материальных точек (тел качения) осуществляется по замкнутым траекториям (цилиндрическим синусоидам). Изготовление синусоидального профиля требует применения специальных приспособлений, инструмента, сложной наладки оборудования. Это целесообразно в условиях средне- и крупносерийного производства. В настоящее время, с учетом уровня развития ППТК, в некоторых случаях целесообразной видится задача адаптации профиля беговой дорожки [194–197], которая позволила бы изготавливать детали передачи на универсальном оборудовании, тем самым значительно снизив затраты на ее производство.

#### **Адаптация синусоидального профиля.**

Рассмотрим цилиндрическую многопериодную центральную синусоиду 1, расположенную на цилиндре с радиусом образующей окружности  $R$  (рисунок 6.9).

При движении по ней центра сферы сферической фрезы с радиусом, равным радиусу тела качения, образуется профиль 2 торцового кулачка ППТК. Рассмотрим возможность замены данного профиля упрощенным

профилем 3 (адаптированным к возможностям универсального станочного оборудования).

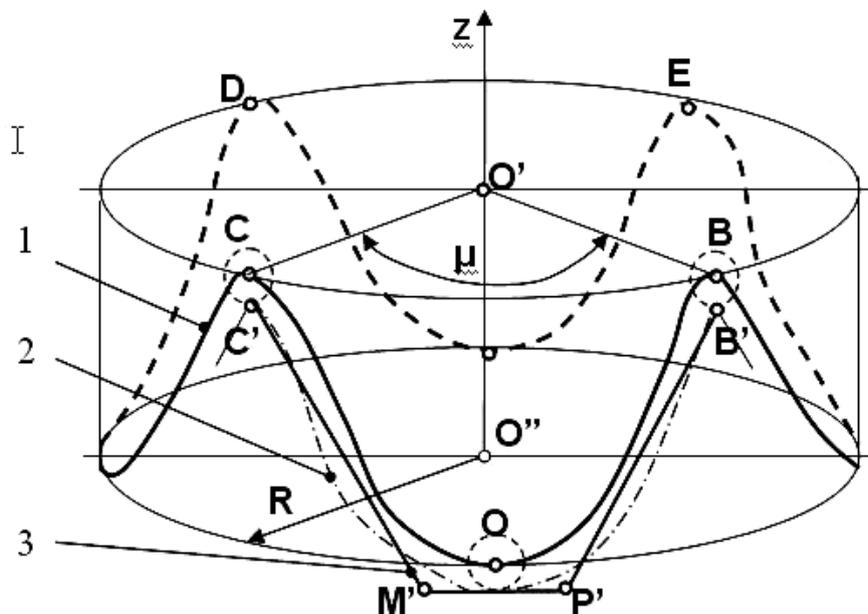


Рисунок 6.9 – К вопросу формирования адаптированного профиля

Трапециевидный профиль впадины кулачка реализуется на горизонтально-фрезерном станке. Цилиндрическую (трубчатую) заготовку устанавливают в патроне универсальной делительной головки (УДГ). Прорезная фреза на заточном станке профилируется с заданными углами скоса боковых поверхностей (формируется профиль  $C'M'P'B'$ ). За один проход фрезеруется один или два паза (при четном числе периодов  $Z$  и симметричном расположении впадин). Далее заготовка поворачивается в УДГ на рассчитанный угол, и операция повторяется. Возможно использование непрофилированной прорезной фрезы (либо цилиндрической фрезы). В этом случае получение профиля одной или двух впадин, расположенных симметрично, формируется в три приема: сначала фрезеруется прямоугольный профиль, далее поочередным наклоном делительной головки на определенный угол и фрезерованием прорезной фрезой образуется трапециевидный профиль впадины. Аналогичные операции осуществимы также и на вертикально-фрезерном станке. Финишные операции также без особых трудностей могут быть выполнены на универсальном оборудовании. Нами использовался плоскошлифовальный станок 3Д711ВФ и шлифовальные круги ПП и 2Т. Круги правились с помощью алмазного карандаша. Из-за возможности

потери устойчивости и для осуществления поворотов и наклонов магнитный стол станка заменялся делительной головкой.

При определенном соотношении параметров профиля кулачка и передачи ( $R$ ,  $Z$ ,  $A$  и  $r_s$ ) возможно применение адаптированного профиля впадины в виде окружности, также без особых трудностей реализуемого в производстве.

Определим радиус фрезы по следующей формуле:

$$R_{fr} = R^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{Z_3} \right) / (2h) + 0,5h, \quad (6.20)$$

где  $h$  – высота профиля, определяемая из системы уравнений (6.11) как абсолютная разность  $z_{max}$  и  $z_{min}$ .

Стандартный диаметр фрезы получим, округлив результат  $D_{fr} = 2R_{fr}$ . Высота установки центра фрезы над базой (за которую принимаем опорный торец кулачка):

$$h_{fr} = s_{min} + R_{fr}, \quad (6.21)$$

где  $s_{min}$  – минимальная высота кулачка, измеренная от нижней точки профиля до опорного торца кулачка.

Профиль окружности (торца фрезы) строим по следующей зависимости:

$$z_0(x) = -\sqrt{R_{fr}^2 - \left( \frac{x - 1,5R}{Z_3} \right)^2} + R_{fr} - A - r_s. \quad (6.22)$$

Фрагмент плоской развертки профиля кулачка, получаемый как кривая, огибающая множества положений окружности, центр которой перемещается по синусоиде на плоской развертке, фрагмент проекции на плоскость этой кривой, помещенной на цилиндрическую поверхность и профиль цилиндрической фрезы для кулачка с параметрами  $Z = 8$ ,  $A = 11$  мм,  $R = 35$  мм,  $r_s = 6$  мм, приведены на рисунке 6.10.

Как видно из рисунка 6.10, в данном случае использование в передаче кулачка с адаптированным профилем в виде окружности нецелесообразно и его следует заменить трапециевидным вследствие значительных погрешностей.

На рисунке 6.11, а приведен общий вид кулачка с адаптированным трапециевидным профилем [198], на рисунке 6.11, б – модель кулачка с профилем в виде окружности с параметрами  $A = 3,5$  мм,  $R = 12,5$  мм,

$Z = 8$ ,  $r_s = 3$  мм. В данном случае (малые значения  $A$ ,  $R$  и  $r_s$ ) круглый профиль инструмента воспроизводит необходимую поверхность для контакта с телом качения с достаточной точностью.

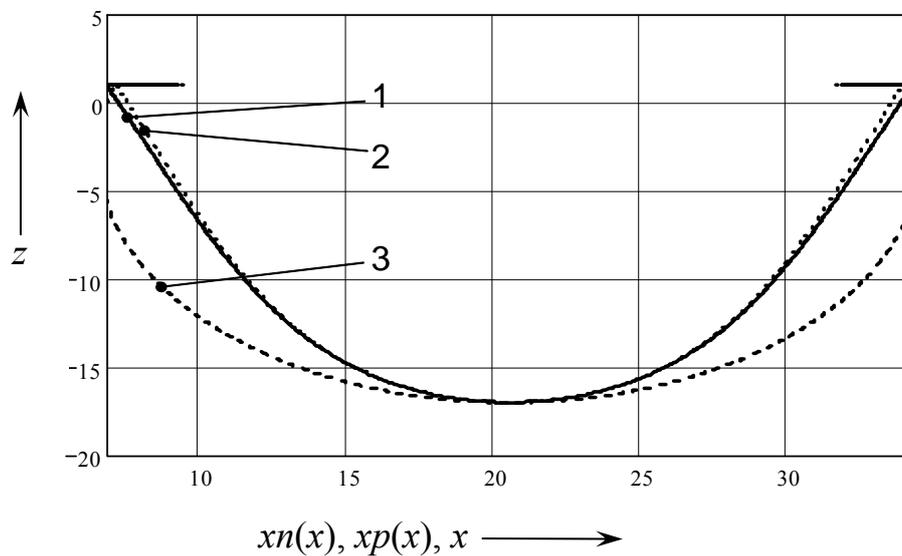


Рисунок 6.10 – Плоская развертка профиля впадины (1), проекция профиля впадины на плоскость (2) и профиль фрезы для изготовления адаптированного профиля (3)

а)



б)

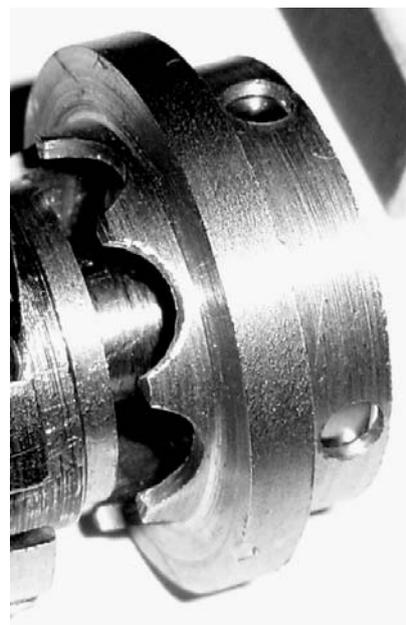


Рисунок 6.11 – Наружные кулачки с адаптированным профилем впадин

Круглый профиль впадины кулачка так же, как и трапецевидный, может изготавливаться на горизонтально-фрезерном станке с помощью стандартной прорезной фрезы и делительной головки.

#### **Адаптация кусочно-винтового профиля.**

Проекция однопериодной кусочно-винтовой цилиндрической кривой на плоскость, проходящей через ось передачи, будет описываться уравнением синусоиды (косинусоиды). Средняя линия этой кривой будет параллельна оси передачи, ее амплитуда будет равна  $R$ , а длина окружности, образующей цилиндр, на котором она гипотетически может быть замкнута, –  $4A$ . Следовательно, радиус окружности цилиндра –  $2A/\pi$ .

Уравнение плоской развертки однопериодной кривой запишется в следующем виде:

$$z_i = R \sin\left(\frac{(x + r_s)\pi}{2A}\right), \quad -2A \leq x \leq 2A. \quad (6.23)$$

Строить данную кривую для дальнейшего моделирования нужно с учетом замены осей координат: вдоль оси абсцисс откладываются значения  $z$ , вдоль оси ординат – значения  $x$ . Недостатком данной кривой (в однопериодном исполнении) является, как и для однопериодной кривой в ЭДСО-зацеплении, наличие двух точек разрывности функций угла подъема. Это приводит к всплескам нагрузок и увеличению динамических составляющих.

Профиль впадины многопериодной кусочно-винтовой кривой на плоской развертке (2) и его проекция на плоскость, т. е. профиль инструмента для изготовления профиля (2) (при параметрах зацепления  $R = 20$  мм,  $A = 11$  мм,  $Z_3 = 4$ ), представлен на рисунке 6.12.

Профиль строился согласно уравнению плоской развертки кривой (4.41) по алгоритму, изложенному в выражениях (4.53) и (4.54). Также при построении проекции кривой на плоскость учитывался угол  $\mu$  (см. рисунок 6.9). Как видно из рисунка 6.12, демонстрирующего также явление самопересечения, профиль впадины при данных геометрических параметрах передачи достаточно точно может заменяться прямыми линиями, и искажение при этом будет незначительным.

#### **Адаптация впадин многопериодного ЭДСО-профиля.**

Предположим, профиль изготавливается фрезерованием, методом копирования на цилиндрической поверхности радиусом  $R = 20$  мм цилиндрической фрезой радиусом  $R_0 = 12$  мм. Проанализируем профиль одной впадины. Координаты установки фрезы:  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = R_0$ . Уравнение профиля, расположенного выше оси абсцисс:

$$z(x) = -\sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2} - y_0, \quad x = -R_0 \dots R_0. \quad (6.24)$$

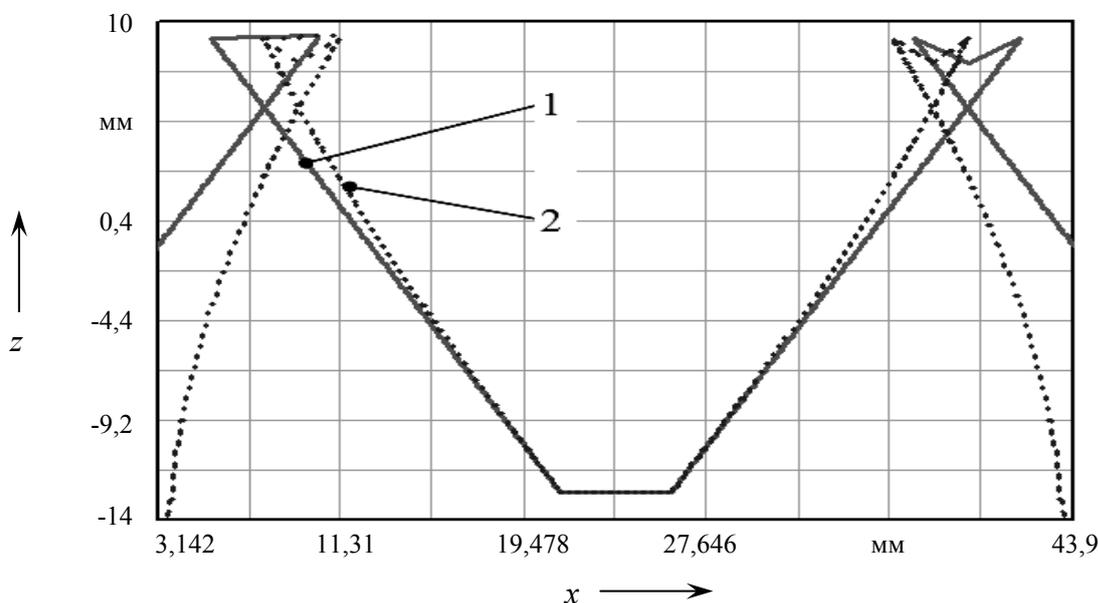


Рисунок 6.12 – Профиль впадины беговой дорожки по уравнениям кусочно-винтовой линии и его проекция на плоскость

Известно, что проекция полукруглого профиля на плоскость, проходящую параллельно оси передачи через две верхние точки профиля, будет отличаться, что обуславливает необходимость учета этого факта. Полярный угол  $\varphi_p$ , соответствующий координате  $x$ , и соответствующая этому углу абсцисса  $x_p$  определяются по формулам:

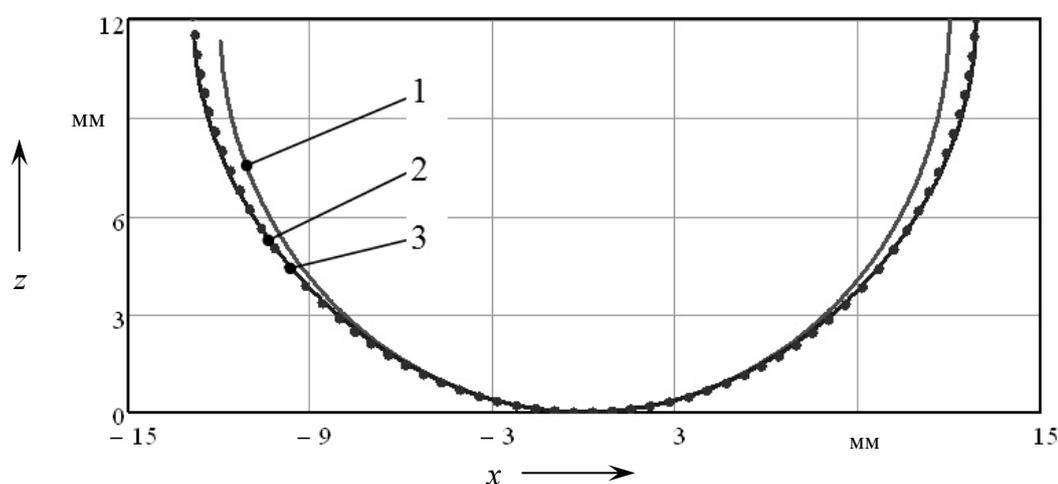
$$\varphi_p = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right); \quad x_p = R\varphi_p. \quad (6.25)$$

Максимальные значения этих параметров:  $\varphi_{p \max} = 2 \arcsin(R_0 / R)$ ,  $x_{p \max} = R\varphi_{p \max} / 2$ . На рисунке 6.13 линией 2 показана развертка на плоскость профиля, образуемого от фрезерования цилиндрической поверхности заготовки цилиндрической фрезой (оси заготовки и фрезы перпендикулярны, подача осуществляется в вертикальной плоскости).

Профиль на развертке образован кривой второго порядка. Оценим приближенность этого профиля к окружности со скорректированным радиусом  $R_{ск}$ .

$$R_{ск} = 0,5 \left( R_0 + \frac{x_{p\max}^2}{R_0} \right). \quad (6.26)$$

Как видно из рисунка 6.13, линии 2 и 3 практически совпадают. Таким образом, профиль впадин, образуемый фрезерованием трубчатой детали цилиндрической фрезой с достаточной степенью точности, можно также считать многопериодным ЭСДО-профилем. Для его изготовления с необходимым радиусом  $R_0$  ( $R_0 = A$ ) нужно обрабатывать пазы на заготовке фрезой радиусом  $R_f$ , равным  $R_{ск}$ . Изготовление выступов данного профиля является задачей более сложной, и для ее решения необходимо использование станков с ЧПУ.



1 — окружность радиусом  $R_0$ ; 2 — профиль от фрезерования; 3 — заменяющая окружность

Рисунок 6.13 – К вопросу воспроизведения круглого профиля

### **Адаптация профиля однопериодных кулачков (на примере синусоидального профиля).**

В рассмотренных конструкциях ППТК ведущее звено состоит из двух кулачков, жестко закрепленных на валу, обращенных рабочими поверхностями друг к другу и смещенных в осевом направлении один относительно другого на расстояние, равное диаметру шарика ( $P''L = 2r_s$ ). Кулачки, полученные фрезерованием скоса трубчатой цилиндрической заготовки под углом  $\alpha_{\max}$ , образуют беговую дорожку (рисунок 6.14).

Расстояние между рабочими поверхностями, измеренное по нормали к ним, оказывается достаточным для прохождения тела качения только в вершинах — точках  $V$  и  $H$ . Максимальное значение сужения

профиля наблюдается в точках с максимальным углом подъема  $\alpha_{\max}$  (в точке  $P'$  – средней точке отрезка  $VH$ ), который численно равен углу скоса рабочих поверхностей кулачка. В этом месте ширина канавки

$$P'P'' = 2r_s \cos \alpha_{\max} = 2r_s R / \left( \sqrt{R^2 + A^2} \right). \quad (6.27)$$

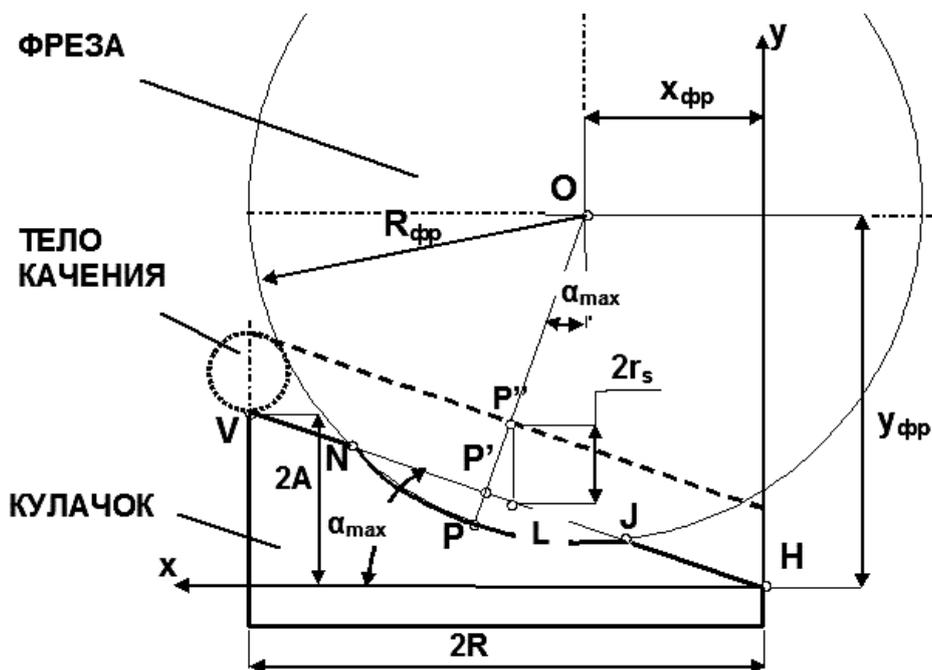


Рисунок 6.14 – Адаптация профиля однопериодного кулачка

Устранить явление сужения профиля беговой дорожки можно удалением цилиндрической фрезой части металла с торца кулачка. При этом величина максимального врезания фрезы определится как  $PP' = r_s (1 - \cos \alpha_{\max})$ . Выбрав точку  $H$  за базовую, определим координаты центра фрезы  $x_{фр}$ ,  $y_{фр}$  и ее радиус  $R_{фр}$  в конечный момент фрезерования при условии  $VN = JH = 0,1VH$ . Используя промежуточные вычисления, получим

$$NJ = 1,6\sqrt{A^2 + R^2}; \quad (R_{фр} - PP')^2 + (NJ/2)^2 = R_{фр}^2. \quad (6.28)$$

И окончательно

$$R_{фр} = 0,5r_s (1 - \cos \alpha_{\max}) + \frac{0,32(A^2 + R^2)}{r_s (1 - \cos \alpha_{\max})}; \quad (6.29)$$

$$x_{\phi p} = R - \left( R_{\phi p} - r_s (1 - \cos \alpha_{\max}) \right) \sin \alpha_{\max}; \quad (6.30)$$

$$y_{\phi p} = A + \left( R_{\phi p} - r_s (1 - \cos \alpha_{\max}) \right) \cos \alpha_{\max}. \quad (6.31)$$

Следует отметить, что при расчетах координат профиля кулачков в формулы следует подставлять радиус окружности  $r_s$  с учетом заглабления тела качения во внутренние кулачки, а он может быть не всегда равен радиусу шарика.

Описанные выше операции фрезерования не представляют трудностей и могут выполняться на универсальном оборудовании стандартным режущим инструментом [199]. Оправданность упрощения профиля беговых дорожек должна тщательно оцениваться вследствие вносимых погрешностей в картину зацепления (нарушение теоретического постоянства контакта) и ухудшения динамики передачи.

*6.1.4 Разработка приспособления для коррекции профиля внутреннего кулачка.* Устранить явление искажения профиля можно еще одним способом. Для двух кулачков с упрощенным профилем (например, в виде двух втулок со скошенными поверхностями) после изготовления в техпроцесс обработки вводится дополнительная токарная (или фрезерная) операция, осуществляемая с помощью приспособления, изображенного на рисунке 6.15.

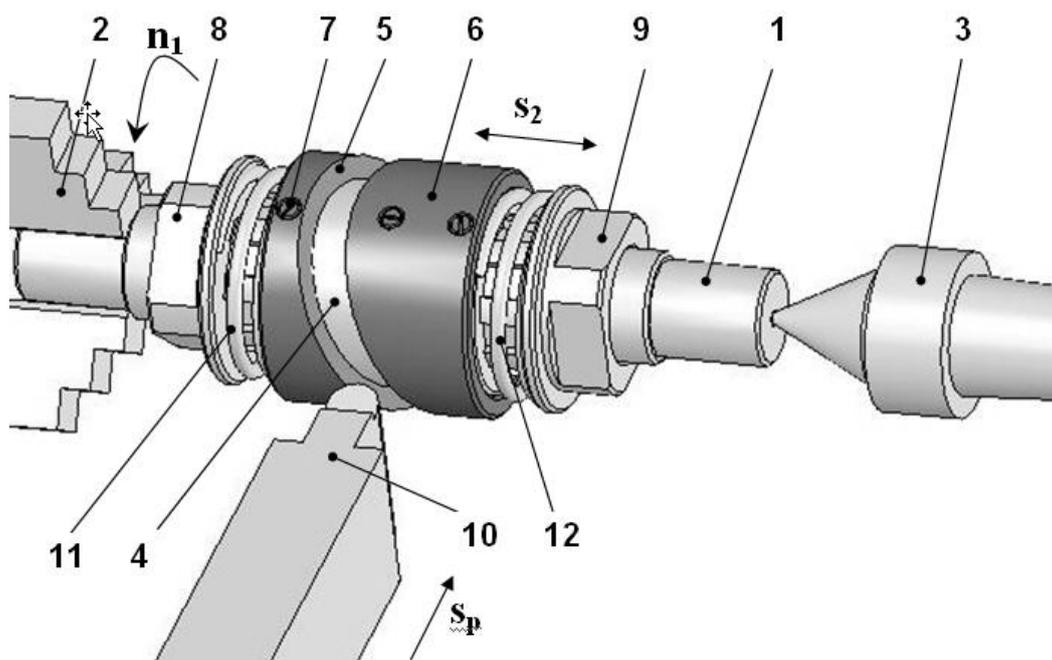


Рисунок 6.15 – Схема процесса коррекции паза ведущего вала

Приспособление состоит из вала 1, который закреплен с одной стороны в патроне 2, а с другой – фиксируется центром 3. На валу 1 имеются шлицы, по которым может перемещаться втулка 4 со шлицами на внутренней поверхности. На втулке 4 закрепляются два внутренних кулачка 5 и 6 так же, как они крепятся на ведущем валу-основании редуктора, с помощью винтов 7. Осевое перемещение втулки 4 с кулачками 5 и 6 ограничивают гайки 8 и 9 с упорными буртиками. Спрофилированный резец 10 радиусом  $r_s$  перемещается только с радиальной подачей  $s_r$ . При вращении вала 1 с частотой  $n_1$  втулка 4 и кулачки 5 и 6 вынуждены также вращаться и совершать колебательные движения вдоль вала 1, что аналогично осевой подаче резца  $s_2$ . При этом кулачки образованным эллипсовидным пазом периодически самоустанавливаются относительно резца. В процессе резания убираются излишние участки металла в местах с максимальными углами подъема беговых дорожек и обеспечивается прохождение тела качения в процессе работы передачи. Динамическую стабильность процесса и регулировку можно осуществлять с помощью гаек 8 и 9, а также расчетом жесткости пружин 11 и 12.

Аналогичную операцию можно осуществлять на станках фрезерной группы, используя фрезу вместо резца.

## ***6.2 Материалы и термообработка деталей ППТК***

Выбор материалов необходимо проводить с учетом накопленной информации о работе передач со схожими условиями нагружения. В карданном шарнире автомобиля при передаче момента в обоймах и шариках возникают значительные контактные напряжения. Обоймы при этом выполняются из стали 15НМ с последующей цементацией, шарики – из стали ШХ15 [176, с. 175].

Кулачковые шайбы кулачковых автомобильных дифференциалов изготавливают из сталей 15НВ, 15ХВА, ползуны – из стали ШХ15. Детали кулачковых дифференциалов подвергают фосфатированию на глубину 0,005–0,010 мм для предотвращения задиров и улучшения антифрикционных свойств. Кулачковые муфты изготавливают из хромоникелевых сталей 20ХН2М, 15ХГН2ТА и др. и безникелевых 20ХГРА, 18ХГТА сталей хорошей прокаливаемости с высокими механическими свойствами [177, с. 238].

Результаты экспериментальных исследований СШП износа взаимодействующих поверхностей наружных втулок свидетельствуют о том, что

для уменьшения интенсивности изнашивания их необходимо изготавливать из стали 20ХН4МА (или 20ХН3А) с поверхностным упрочнением до 58–62 НRC на глубину 2–2,5 мм [70]. Часто для изготовления деталей СШП применялась недорогая сталь 40Х с последующей закалкой и отпуском.

Шарики для ППТК в целях экономии средств и обеспечения технологичности процесса изготовления всех деталей передачи целесообразно приобретать в виде свободных деталей (сталь ШХ15), поставляемых отечественными ГПЗ.

Ступенчатые ролики изготавливались нами из стали 40Х (закалка и отпуск) с последующим шлифованием поверхностей контакта с рабочими поверхностями других деталей передачи и предназначенных для размещения подшипников.

### 6.3 Расчет деталей ППТК на прочность

Фрагменты методик расчета основных деталей СШП приведены в [200–203]. Для ППТК цилиндрического типа алгоритмы расчетов отдельных деталей приведены в [204–206].

Критериями работоспособности передач данного типа являются:

- контактная прочность;
- изгибная прочность выступов наружного кулачка;
- износостойкость рабочих поверхностей кулачков и вала с пазами.

Основанием для прочностных расчетов является силовой анализ. Как показывает анализ выражений (5.81)–(5.83), реакция  $N_2$  имеет наибольшее значение: оно в 1,3–2 раза превышает значение силы  $N_3$  при различных передаточных числах (от 2 до 100). При расчете на контактную прочность максимальные напряжения в зоне контакта при контакте стальных деталей можно оценить по преобразованной для ППТК с шариковыми сателлитами формуле Герца [7, с. 62]:

$$\sigma_{H \max} = 188,715(v_1 v_2)^{-1} N_2^{1/3} (2r_s^{-1} - r_{s1}^{-1})^{2/3}, \quad (6.32)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – коэффициенты, зависящие от геометрии контактирующих тел и определяемые по [7, таблица 1] исходя из соотношения  $r_s / r_{s1}$ ;

$r_s$  – радиус шарика, мм;

$r_{s1}$  – радиус канавки на валу с пазами, мм.

Тогда минимально допустимый диаметр шарика  $d_s$ , мм, по условию

контактной прочности из уравнения (6.32) определится согласно выражению

$$d_s = 4 \left( [\sigma_H]^{3/2} \left( \frac{188,715}{v_1 v_2} \right)^{-3/2} N_2^{-1/2} + r_{s1}^{-1} \right)^{-1}, \quad (6.33)$$

где  $[\sigma_H]$  – допускаемые контактные напряжения, МПа.

Аналогично определяется минимальный диаметр ролика (ступени ролика) после преобразований формулы Герца для максимальных напряжений в зоне контакта «цилиндр-плоскость» [140, с. 26]:

$$d_s = \frac{0,637 N_2}{[\sigma_H]^2 (\Theta_1 + \Theta) l_R}, \quad (6.34)$$

где  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  – коэффициенты, определяемые по формуле (2.29);

$l_R$  – длина ступени ролика, контактирующего со звеном 2.

Допускаемые контактные напряжения для ППТК определим, как и для шариковинтовых передач с аналогичным принципом работы, согласно [140, с. 232] по формуле  $[\sigma_H] = k_{Ш} [\sigma_{H60}]$ , где  $[\sigma_{H60}]$  – допускаемые контактные напряжения при твердости контактирующих поверхностей, не менее 60 HRC;  $k_{Ш}$  – коэффициент снижения допускаемых напряжений при твердости поверхностей менее 60 HRC. Принимают  $[\sigma_{H60}] = 2500\text{--}3000$  МПа при длительной эксплуатации,  $[\sigma_{H60}] = 4000$  МПа – при кратковременной работе. Коэффициент  $k_{Ш}$  варьируется от 1 (60–62 HRC) до 0,415 (35 HRC), и его определяют по наименее твердой детали в передаче. Окончательно уточнить диаметр шарика и округлить до стандартного значения необходимо согласно сортаменту. Отметим, что для шариковинтовых передач, во избежание преждевременного износа шариков и канавок, рекомендуется зависимость  $N = 2660 d^2$  между нормальной силой и диаметром шарика [176, с. 175]. При этом результаты, полученные по формуле (6.33), идентичны при  $[\sigma_H] \approx 3000$  МПа и отношении  $r_s / r_{s1} = 0,99$ .

Необходимо также проверить выступы наружного кулачка, образующие периодический профиль, на прочность при изгибе. Выступ рассмотрим как консольную балку, по аналогии с зубом зубчатого колеса. Кривизной выступов в плоскости, перпендикулярной оси передачи, пренебрегаем. За расчетное примем сечение у основания выступа. Максимальная изгибающая сила, действующая на выступ со стороны тела качения, будет возникать при прохождении шариком средней линии

зацепления, при этом угол подъема  $\alpha_3$  будет максимальным –  $\alpha_{3\max}$ . При этом  $\alpha_{i\max} = \arctg(Z_i A_i / R_i)$ . Расчетные напряжения изгиба  $\sigma_F$  определяем на растянутой стороне выступа по следующей формуле:

$$\sigma_F = \sigma_{N_x} - \sigma_{N_z} = \frac{N_{3x} \cdot h_f}{W} - \frac{N_{3z}}{H}, \quad (6.35)$$

где  $\sigma_{N_x}$  – растягивающие напряжения изгиба на стороне  $BC$  выступа;  
 $\sigma_{N_z}$  – напряжения сжатия;  
 $N_{3x}$  – окружная сила, действующая на выступ наружного кулачка со стороны тела качения;  
 $N_{3z}$  – осевая сила;  
 $W$  – момент сопротивления сечения при изгибе;  
 $H$  – площадь сечения;  
 $h_f$  – расстояние от опасного сечения до точки приложения силы  $N_3$ .

$$s_3 = (D_{32} - D_{31}) / 2 = 0,25d_s; \quad W = s_3 s_f^2 / 6 = 0,25d_s s_f^2 / 6;$$

$$s_f = 2\pi R / Z_3 - d_s; \quad H = s_3 s_f = 0,25d_s (2\pi R / Z_3 - d_s), \quad (6.36)$$

где  $s_3$  – толщина выступа кулачка;  
 $s_f$  – ширина выступа у основания.

Приняв  $h_f \approx A$ , после подстановок формул (6.35) и (6.36) в выражение (6.34) и элементарных преобразований получим

$$\sigma_F = N_3 \left( \frac{6A \sin(\alpha_{3\max})}{0,25d_s \left( \frac{2\pi R}{Z_3} - d_s \right)^2} - \frac{\cos(\alpha_{3\max})}{0,25d_s \left( \frac{2\pi R}{Z_3} - d_s \right)} \right). \quad (6.37)$$

При выводе формулы (6.37) учтены геометрические зависимости  $r_{z2} = r_{z3} = 0,5r_s$ , характеризующие величину заглубления тела качения в канавку вала с пазами и длину контакта шарика с рабочими поверхностями наружного кулачка. Методика определения допускаемых напряжений изгиба для зубчатых передач подробно изложена в ГОСТ 21354-75, для ППТК она аналогична.

Износостойкость деталей передачи можно оценить по следующему условию:  $N_i \nu_{sk_i} \leq [N \nu_{sk}]$ , где  $N_i$  – сила, действующая на тело качения со

стороны основных звеньев ППТК;  $v_{sk}$  – скорость скольжения в контакте;  $[Nv_{sk}]$  – допустимое значение комплексного показателя, характеризующее износостойкость рабочих поверхностей кулачков и вала с пазами, Н·м/с.

Важным является вопрос определения коэффициента перекрытия, который в случае с ППТК представляет собой количество тел качения, одновременно находящихся в зацеплении с тремя основными звеньями передачи. Общее число шариков в одной секции ППТК равно  $n = Z_1 + Z_3 = 1 + Z_3$ , однако в передаче нагрузки участвуют не все тела качения. Для определения коэффициента перекрытия  $k_a$  разработан следующий алгоритм.

На первоначальном этапе рассчитывается максимальная высота выступа кулачка  $z_H$  (рисунок 6.16), измеренная относительно средней линии. Средняя линия – окружность, расположенная в плоскости  $xOy$  с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ , равным радиусу образующей цилиндрической поверхности, на которой располагаются взаимодействующие кривые с числами периодов  $Z_1$  и  $Z_3$ . Выступ формируется после прохождения по центральной многопериодной кривой инструмента (сферической или цилиндрической фрезы) радиусом, равным радиусу тела качения  $r_s$ . Исходными данными являются уравнение развертки на плоскость многопериодной кривой  $z = f(x)$  и параметры  $A$ ,  $Z_3$ ,  $r_s$ ,  $R$ . Величина  $z_H$  определяется из численного решения преобразованной системы уравнений (4.53) и (4.54) с тремя неизвестными  $x$ ,  $\alpha$ ,  $z_H$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{dx} f(x); \quad x + r_s \sin \alpha = \frac{\pi R}{2Z_3}; \quad z_H = f(x) - r_s \cos \alpha. \quad (6.38)$$

Угол  $\alpha$  является углом подъема кривой в рассматриваемой точке, т. е. углом между касательной  $\tau-\tau$  к кривой в данной точке (например, в точке  $M$ ) и осью абсцисс (рисунок 6.16).

После определения  $z_H$  реальная высота профиля корректируется в сторону уменьшения для удаления заостренных участков. Максимальная высота профиля будет равна  $z_{\max}$ . Далее система (6.38) записывается в измененном виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{dx} f(x); \quad x + r_s \sin \alpha = x_p; \quad z_{\max} = f(x) - r_s \cos \alpha. \quad (6.39)$$

Неизвестными в данной системе являются параметры  $x$ ,  $\alpha$ ,  $x_p$ . После их определения рассчитываем максимальную высоту  $A_p$  на развертке

кривой на плоскость путем подстановки найденного значения  $x$  в уравнение плоской развертки кривой:  $z_{\max} = f(x)$ . Параметр  $A_p$ , отсчитываемый от средней линии, показывает, какая часть кривой задействована в передаче нагрузки. Шарики, перемещаясь в процессе работы передачи по кривой, находясь ниже уровня, определяемого высотой  $A_p$ , участвуют в зацеплении. Попадая на участки кривой, расположенные выше этой высоты, они теряют контакт с рабочими поверхностями, хотя их движение остается полностью определенным по беговой дорожке внутреннего кулачка и в пазах вала с пазами.

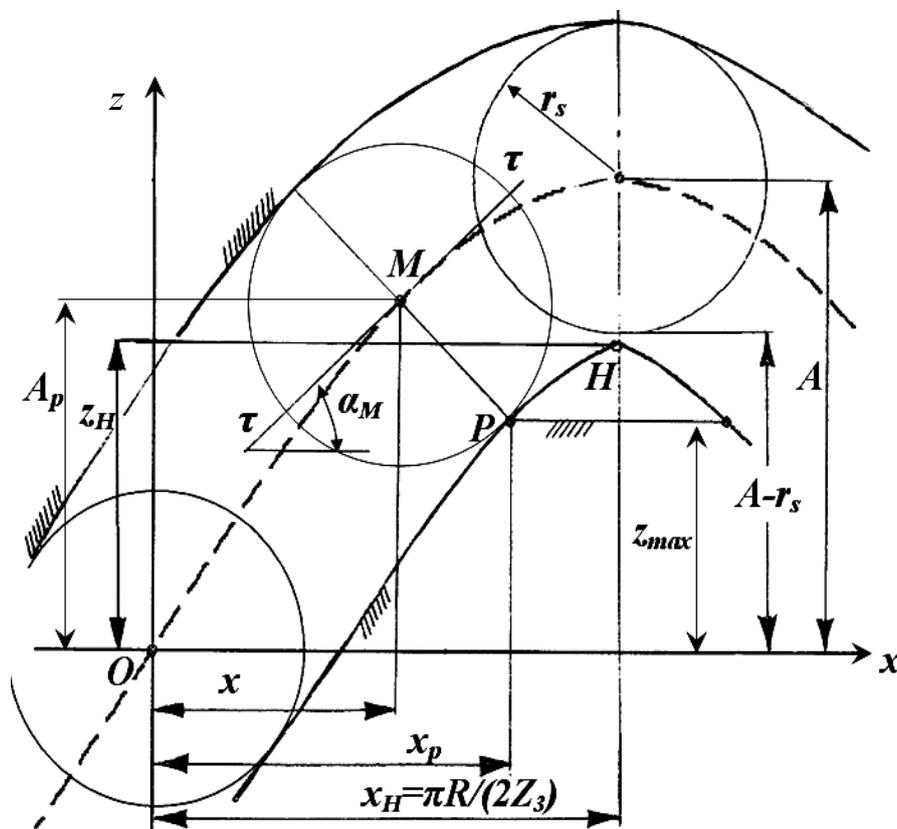
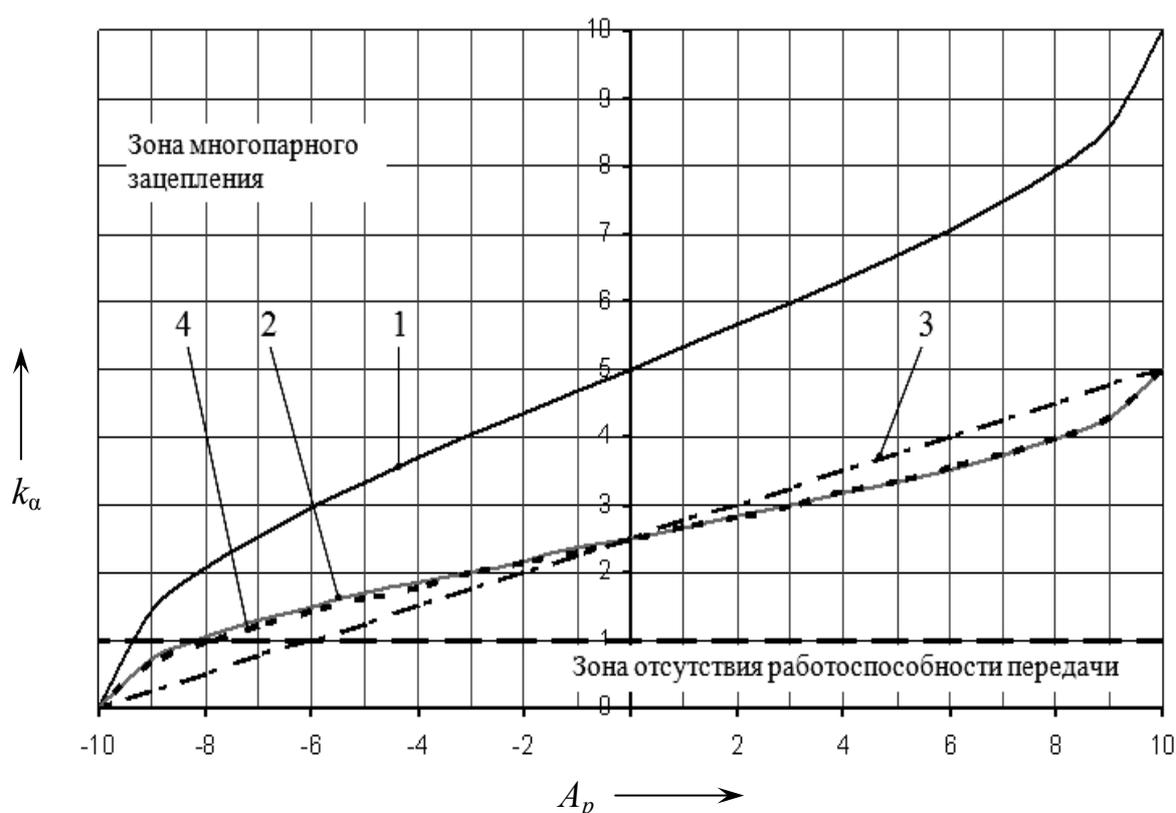


Рисунок 6.16 – К определению коэффициента перекрытия

На рисунке 6.17 приведены графики, отражающие изменения коэффициента перекрытия в зависимости от высоты  $A_p$  для передач с амплитудой  $A = 10$  мм, радиусом  $R = 20$  мм с различными типами кривых. Для численного определения коэффициента  $k_a$  была разработана программа, с помощью которой имитировалось согласованное пошаговое движение тел качения по различным кривым. На каждом шаге вычис-

лений определялось количество шариков, находящихся под уровнем, определяемым параметром  $A_p$ . Среднее значение этого количества за цикл работы (за оборот ведущего вала) и определялось как коэффициент перекрытия.

Анализ приведенных графиков позволил прийти к выводу, что зависимость коэффициента перекрытия от параметра  $A_p$  представляет собой график полупериода исходной кривой, расположенный вдоль оси ординат. Для получения аналитических зависимостей для определения  $k_\alpha$ , необходимо в исходных уравнениях выразить абсциссу  $k_\alpha$  через ординату  $A_p$ .



1 — для синусоиды с  $Z_3 = 9$ ; 2 — для синусоиды с  $Z_3 = 4$ ; 3 — для кусочно-винтовой кривой с  $Z_3 = 4$ ; 4 — для кривой передачи с ЭДСО-профилем с  $Z_3 = 4$

Рисунок 6.17 — К определению коэффициентов перекрытия сферической планетарной шариковой передачи

Коэффициент перекрытия для синусоиды

$$k_\alpha = \frac{n}{\pi} \arcsin\left(\frac{A_p}{A}\right) + \frac{n}{2}. \quad (6.40)$$

Для кусочно-винтовой кривой (кривой, представляющей собой сочетание наклонных отрезков)

$$k_{\alpha} = \frac{n}{A} A_p + \frac{n}{2} = \frac{n(A_p + A)}{2A}. \quad (6.41)$$

Для сочетания кривых в передаче, схема которой приведена на рисунке 4.10,

$$k_{\alpha} = \frac{n}{\pi} \arcsin \left( \sin \left( \frac{A_p}{R} \right) / \sin \left( \frac{A}{R} \right) \right) + \frac{n}{2}. \quad (6.42)$$

Для передачи на рисунке 4.10 с параметрами  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 14$ ,  $A = 15$  мм,  $R = 50$  мм,  $r_s = 6,15$  мм при числе шариков  $n = 15$  коэффициент перекрытия составил  $k_{\alpha} = 6,35$ .

#### 6.4 Методика расчета и проектирования ППТК

Рассмотрим алгоритм расчета основных параметров ППТК для создания редуцирующего узла механизма. Исходные данные для расчета – необходимый максимальный крутящий момент на выходном валу редуктора  $M_{\max}$ , общее передаточное отношение  $u_{\text{общ}}$ , материал деталей ППТК и вид их термообработки.

1 Первоначально выбираем тип передачи. Предпочтительным является цилиндрический тип как наиболее исследованный. В случае установленных ограничений на осевые габариты передачи целесообразно применять плоский тип ППТК. В редких случаях с учетом специфических компоновочных требований применяется конический тип передач, при разработке передач с пересекающимися осями и изменяющимся углом их пересечения – сферический тип.

Исходя из заданного закона движения выходного звена механизма и его кинематических характеристик, выбираем тип кривых зацепления. При проектировании скоростных передач рекомендуется использовать синусоидальные либо циклоидальные кривые. Для механизмов с ручным приводом целесообразно использование кусочно-винтовых кривых. В случае, если закон движения выходного звена механизма носит специфический характер, необходимо использовать алгоритм синтеза кривых зацепления (см. подразд. 4.3).

2 Выбираем кинематическую схему по таблице 3.1 и конструктивное исполнение секции передачи (см. таблицу 3.2) исходя из конк-

ретных условий работы. Как правило, выбираем чаще всего первую кинематическую схему, позволяющую получить максимальное значение передаточного отношения при высоком КПД относительно других кинематических схем. Для механизмов развинчивания труб приемлема кинематическая схема № 2, которая обеспечивает разнонаправленность вращений ведущего и ведомого валов.

Учитывая значения  $u_{общ}$ , принимаем решение о числе секций (ступеней). И если общее передаточное отношение меньше либо равно 12, целесообразно проектировать одну секцию ППТК. Большие значения передаточных отношений в силовой передаче возможно реализовать при  $R > 100$  мм. В плоских передачах при тех же геометрических параметрах можно реализовать передаточное отношение на 10–15 % больше, чем в цилиндрических ППТК. Если ППТК проектируется с большими значениями  $u_{общ}$ , необходимо разрабатывать несколько секций, соединенных последовательно. Далее рассматриваем алгоритм проектирования одной секции ППТК.

Для большинства случаев применения ППТК (исключая дифференциальные механизмы) число периодов кривой ведущего звена  $Z_1 = 1$ . Тогда для первой кинематической схемы  $Z_3 = u - 1$ . Число тел качения в одной секции в этом случае  $n = Z_1 + Z_3 = 1 + Z_3$ .

3 Определяем радиус средней окружности кривых  $R$ . Как правило, он ограничен максимальным диаметром корпуса механизма, куда встраивается передача, а тот, в свою очередь, зависит от диаметра трубы, скважины и т. д., где применяется разрабатываемый механизм.

В случае, если максимальный диаметр передачи не позволяет расположить большое число периодов на многопериодном звене, принимается решение о проектировании нескольких, последовательно соединенных секций.

4 Предварительно назначаем значение приведенного коэффициента трения. Для контакта тела качения с твердостью около 60 HRC с закаленными стальными рабочими поверхностями (сталь 40X) при граничной смазке (графит и масло ТАД-17И) приведенный коэффициент трения рекомендуется для предварительных расчетов принимать  $f = 0,05$ .

5 Оптимальное значение амплитуды определяем по формуле (5.71); по формуле (4.14) – средние углы подъема кривых  $\alpha_{cp1}$  и  $\alpha_{cp3}$ ; по формуле (4.15) – максимальные углы подъема кривых  $\alpha_{max1}$  и  $\alpha_{max3}$ .

6 Определяем коэффициент перекрытия для кривой зацепления. Из решения системы (6.38) находим параметр  $z_H$ . Решая систему

уравнений (6.39), определяем параметры  $x$ ,  $\alpha$ ,  $x_p$ . Подставив найденное значение  $x$  в уравнение плоской развертки кривой, находим  $A_p$ :  $A_p = z_{\max} = f(x)$ .

Используем полученные выражения (6.40)–(6.42) для выбранных кривых (известных) или строим график  $k_\alpha(A_p)$  как полупериод выбранной кривой, отраженный вдоль оси ординат. Определяем коэффициент перекрытия  $k_\alpha$ .

7 Определяем силы  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , действующие в зацеплении по формулам (5.81)–(5.83). При этом вместо числа тел качения  $n$  в формулу для определения силы  $N_2$  подставляем значение коэффициента перекрытия  $k_\alpha$  при условном двухстороннем контакте тела качения с кулачками и  $k_\alpha/2$  при одностороннем контакте тела качения с одним из кулачков (см. рисунок 5.10, а). Условный вид контакта определяется на плоской развертке; если беговая дорожка ограничена двумя кривыми (верхней и нижней), то считаем контакт двухсторонним, если одной – односторонним. В рассмотренных конструкциях ППТК кулачки с однопериодной беговой дорожкой являлись составными и обеспечивали двухсторонний контакт. Но он будет действительно двухсторонним, когда и многопериодный кулачок будет составным (рисунок 6.18).

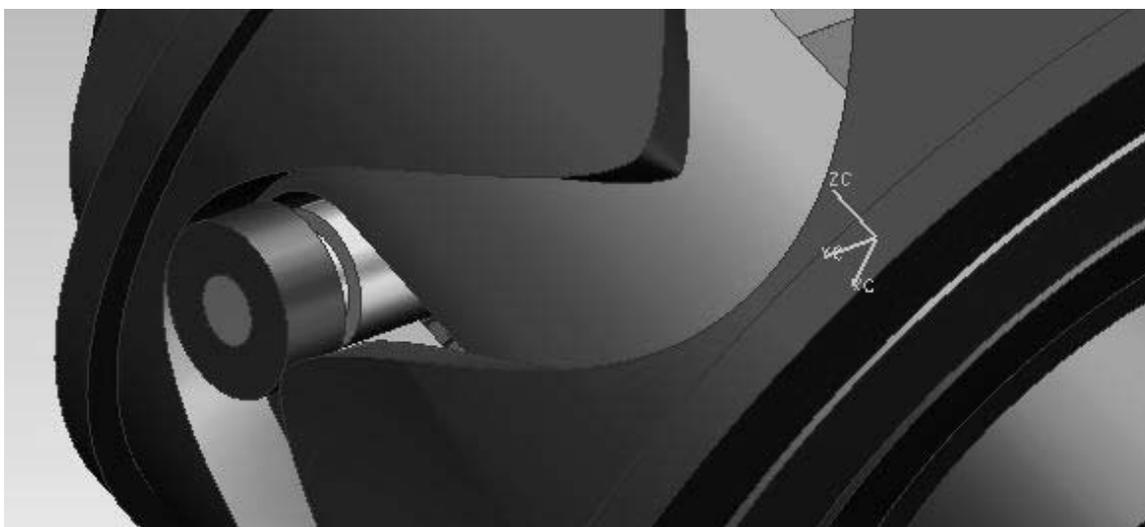


Рисунок 6.18 – Контакт составного ролика с составным многопериодным кулачком

8 Определяем допускаемые контактные напряжения и допускаемые напряжения изгиба исходя из материалов деталей, термообработки и циклограммы нагружений (по рекомендациям подразд. 6.3).

9 Определяем диаметр шарика по формуле (6.33) с учетом допускаемых контактных напряжений. Округляем результат до ближайшего целого значения либо уточняем по сортаменту свободных тел качения. Диаметр ступенчатого ролика определяется как минимальный по формуле (6.34).

10 Рассчитываем геометрию зацепления (подразд. 5.4). Значения углов  $\gamma$  и  $\beta$  определяем по формуле (5.76).

11 Определяем максимальные контактные напряжения и максимальные напряжения изгиба по формулам (6.32) и (6.37) соответственно и сравниваем их с допускаемыми напряжениями.

$$\sigma_{H \max} = 0,798 \sqrt{\frac{N_2}{d_s (\Theta_1 + \Theta) l_R}}. \quad (6.43)$$

Проверяем по максимальному значению реакций ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ) прочность подшипников качения (или скольжения), установленных на роликах. При превышении максимальных напряжений допустимого предела и при невозможности изменить основные геометрические параметры передачи (невозможно увеличить  $R$  из-за требований компоновки) принимаем решение о проектировании многосекционной ППТК с параллельным соединением секций (рисунки 7.1 и 7.2).

12 Уточняем приведенный коэффициент трения скольжения и коэффициент трения качения по формулам (2.27) и (2.28) соответственно согласно разработанной методике (подразд. 2.1).

13 Определяем потери мощности в передаче по выражению (2.80). Корректируем геометрию зацепления при необходимости.

14 Исследуем динамическую модель зацепления (подразд. 5.2) для оценки устойчивости системы при переходных состояниях.

Вопросы автоматизации алгоритмов расчетов ППТК рассмотрены в [207].

## 7 Механизмы, созданные на основе ППТК

### *7.1 Разработка и испытания устройства для ликвидации аварий при бурении скважин*

Так как передаточное отношение цилиндрического типа не зависит от диаметральных размеров, основной сферой применения ППТК до середины 80-х гг. XX в. была горнодобывающая отрасль промышленности – механизмы буровой техники, ремонта и технического обслуживания скважин [208, 209]. Рассмотрим конструкцию, принцип работы и результаты испытаний устройства для ликвидации аварий при бурении скважин, разработанного на базе синусошариковых передач, как практический пример применения многорядной планетарной шариковой передачи [195, 196]. Прихват колонны труб является самым многочисленным и тяжелым видом аварий при бурении скважин на нефть и газ, особенно при глубоком бурении. Наиболее трудоемкие работы в процессе ликвидации аварий, связанные с прихватами, – это последовательное развинчивание и извлечение на поверхность бурильных труб. В настоящее время эти операции выполняются с помощью специального инструмента с левой резьбой. Обычно на несколько буровых установок или на партию его имеется только один комплект. При возникновении аварий он перевозится с одного агрегата на другой за десятки километров. Наличие на агрегате двух колонн (правой и левой), особенно при большой глубине скважины, ухудшает условия труда и увеличивает нагрузку на вышку [210].

Вместо левого снаряда нами было предложено устройство для развинчивания бурильных труб (УРБТ), которое опускается в скважину с колонной обычных труб с правой резьбой. Основная часть устройства – шестирядный планетарный шариковый редуктор цилиндрического типа. Редуцирующий узел устройства приведен на рисунке 7.1, детали редуктора – на рисунке 7.2, само устройство в сборе – на рисунке 7.3.

Рассмотрим конструкцию и принцип работы УРБТ [211, 212]. На ведущем валу редуктора закрепляются с помощью шпонок внутренние втулки с синусоидальными беговыми дорожками, с корпусом. Также шпонками соединяются наружные втулки. Водило (сепаратор) представляет собой деталь трубчатой формы с прорезями и является промежуточным звеном.

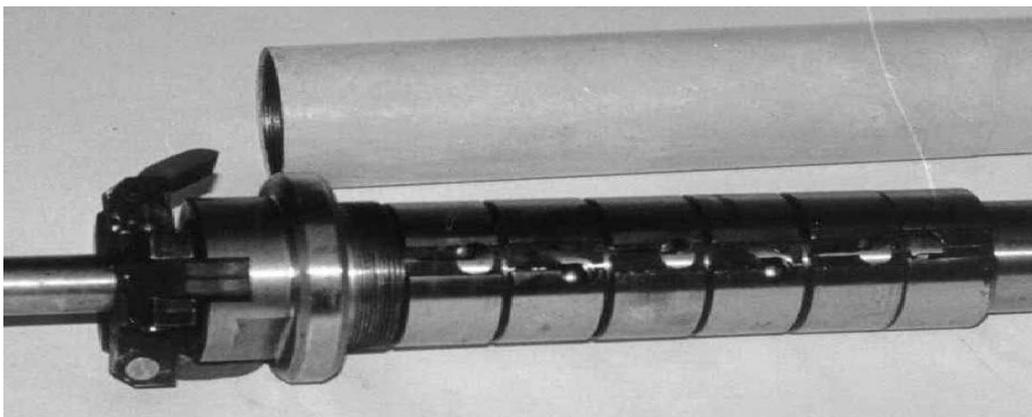


Рисунок 7.1 – Редуцирующий узел и корпус УРБТ

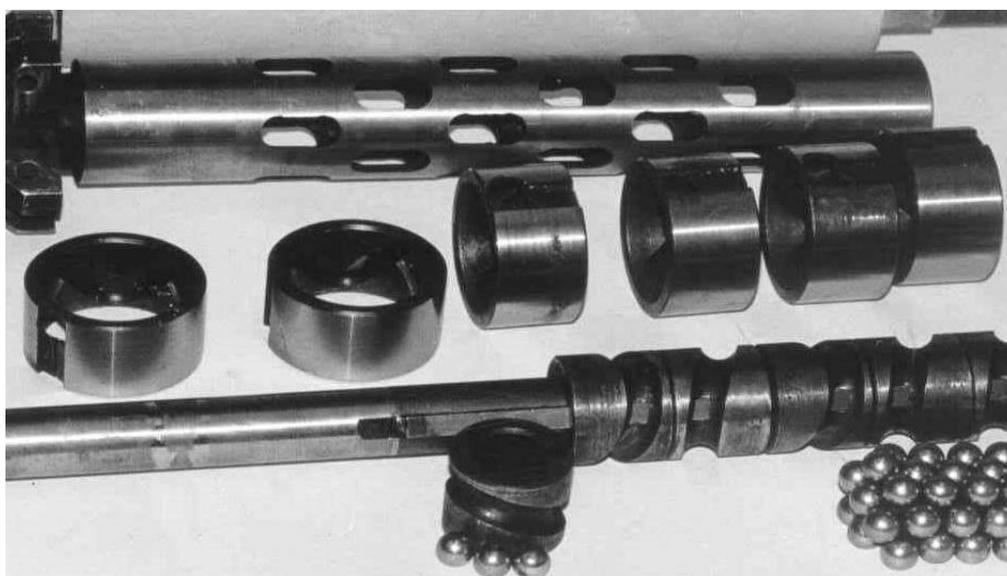


Рисунок 7.2 – Детали многосекционного редуцирующего узла



Рисунок 7.3 – УРБТ в сборе

Устройство своим ведущим валом крепится к ловильной колонне и опускается в скважину до момента контакта ловильного инструмента (метчика либо колокола) с верхней частью оставленных в скважине труб.

Ловильный инструмент крепится с помощью резьбового соединения на нижней части УРБТ. Устройству сообщается осевая нагрузка, при действии которой срабатывает заякоривающий механизм, и УРБТ фиксируется в скважине.

Редуктор работает по обращенной схеме – с остановленным водилом. Ведущему (внутреннему) валу сообщается правое вращение; ведомый вал, которым является корпус с ловильным инструментом (максимальный диаметр корпуса – 88 мм), получает левое вращение с увеличением крутящего момента. Происходит срыв прихваченной резьбы, развинчивание и извлечение труб на поверхность. При необходимости операция повторяется. Водило с помощью заякоривающего механизма фиксирует устройство внутри обсадной колонны и передает на ее стенки реактивный момент от развинчивания при приложении к устройству осевой нагрузки. УРБТ имеет сквозное отверстие для прохода промывочной жидкости.

Конструкция стенда, спроектированного для проведения стендовых испытаний УРБТ на предельную нагрузку, показана на рисунке 7.4. К стоякам 1 буровой установки крепится обсадная труба 2 диаметром 146 мм. К шпинделю 3 бурового станка 4 с помощью резьбового соединения закрепляется испытуемое устройство 5. Нижний конец устройства должен контактировать через упор 6 с опорой 7. Ведомый вал через рычаг 8 соединен с динамометром 9, прикрепленным к стояку буровой установки. При нагружении устройства определенной осевой силой с помощью гидравлической системы бурового станка срабатывает заякоривающий механизм 10, который фиксирует устройство в обсадной колонне 2. Максимальное усилие фиксируется с помощью динамометра.

Стендовые испытания проводились при различных осевых нагрузках. В таблицу заносились максимальные значения крутящего момента, т. е. те значения, при которых происходил срыв якорей со стенок обсадной колонны. Результаты стендовых испытаний показали, что устройство способно передавать крутящий момент 1,98 кН·м при осевой нагрузке 20 кН. Согласно справочным данным [213] для труб диаметром 73 мм крутящий момент при развинчивании составляет 1,8 кН·м. Указанная величина момента необходима для страгивания, а в последующем – для полного развинчивания трубы; необходимые значения крутящих моментов на порядок меньше и не превышают 0,1–0,2 кН·м.

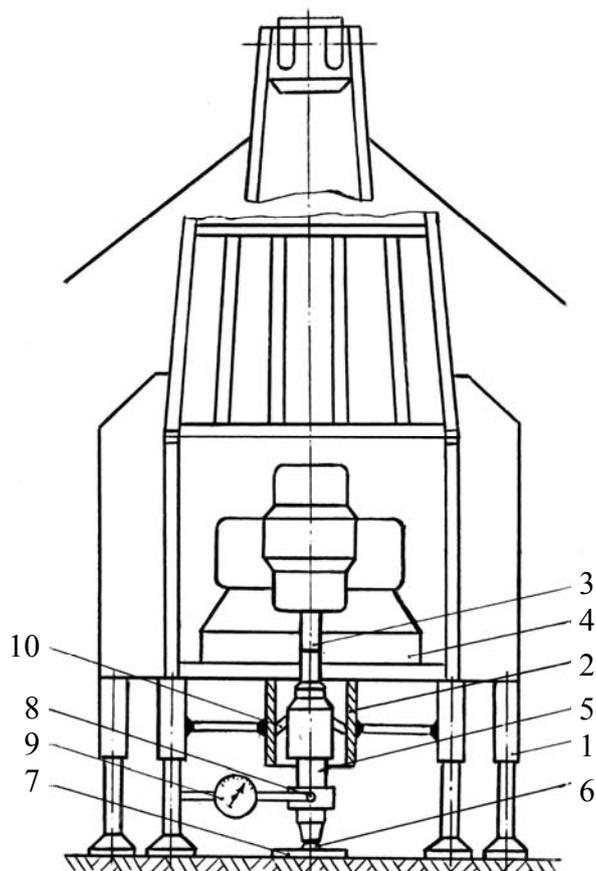


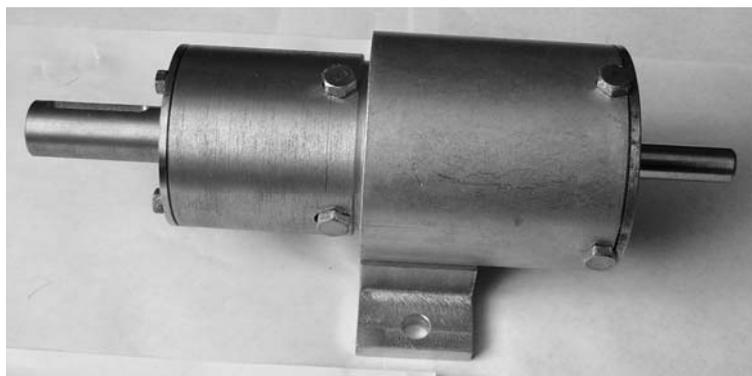
Рисунок 7.4 – Стенд для испытаний УРБТ

Испытания проводились с помощью аппаратуры КУРС 411 буровой установки УКБ-500с. Измерения фиксировались динамометром ДОН-5,0 ГОСТ 13837-79. Стендовые испытания, проходившие в Ивано-Франковском государственном университете нефти и газа, подтвердили работоспособность устройства [77].

## ***7.2 Конструкции редукторов и мотор-редукторов со встроенными ППТК***

Для проведения экспериментальных исследований был разработан одноступенчатый редуктор с передаточным отношением 9 и диаметром корпуса 110 мм (рисунок 7.5). Для повышения жесткости опоры выходного вала были сконструированы в стакане по аналогии с опорами входных валов конических зубчатых редукторов.

а)



б)



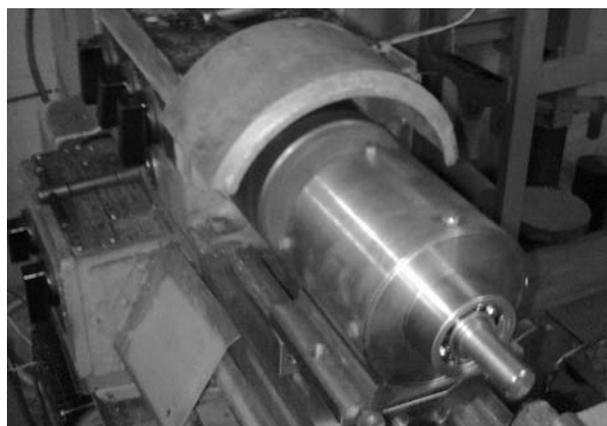
а – редуктор в сборе; б – основные детали передачи

Рисунок 7.5 – Планетарный шариковый редуктор с передаточным отношением  $u = 9$

Вал с пазами изготавливался двух видов – с пазами прямоугольного профиля и с пазами круглого профиля (рисунок 7.5, б). Рабочий профиль многопериодного кулачка изготавливался на станке с ЧПУ сферической фрезой по программе, задающей траекторию центра фрезы.

Также был разработан редуктор с составными роликами (рисунок 7.6), обеспечивающий повышение нагрузочной способности и снижение потерь на трение скольжения. Кинематическая схема редуктора приведена на рисунке 3.9, а.

а)



б)



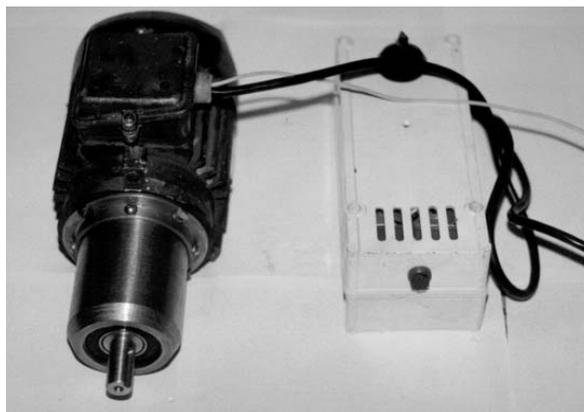
а – обкатка редуктора на токарном станке; б – основные детали передачи

Рисунок 7.6 – Роликовый редуктор с составными роликами (передаточное отношение  $u = 9$ )

Компактность ППТК позволяет разрабатывать отдельные модули (ступени), которые затем соединяются последовательно. Так, на базе двухступенчатой планетарной шариковой передачи, ступени которой соединены последовательно, разработано несколько типоразмеров редукторов.

Нами было спроектировано несколько конструкций мотор-редукторов [214]. Первая ступень мотор-редуктора (рисунок 7.7, а) спроектирована по третьей (обращенной) кинематической схеме: вал с пазами остановлен и связан с корпусом, выходным звеном является наружный кулачок. Наружный кулачок с многопериодным профилем изготовлен на валу, где размещены два кулачка, образующие беговую дорожку внутреннего кулачка второй ступени. Таким образом, этот вал выходной для первой ступени и входной для второй ступени [215].

а)



б)

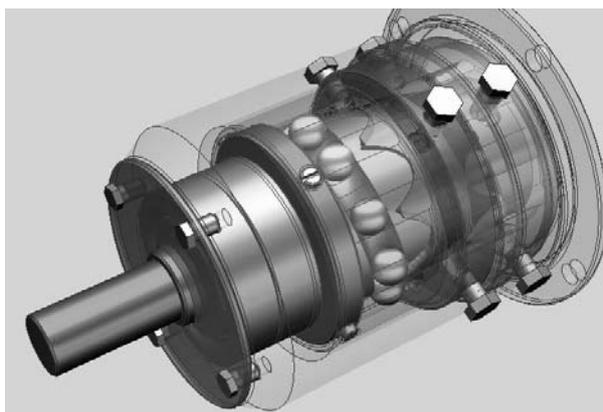


Рисунок 7.7 – Мотор-редуктор (а) и 3D-модель редуцирующего узла мотор-редуктора (б) с двухступенчатыми ППТК

Вторая ступень сконструирована по первой кинематической схеме, т. е. выходное звено – вал с пазами, остановленное звено – наружный кулачок. Блок управления служит для обеспечения реверсивной работы мотор-редуктора.

В рассматриваемой конструкции используется асинхронный электродвигатель типа 4АА5682У3 (номинальная мощность 250 Вт) с частотой вращения 2760 об/мин. Редуцирующая часть имеет передаточное отношение, равное 72 (первая ступень – 8, вторая ступень – 9), наружный диаметр корпуса редуктора – 70 мм. Общее передаточное отношение мотор-редуктора определится по следующей формуле:

$$u = \left( -\frac{Z'_3}{Z_1} \right) \left( 1 + \frac{Z_3''}{Z_1} \right) = -Z'_3(1 + Z_3'') = -8(1 + 8) = -72. \quad (7.1)$$

Количество штрихов (верхние индексы) при числах периодов в формуле (7.1) обозначает номер ступени редуктора.

На рисунке 7.8 показаны редуцирующие узлы мотор-редукторов, созданные на базе ППТК плоского типа. Вращение ведущего кулачка (эксцентрика 2) вынуждает перемещаться составные тела качения 4 (ролики с подшипниками) по многопериодной беговой дорожке, исполненной на торце корпусного кулачка 3 и вдоль пазов выходного вала 1, вынуждая последний вращаться с меньшей угловой скоростью, чем скорость эксцентрика.



Рисунок 7.8 – Редуцирующие узлы на базе ППТК плоского типа

В рассматриваемой передаче использованы смещенная окружность и сопряженная с ней многопериодная кривая для создания беговых дорожек. Подшипники, закрепленные на концах роликов, позволяют обеспечить качение без проскальзывания во всех кинематических парах редуктора, что повышает его КПД и нагрузочную способность. Универсальность позволяет компоновать присоединительные элементы редуцирующих узлов в последовательные соединения. Передаточное число трехсекционного редуктора будет равным 729 при передаточном числе одной секции, равном девяти. Кинематическая схема этой передачи приведена на рисунке 3.9, б.

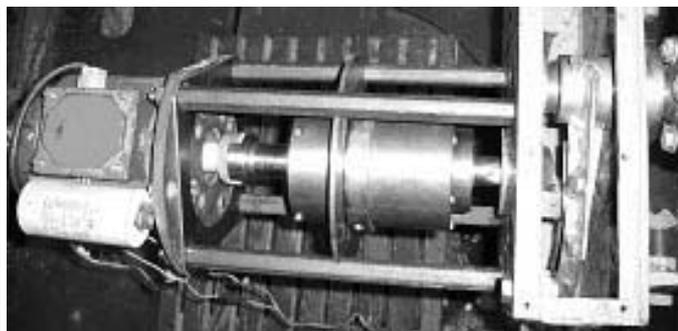
По аналогичной схеме создан редуктор для двигательного привода переключения путевых токоразъединителей системы электрификации

железной дороги (рисунок 7.9). Редуктор имеет наружный диаметр 110 мм, его передаточное отношение также равно 72. В составе привода редуктор соединен входным валом с асинхронным электродвигателем, выходным – с кулисным механизмом [216].

а)



б)



а – общий вид редуктора; б – редуктор в составе двигательного привода на испытательном стенде

Рисунок 7.9 – Редуктор с двухступенчатой ППТК

Используемый нами при испытаниях смазочный материал, закладываемый в редуцирующие узлы, представлял собой консистентную смесь графита и гипоидного масла ТАД 17-и.

Еще один редуктор был создан как макетный образец для проверки кинематических характеристик многопериодных передач [217, 218]. В нефтегазовой отрасли промышленности существует проблема создания малогабаритных редуцирующих узлов для встраивания в устройства по обслуживанию и ремонту скважин. Фирмы дальнего зарубежья предлагают редукторы с необходимыми габаритными и техническими характеристиками, однако их стоимость значительна. Нами был создан трехступенчатый редуктор (рисунок 7.10) с последовательно соединенными ступенями (все модули сконструированы по первой кинематической схеме) с общим передаточным отношением, равным 729 (9 в каждой ступени), максимальным диаметром корпуса 36 мм и общей длиной 116 мм. Кинематические зависимости были подтверждены, предварительно определенный КПД составил около 0,46 (в одной секции соответственно 0,77). Нами проводятся работы по совершенствованию конструкции редуктора и повышению его нагрузочной способности.

а)



б)



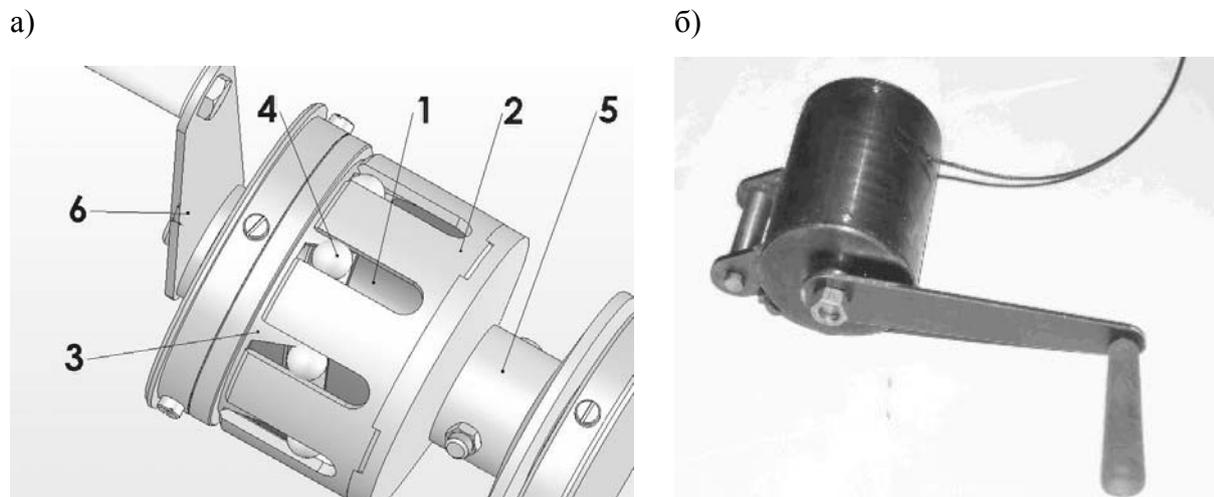
Рисунок 7.10 – Модули трехступенчатого редуктора для скважинного прибора (а) и редуктор в сборе (б)

### ***7.3 Средства малой механизации, разработанные на базе ППТК***

Применение малогабаритных ППТК возможно в качестве редуцирующих узлов для устройств, работающих по обслуживанию водопроводных, канализационных труб, для передачи полезных усилий в труднодоступные места (в качестве гайковертов и пр.) [219, 221]. ППТК можно использовать для механизмов, работающих в режиме частных «пусков–остановов», в том числе и для создания средств малой механизации, механизмов технологических приспособлений и т. д. Рассмотрим несколько примеров.

**Ручные лебедки.** На сегодняшний день разработано множество конструкций ручных лебедок с определенными преимуществами и недостатками, разработанных на базе различных типов механических передач, в том числе и с телами качения [222, с. 208–209]. Рассмотрим преимущества лебедки, созданной на базе цилиндрической ППТК [223–226]: малые массогабаритные показатели (диаметр лебедки 110 мм, масса около 8 кг); высокая технологичность изготовления деталей, отсутствие в конструкции дорогостоящих материалов и, следовательно, низкая себестоимость; самоторможение при обратном ходе, легкость сборки-разборки. Конструкция редуцирующего узла лебедки приведена на рисунке 7.11. Ведущий вал представляет собой два кулачка, закрепленных на цилиндрическом основании, соединенном с рукояткой 6. При вращении рукоятки тела качения 4 перемещаются по многопериодной торцовой поверхности неподвижного кулачка 3, связанного с

неподвижным корпусом (на рисунке 7.11 корпус не показан), и вдоль пазов вала 2. Вал 2 – выходной, он соединен с барабаном 5, на котором закреплен трос.



а – конструкция редуцирующего узла лебедки; б – общий вид лебедки

Рисунок 7.11 – Ручная лебедка

Расчетная масса поднимаемого груза  $m_{\Gamma}$  определится по формуле

$$m_{\Gamma} = P_p l_p u \eta / (r_{\delta} g),$$

где  $P_p$  – усилие на рукоятке, Н;

$l_p$  – длина рукоятки, мм;

$u$  – передаточное отношение;

$\eta$  – КПД редуцирующего узла;

$r_{\delta}$  – радиус барабана лебедки, мм;

$g$  – коэффициент перевода ньютонов в килограммы,  $g = 9,8$ .

При  $P_p = 80$  Н,  $l_p = 200$  мм,  $r_{\delta} = 20$  мм,  $u = 9$  и  $\eta = 0,7$  получим  $m_{\Gamma} \approx 500$  кг. Максимальная поднимаемая масса может снижаться, т. к. при намотке троса увеличивается  $r_{\delta}$ . Скорость подъема груза  $v_{\Gamma}$  зависит от угловой скорости вращения входного вала  $\omega_{вх}$ . Для лебедки с электрическим приводом  $v_{\Gamma} = \omega_{вх} r_{\delta} / u$ . Для лебедки с ручным приводом целесообразнее оперировать величиной перемещения груза  $x_{\Gamma}$  за один оборот рукоятки лебедки:  $x_{\Gamma} = 2\pi r_{\delta} / u$ . Для рассчитанной и изготовленной лебедки  $x_{\Gamma} = 14$  мм в начальный момент намотки.

При рассмотрении барабана как входного вала, передающего вращение на рукоятку лебедки, КПД определится по данным таблицы 5.3 для третьей кинематической схемы. Проанализируем изменение КПД передачи для двух кинематических схем (первой и третьей). Очевидно, что при увеличении коэффициента трения потери в зацеплении возрастают, а КПД уменьшается. Однако для третьей кинематической схемы (предполагается передача движения от барабана на рукоятку) такое уменьшение происходит более интенсивно, чем для первой кинематической схемы (рисунок 7.12). Это свидетельствует о наличии самоторможения в механизме, что для грузоподъемных механизмов является преимуществом.

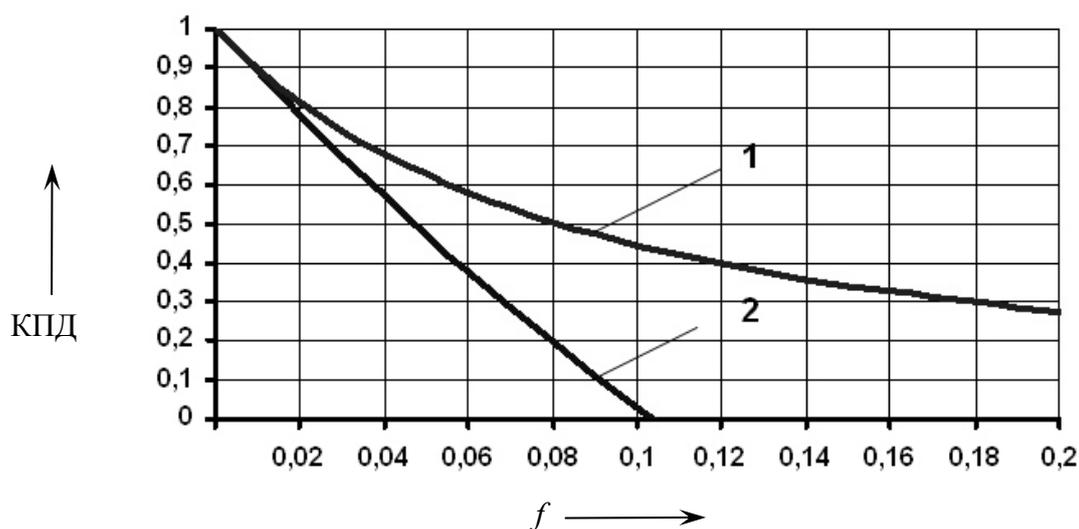


Рисунок 7.12 – Изменение КПД передачи от коэффициента трения для первой (1) и третьей (2) кинематических схем ППТК

Несколько конструкций ручных лебедок было изготовлено и испытано в Белорусско-Российском университете. В рассмотренной конструкции лебедки предусмотрена возможность ускоренной намотки-размотки троса: при отворачивании стопорного винта фиксация наружного кулачка в корпусе прекращается и барабан поворачивается на один оборот за один оборот рукоятки. В другой конструкции с передаточным отношением  $u = 12$  и составными роликовыми сателлитами предусмотрена регулировка зацепления.

**Балонные ключи.** Отворачивание гаек, крепящих ведущие колеса на грузовых автомобилях ЗИЛ и ГАЗ, является зачастую довольно трудоемкой операцией. При длительной эксплуатации гайка прикипает к

футорке (шпильке). Для срыва гайки к соединению необходимо приложить значительный крутящий момент, причем при отворачивании гайка может повернуться вместе с футоркой. Это серьезно осложняет демонтаж колеса и требует проведения нештатных мероприятий по разъединению гайки с футоркой, вплоть до срезания гайки автогеном. В заводских условиях, на транспортных участках и в гаражах предприятий операции по сборке и демонтажу резьбовых соединений проводятся с помощью пневматических и электрических гайковертов. В полевых условиях усилий, прилагаемых водителем к рукоятке обычного баллонного ключа, может оказаться недостаточно.

Нами разработаны несколько конструкций баллонных ключей со встроенным редуцирующим узлом для решения этой задачи [227, 228]. Корпус ключа устанавливается шестигранником на гайку, а квадратом, выфрезерованным на выходном валу, на футорку (рисунок 7.13). При повороте рукоятки ключа корпус будет вращаться до тех пор, пока не упрется выступающим винтом в ступицу, обеспечив таким образом передачу реактивного момента на колесо. При этом с помощью полезного усилия на выходном валу производится отвинчивание футорки. Для отвинчивания гайки стопорный винт удаляется из корпуса ключа. Реактивный момент в этом случае будет направлен на футорку, предотвращая ее отвинчивание. Аналогичным образом осуществляются операции по завинчиванию деталей.



Рисунок 7.13 – Общий вид ключа для демонтажа ведущих колес грузовых автомобилей ЗИЛ и ГАЗ

Нами также разработаны конструкции планетарных ключей на базе многопериодных ППТК с передаточными отношениями, равными 4–5, для демонтажа колес грузовых автомобилей. Несколько таких ключей (рисунки 7.14 и 7.15) изготовлены на предприятиях г. Могилева и Могилевской области.

а)



б)



а – ключ в сборе; б – детали ключа

Рисунок 7.14 – Общий вид баллонного ключа для автомобилей ГАЗ-53 со встроенной многопериодной ППТК

Разработана конструкция ключа для завинчивания и отвинчивания гаек, крепящих головки блока цилиндров дизельного двигателя тепловоза ЧМЭ-3. Ключ сочетает в себе преимущества редуктора – усилителя момента и предохранительной муфты (рисунок 7.16).

Защита резьбового соединения от перегрузки достигается тем, что при превышении предельного значения крутящего момента шарики, прижимаемые к наружному кулачку посредством пружин, отжимаются, позволяя наружному кулачку свободно вращаться, в результате чего прекращается передача крутящего момента от приводного вала к валу с прорезями. Регулирование предельного крутящего момента осуществляется поворотом и соответствующим осевым смещением гайки с выполненным на ее торце скосом. Удобство механизма заякоривания в эксплуатации заключается в возможности фиксирования его на

различных высотах вследствие нахождения удобных поверхностей для заякоривания на разных уровнях относительно резьбового соединения.

а)



б)



а – ключ в сборе; б – детали ключа

Рисунок 7.15 – Общий вид баллонного ключа для автомобилей ГАЗ-3309 и ГАЗ-33021 со встроенной многопериодной ППТК

Приспособление для демонтажа и сборки резьбовых соединений [229] состоит из приводного вала 1, на котором закреплен винтами 2 составной внутренний кулачок 3, образующий беговую дорожку 4. В конструкцию ключа также входят вал 5 с пазами 6 на внутренней поверхности, наружный кулачок 7, имеющий периодическую торцовую поверхность 8 и тела качения (шарики) 9.

Внутренний кулачок 3, вал 5 с пазами, наружный кулачок 7 и тела качения 9 образуют планетарную шариковую передачу 10. Наружный кулачок 7 стопорится в корпусе 11 с помощью шариков 12, прижимаемых пружинами 13 посредством пластин 14 и 15 и гайки 16 с выполненным на ее торце скосом 17. Приводной вал 1 установлен в корпусе 11 с помощью подшипников 18 и 19, а вал 5 с пазами установлен в корпусе 11 с помощью подшипников 20. Конструкцией предусмотрена крышка 21, крепящаяся к корпусу 11 с помощью винтов 22, и съемная рукоятка 23,

устанавливаемая в отверстии приводного вала 1. В корпусе 11 с помощью винтов 24 закреплен стакан 25, в котором устанавливаются подшипники 20. На стакан 25 устанавливается ползун 26, в котором выполнен сквозной осевой паз 27. В ползуне 26 крепятся якоря 28. Подвижность ползуна 26 ограничивается посредством винтов 29 и 30. Ползун 26 с осевым пазом 27, якорями 28 и винтами 29, 30 образует механизм закоривания 31. На торце вала с прорезями 5 выполнен шестигранник 32. Шестигранник 32 устанавливается в отверстие отвинчиваемой или завинчиваемой гайки 33. Шарики 12, пружины 13, пластины 14 и 15 и гайка 16 со скосом 17 образуют предохранительное устройство предельного момента 34.

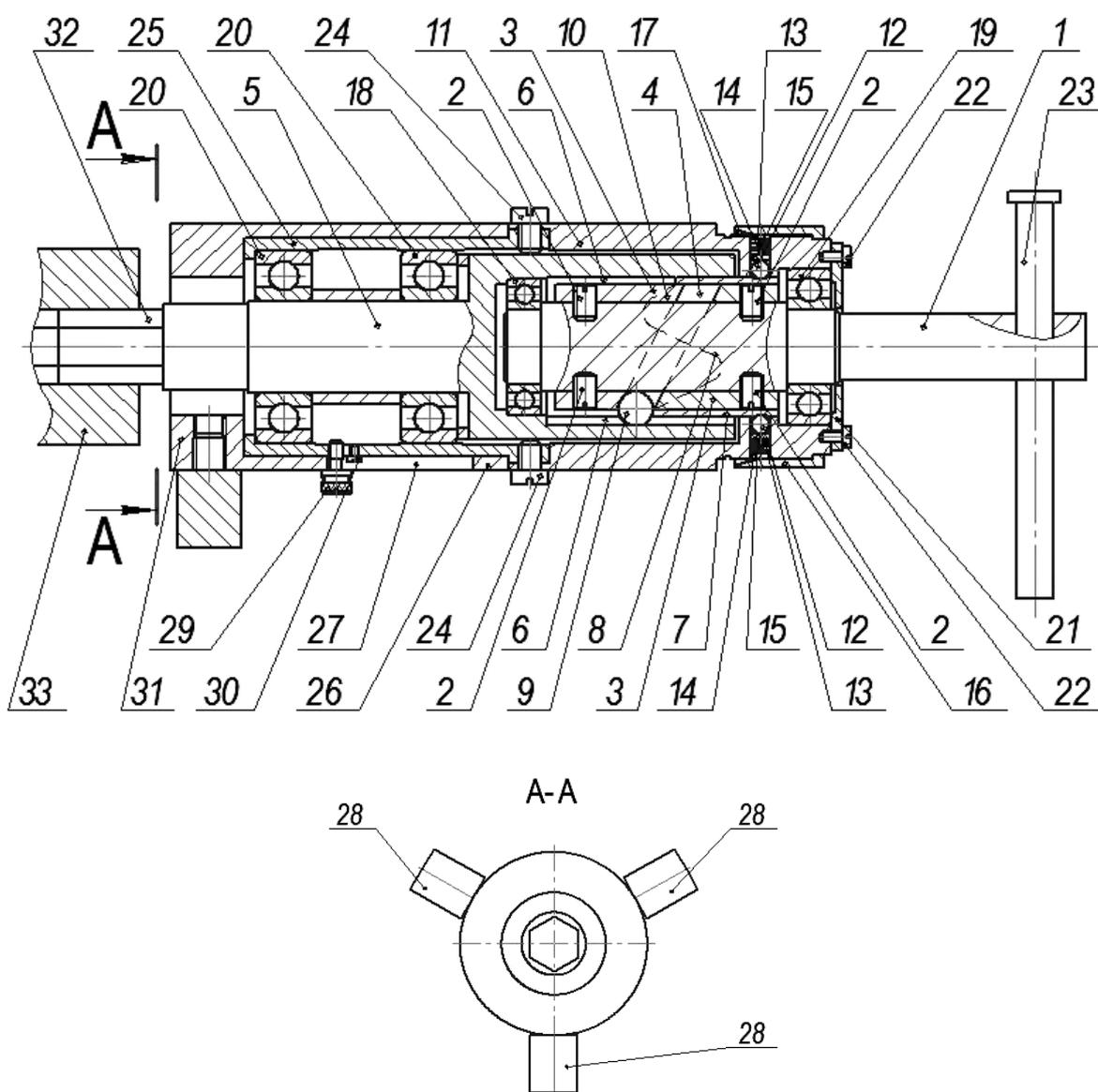


Рисунок 7.16 – Схема ключа для демонтажа и сборки резьбовых соединений

Ключ устанавливается так, чтобы шестигранник 32 на торце вала 5 вошел в зацепление с шестигранным отверстием отвинчиваемой или завинчиваемой гайки 33. С помощью винта 29 ползун 26 фиксируется на необходимой высоте, осуществляя заякоривание корпуса 11 посредством механизма заякоривания 31, относительно отвинчиваемой или завинчиваемой гайки 33, винт 30 ограничивает возможное максимальное перемещение ползуна. При вращении приводного вала 1 с помощью съемной рукоятки 23 вращается составной внутренний кулачок 3 с беговой дорожкой 4, по которой перемещаются тела качения 9. При этом тела качения 9 перемещаются также по периодической торцовой поверхности 8 наружного кулачка 7 и одновременно вдоль пазов 6 вала 5, вынуждая его вращаться с замедлением. Таким образом, с помощью планетарной шариковой передачи 10 на валу 5 и на шестиграннике 32 увеличивается крутящий момент и происходит отвинчивание или завинчивание гайки 33. В случае перегрузки срабатывает предохранительное устройство предельного момента 34. При этом шарики 12 перемещаются в радиальном направлении и наружный кулачок 7 проворачивается в корпусе; увеличения крутящего момента не происходит. Перемещением гайки 16 с выполненным на ее торце скосом 17 осуществляется регулирование предельного крутящего момента затяжки путем регулировки различных сил нажатия пластин 14 и 15 на пружины 13 и, соответственно, на шарики 12.

Общий вид разработанного ключа изображен на рисунке 7.17.

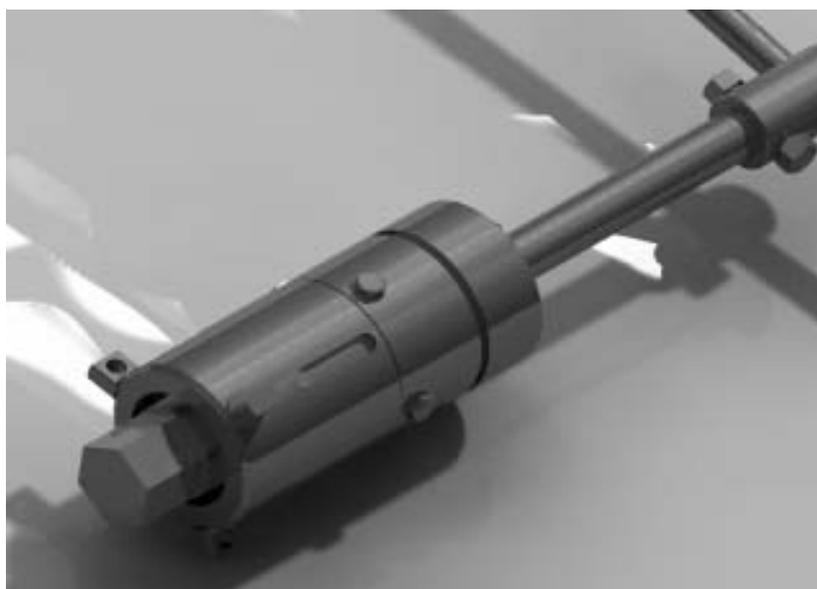


Рисунок 7.17 – Общий вид ключа для завинчивания и развинчивания резьбовых соединений головок цилиндров дизельного двигателя тепловоза ЧМЭ-3

Расчет основных узлов ключа автоматизирован [230].

Некоторые конструкции редукторов и методики их расчетов внедрены в учебный процесс ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет».

#### **7.4 Конструкции автотракторных дифференциалов с телами качения**

Широкие кинематические возможности позволяют создавать на основе ППТК поршневые насосы, дифференциалы автомобилей, коробки скоростей, механизмы свободного хода и другие механизмы [231, 232].

Автотракторный симметричный дифференциал, схема которого приведена на рисунке 7.18, состоит из двух обойм: левой 1 и правой 2, соединенных с осями левого и правого колес соответственно с помощью шлицев.

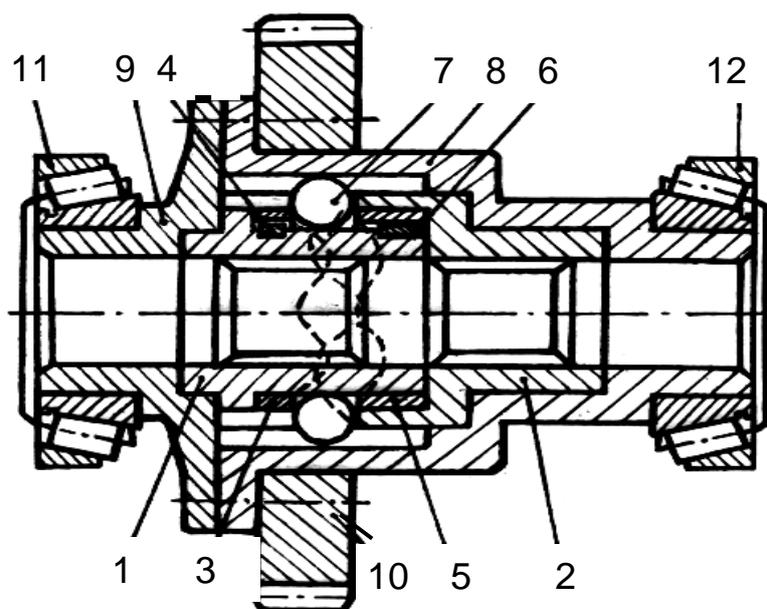


Рисунок 7.18 – Конструкция симметричного автотракторного дифференциала повышенного трения на базе ППТК

С левой обоймой 1 связаны многопериодный внутренний кулачок 3 с помощью шпонки 4 и симметричный внутренний кулачок 5 посредством шпонки 6. На торце правой обоймы 2 исполнен наружный кулачок с тем же числом периодов, что и внутренний кулачок. Тела качения 7 перемещаются по двум симметрично выполненным пазам на

внутренней цилиндрической поверхности сепаратора 8. Сепаратор 8 соединяется с втулкой 9 и зубчатым колесом главной передачи 10 болтовыми соединениями и устанавливается на раму с помощью подшипников 11 и 12.

Преимуществом данной конструкции дифференциала является простота изготовления деталей, легкость сборки и ремонта и низкие массогабаритные показатели. Как недостаток, следует отметить возможность попадания всех тел качения на вершины кривых зацепления, где нагрузка не передается.

Следующая конструкция симметричного автотракторного дифференциала приведена на рисунке 7.19.

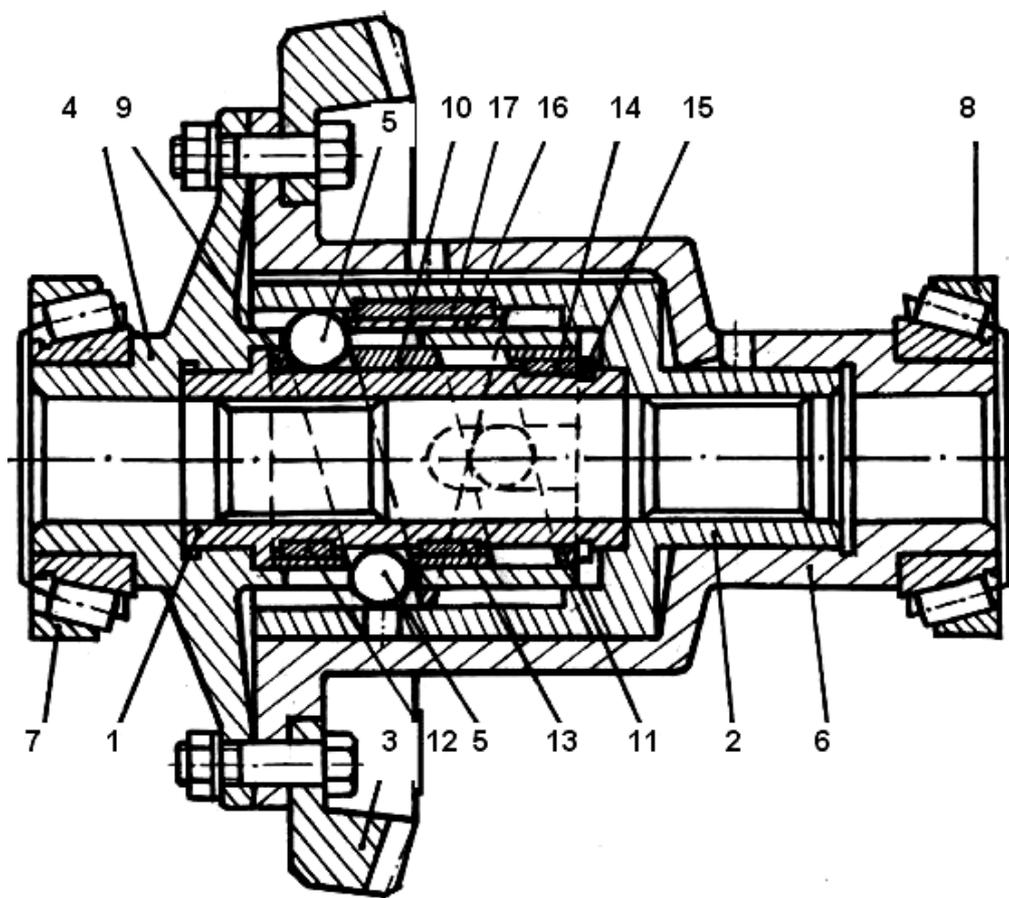


Рисунок 7.19 – Конструкция многорядного симметричного автотракторного дифференциала повышенного трения на базе ПШТК

Дифференциал состоит из следующих основных деталей: обоймы 1, связанной шлицевым соединением с левой полуосью, обоймы 2, связанной с правой полуосью. Момент от зубчатого колеса главной

передачи 3 подводится к разъемному сепаратору 4. Рабочая часть сепаратора имеет трубчатую форму с продольными пазами, относительно которых перемещаются тела качения 5. Конструкция, состоящая из зубчатого колеса 3, закрепленного на сепараторе 4 и его корпусе 6 с помощью болтовых соединений, имеет возможность вращения как одно целое и устанавливается на раму автомобиля (трактора) в подшипниках 7 и 8.

Двухрядную ППТК образует набор внутренних кулачков 9, 10 и 11, установленных на обойме 1 с помощью шпонок 12, 13 и 14 соответственно. Кулачки 9, 10, 11 зафиксированы от осевого перемещения относительно обоймы 1 с помощью бурта и стопорного кольца 15. На правой полуоси 2 с помощью шпонки 17 установлен наружный кулачок 16, который взаимодействует левым и правым торцами с двумя рядами шарикового зацепления. Ряды ППТК имеют угловое смещение в  $90^0$  относительно друг друга. При этом при попадании тел качения одного ряда на вершины эллипсов, где нагрузка не передается (на рисунке 7.18 это положение шариков показано в левом ряду зацепления), в другом ряду тела качения занимают положение, где нагрузочная способность максимальна (правый ряд на рисунке 7.19). Кроме этого, угловое смещение рядов позволяет увеличить прочность сепаратора, т. к. прорези расположены симметрично и имеют небольшую протяженность. При отсутствии углового смещения прорези были бы по всей длине рабочей части сепаратора, что привело бы к возрастанию изгибных нагрузок у основания его трубчатой рабочей части (слева).

Возможно увеличение числа рядов до трех с их угловым смещением  $\pi/3 = 60^0$  и т. д. При увеличении числа рядов повышается плавность работы зацепления, снижаются удельные нагрузки, приходящиеся на одно тело качения и другие детали ППТК (увеличивается коэффициент перекрытия передачи), но увеличиваются осевые размеры передачи (дифференциала).

В правой обойме 2 и корпусе 6 предусмотрены отверстия и выточки для обеспечения смазывания зацепления. Преимущества данного дифференциала по сравнению с кулачковым дифференциалом:

- снижение радиальных габаритов дифференциала;
- увеличение технологичности изготовления деталей дифференциала;
- возможность компенсации погрешностей изготовления и эксплуатационного износа деталей ППТК путем установки регулировочных прокладок и благодаря возможности небольших осевых перемещений (самоустановки) кулачков.

Возможности ППТК не исчерпываются рассмотренными выше конструкциями. Их преимущества позволяют надеяться на дальнейшее развитие теории в этой области и продвижение в различных областях промышленности.

## **Заключение**

Потребность машиностроительных (и не только) предприятий в редукторах очевидна. Использование ППТК для создания специальных редукторов, отвечающих определенным требованиям, позволит осуществлять их разработку и изготовление без привлечения значительных финансовых и материальных ресурсов. Немаловажно и то, что исследуемые передачи и редукторы являются импортозамещающей продукцией, т. к. в Республике Беларусь нет крупных специализированных редукторостроительных предприятий.

В связи с мировым энергетическим кризисом следует уделять особое внимание добывающей промышленности. Существует необходимость создания нового оборудования для выполнения операций по добыче нефти и газа, по ремонту и обслуживанию скважин при геолого-разведочном бурении на территории нашей страны. Данная продукция также может выступать как экспортный потенциал Республики Беларусь. Требованиям, предъявляемым к такому оборудованию, удовлетворяют ППТК, встраиваемые в механизмы буровой техники.

ППТК могут разрабатываться для создания средств малой механизации: встраиваться в механизмы подъемно-тяговых устройств, ключей и гайковертов для отворота резьб, в механизмы устройств для передачи крутящего момента в труднодоступные места и т. п. При использовании ППТК для изготовления редуцирующих узлов таких устройств достигается увеличение нагрузочной способности при снижении металлоемкости и повышении удобства эксплуатации. Практика также показывает, что в настоящее время актуальна задача разработки и создания универсальных компактных механизмов (с наружным диаметром менее 100 мм) как с электроприводом, так и с ручным приводом, работающих по различным кинематическим схемам и в режиме редуктора, и в режиме мультипликатора или дифференциала.

Целесообразно изучение вопросов встраивания ППТК в дифференциальные механизмы, коробки скоростей и механизмы свободного хода, а также в механизмы преобразования вращательного движения в

возвратно-поступательное на базе ППТК (механизмы поршневых насосов, деревообрабатывающих и других станков).

В данной монографии отражены основы комплексной теории, позволяющие определять потери мощности в передачах и механизмах, использующих тела качения для передачи нагрузки; включающие определение коэффициентов трения скольжения и коэффициенты сопротивления качению в зависимости от заданных условий нагружения и геометрии контактирующих поверхностей, определение кинематических характеристик, определение действующих сил на основе динамического и кинетостатического анализа. Данная теория основана на установлении качественного и количественного состава общих потерь мощности и определении факторов, влияющих на этот состав.

Осуществлено развитие теории передач с промежуточными телами качения с целью повышения их КПД и получены новые результаты, включающие:

- уравнения кривых зацепления на конических и сферических поверхностях;
- учет геометрии тел качения, их размеров при определении потерь мощности в передачах, использование структурных резервов повышения КПД, динамический анализ на основе структурно-матричного метода, а также вопросы технологической подготовки производства с учетом нынешнего этапа развития станочного оборудования;
- разработку алгоритмов определения КПД передач на основе теории винтовой пары и сухарных дифференциалов;
- математическое обоснование возможности создания передач на основе кривых зацепления произвольного типа, отвечающих определенным условиям;
- разработку алгоритмов синтеза кривых, алгоритмов определения потерь мощности для кривых различных типов;
- разработку конструкций передач и механизмов, новизна которых подтверждена патентами Республики Беларусь.

На основе созданных алгоритмов и методик разработаны конструкции редукторов и мотор-редукторов, средств малой механизации (лебедок, баллонных ключей), многие из которых изготовлены. Осуществлено внедрение в производство опытных экземпляров баллонных ключей с их реализацией на хоздоговорной основе. Разработаны также конструкции автотракторных дифференциалов повышенного трения на базе ППТК, отличающиеся технологичностью изготовления и малогабаритностью. Созданные алгоритмы расчета и

проектирования ППТК используются в учебном процессе при подготовке специалистов технического профиля.

На основе проведенных кинематического и силового анализа дифференциальных механизмов установлено, что на базе ППТК возможно создание автотракторных межколесных дифференциалов с малыми радиальными габаритами.

Результаты работы могут быть использованы в машиностроении, на транспортных участках предприятий, в авторемонтных мастерских.

Разработанные методики определения потерь мощности в подшипниках качения внедрены и могут использоваться на предприятиях по их изготовлению, а также на любых предприятиях машиностроительного профиля, где необходимо контролировать ответственные подшипниковые узлы.

Проект «Малогобаритные механические приводные системы на базе передач с промежуточными телами качения» получил признание на XVI Международной выставке-конгрессе «Высокие технологии. Инновации. Инвестиции» (HI-TECH), проходившей в г. Санкт-Петербурге с 10 по 12 марта 2010 г., и был награжден дипломом 1 степени с вручением золотой медали на Петербургской технической ярмарке 2010 г. в рамках конкурса «Лучший инновационный проект и лучшая научно-техническая разработка года». Проект также был награжден медалью лауреата конкурса «Высокие технологии – основа модернизации экономики и развития промышленности» 11-го Международного форума «Высокие технологии XXI века», проводившегося в г. Москве в ЦВК «ЭКСПОЦЕНТР» с 19 по 22 апреля 2010 г.

## Список литературы

1 **Coulomb, C. A.** Memoires de Mathematique et de Physique de l'Academia Royale de sciences / C. A. Coulomb. – Paris, 1785. – P. 161–331.

2 **Coulomb, C. A.** Theorie des machines simples (en ay ont egard an froitement de leurs parties et a la roideur des cordages) / C. A. Coulomb. – Paris, 1821. – 115 p.

3 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. Ч. 2 : Динамика : учебник для втузов / А. А. Яблонский. – 5-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1977. – 430 с. : ил.

4 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики : учебник / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – Ч. 1–2, т. 1. – 352 с. : ил.

5 **Голубева, О. В.** Теоретическая механика : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. вузов / О. В. Голубева. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 703 с. : ил.

6 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики : учебник для машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с. : ил.

7 **Пинегин, С. В.** Трение качения в машинах и приборах / С. В. Пинегин. – М. : Машиностроение, 1976. – 264 с. : ил.

8 **Пинегин, С. В.** Контактная прочность и сопротивление качению / С. В. Пинегин. – М. : Машиностроение, 1968. – 244 с. : ил.

9 **Grandvoinet, J.** Essais dinamometriques des divers instruments du sol / J. Grandvoinet. – Paris, 1876. – 81 p.

10 **Reynolds, O.** On Rolling friction / O. Reynolds // Philos. Trans. Roy. Soc. – 1876. – Vol. 166. – P. 155–175.

11 **Heathcote, H. L.** The Boll Bearing in making, under test and service / H. L. Heathcote // Proc. Inst. Auto-Engineers. – 1921. – Vol. 15. – P. 569–622.

12 **Tomlinson, J. A.** A Molecular theory of friction / J. A. Tomlinson // Philos. Mag. Ser. 7. – 1929. – № 198. – P. 905–939.

13 **Palmgren, A.** Ball and Roller Bearing Engineering / A. Palmgren. – Philadelphia, SKF Industries Inc., 1945. – 431 p.

14 **Tabor, D.** The Mechanism of «Free» Rolling Friction / D. Tabor // J. Amer. Soc. Lubricat. Engrs. – 1956. – № 6. – P. 379–386.

15 **Пинегин, С. В.** Прецизионные опоры качения и опоры с газовой смазкой : справочник / С. В. Пинегин, А. В. Орлов, Ю. Б. Табачников. – М. : Машиностроение, 1984. – 216 с. : ил.

16 **Конвисаров, Д. В.** Исследование трения второго рода методом маятниковых колебаний / Д. В. Конвисаров // Тр. Сибирского физ.-техн. ин-та. – 1949. – Вып. 28. – С. 21.

17 Влияние внешних факторов на контрактную прочность при качении / С. В. Пинегин [и др.]. – М. : Наука, 1972. – 102 с. : ил.

18 **Буланов, Э. А.** Трение качения шара по плоскости / Э. А. Буланов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 5. – С. 42–46.

19 **Решиков, В. Ф.** Трение и износ тяжело нагруженных передач / В. Ф. Решиков. – М. : Машиностроение, 1975. – 232 с. : ил.

20 **Богданович, П. Н.** Трение и износ в машинах / П. Н. Богданович, В. Я. Прушак. – Минск : Выш. шк., 1999. – 374 с.

21 **Слезкин, Н. А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М. : Гостехиздат, 1955. – 519 с. : ил.

22 **Капица, П. Л.** Гидродинамическая теория смазки при качении / П. Л. Капица // Техническая физика. – Т. 25, вып. 4. – С. 876–889.

23 **Котова, Л. И.** Теория качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем пластичной смазки / Л. И. Котова, Б. В. Дерягин // Техническая физика. – Т. 27, вып. 6. – С. 1266–1271.

24 Планетарные передачи : справочник / Под ред. В. Н. Кудрявцева, Ю. Н. Кирдяшева. – Л. : Машиностроение, 1977. – 535 с. : ил.

25 **Скойбеда, А. Т.** Коническо-цилиндрические прецессионные редукторы / А. Т. Скойбеда, П. Н. Громыко. – Минск : БГПА, 2001. – 187 с. : ил.

26 **Плеханов, Ф. И.** Особенности проектирования планетарных передач с квазиэвольвентным внутренним зацеплением сателлита / В. Ф. Плеханов // Вестн. машиностроения. – 2002. – № 8. – С. 3–5.

27 **Сычев, А. А.** Волновая передача с применением стандартной многорядной втулочно-роликовой цепи / А. А. Сычев // Вестн. машиностроения. – 1971. – № 9. – С. 41–43.

28 Волновая передача : а. с. 1539431 А1 СССР, F 16 Н 1/00 / В. В. Петросов, С. В. Петросова, Г. В. Петросов ; Тольяттинский политехн. ин-т и Волжский автомобильный завод им. 50-летия СССР. – № 4335030/25-28 ; заявл. 25.11.87 ; опубли. 30.01.90 // Открытия. Изобрет. – 1990. – Бюл. № 4. – 4 с.

29 Speed reducing coupling : pat. 3726158 USA, F 16 h 1/28 / Н. С. Brown. – Apl. № 112749 ; fil. 04.02.71; pat. 10.04.73. – 14 p.

30 Планетарный шариковый редуктор : а. с. 516857 СССР, М. кл<sup>2</sup>. F 16 Н 13/08 / И. П. Гасюк, П. М. Шилов, Л. И. Гасюк ; Днепропетровский

горный ин-т. – № 1781746/28 ; заявл. 05.05.72 ; опубл. 05.06.76 // Открытия. Изобрет. – 1976. – Бюл. № 21. – 3 с.

31 Gear transmission : pat. 4542664 USA, Int. Cl<sup>4</sup> F16 H 1/28 / Z. Sladek, F. Musil, L. Podmela, M. Bursa. – Apl. № 480685 ; fil. 31.03.83 ; pat. 24.09.85. – 9 p.

32 **Гаврилов, Е. М.** Подшипниковые редукторы / Е. М. Гаврилов // Подшипник. – 1937. – № 11–12. – С. 9–12.

33 **Гасюк, Л. И.** Исследование и разработка шарикового редуктора скорости и его производных конструкций : дис. ... канд. техн. наук / Л. И. Гасюк. – Днепропетровск, 1974. – 163 с.

34 **Стадниченко, В. И.** Исследование и методика расчета шаровых фрикционных редукторов : дис. ... канд. техн. наук / В. И. Стадниченко. – М., 1976. – 168 с.

35 **Černý, R.** Kylicovy planetovy prevod / R. Černý // Strojirenstvi. – 1961. – № 11. – С. 38–40.

36 **Пястик, И. Б.** Шариковинтовые механизмы / И. Б. Пястик. – М.-К. : Машгиз, 1962. – 124 с. : ил.

37 **Турпаев, А. И.** Винтовые механизмы и передачи / А. И. Турпаев. – М. : Машиностроение, 1982. – 223 с. : ил.

38 Зубчато-роликовая передача : пат. 2062924 C1 RU F16 H1/24 / В. П. Клушин (автор и заявитель). – № 4934296/28 ; заявл. 25.02.91 ; опубл. 27.06.96. – 12 с.

39 Kettenradergetriebe : pat. 1116491 Bundesrepublik Deutschland, Kl. 47 h, 11, Int. Kl. F 06 h / М. Hornsteiner. – Apl. №. H 32203 XII/47h ; fil. 21.01.58 ; pat. 02.11.61. – 5 p.

40 Зубчато-роликовая передача : а. с. 1293414 А1 СССР, F 16 H 1/24 / А. К. Сидоренко (автор и заявитель). – № 3887363/25-28 ; заявл. 01.04.85 ; опубл. 28.02.87 // Открытия. Изобрет. – 1987. – Бюл. № 8. – 4 с.

41 Передача для параллельных валов : а. с. 136144 СССР, Кл. 47 i, 5, 47 h, 21 / П. А. Заран (автор и заявитель). – № 671718/25 ; заявл. 27.06.60 ; опубл. – 01.07.61 // Бюл. изобретений. – 1961. – № 4. – 3 с.

42 **Беляев, А. Е.** Механические передачи с промежуточными телами : метод. рекомендации / А. Е. Беляев, Ан И – Кан, В. В. Гурин ; под общ. ред. А. Е. Беляева. – Томск : ТПИ им. С. М. Кирова, 1984. – 163 с.

43 **Кожевников, С. Н.** Механизмы : справочник / С. Н. Кожевников, Я. И. Есипенко, Я. М. Раскин ; под ред. С. Н. Кожевникова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1976. – 784 с. : ил.

44 **Пашкевич, М. Ф.** Червячные передачи качения / М. Ф. Пашкевич, Н. И. Рогачевский, С. Н. Рогачевский. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 137 с. : ил.

45 Excentergetriebe : pat. 127529 Deutschland, Kl. 47 h / С. Hamann. – fil. 11.07.1900 ; pat. 27.01.1902. – 5 p.

46 Uber- oder untersetzungsgetriebe : pat. Deutschland 51260, Kl. 47 h, Gr. 7 / F. Deckel. – Apl. № D53238 XII/47h ; fil. 14.06.27 ; pat. 15.11.30. – 5 p.

47 Планетарный редуктор : а. с. 1024618 СССР, М. кл. F16 h 1/28 / В. Н. Стрельников ; Украинский заочный политехн. ин-т. – №3225365/25-28 ; заявл. 29.12.80 ; опубл. 23.06.83 // Открытия. Изобрет. – 1983. – Бюл. № 23. – 2 с.

48 **Муравьев, Е. В.** Планетарно-цевочные редукторы и мотор-редукторы / Е. В. Муравьев // Редукторы и приводы. – 2005. – № 4–5. – С. 14–16.

49 Планетарная цевочная передача : а. с. 1753102 А1 СССР, М. кл. F 16 H 1/32 / О. В. Берестнев, Н. Г. Янкевич, Ю. Е. Никулин, В. П. Гайковой, М. В. Рудновский ; Ин-т проблем надежности и долговечности машин АН БССР. – № 4779768/28 (004277) ; заявл. 08.01.90 ; опубл. 07.08.92 // Открытия. Изобрет. – 1992. – Бюл. № 29. – 4 с.

50 Редукторы TWIN SPIN. Серии, модели, модификации [Электронный ресурс] / Официальный сайт представителя компании «SPINEA» в Северо-Западном регионе. – 2009. – Режим доступа : [http : // www.reduktor-spinea.ru/index.php?option=com\\_content&task=view&id=8](http://www.reduktor-spinea.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=8). – Дата доступа : 20.08.2009.

51 **Становской, В. В.** Передачи со свободными телами качения, обзор патентной литературы / В. В. Становской, Т. А. Ремнева, С. М. Казакивичус // Прогрессивные зубчатые передачи : сб. науч. тр. – Новоуральск : Изд-во НГТИ, 2003. – С. 61–94.

52 Wechsel und wendegetriebe : pat. 236138 Deutschland, Kl. 47h, Gr. 14 / F. P. Soprunoff. – fil. 12.05.10 ; pat. 30.06.11. – 6 p.

53 Coaxial speed reducing gear set : pat. 2764030 USA, Cl. 74-216.3 / L. Mackta. – Apl. № 542053 ; fil. 21.10.55 ; pat. 25.09.56. – 5 p.

54 Перспективные передачи «винт–гайка». Обзорная информация / Приводная техника. – 2002. – № 6 (40). – С. 57–59.

55 **Павлов, Б. И.** Шариковинтовые механизмы в приборостроении / Б. И. Павлов. – М. : Машиностроение, 1968. – 136 с. : ил.

56 Шаровинтовая передача Воробьева : а. с. 295927 СССР, МКИ<sup>3</sup> F 16 h 25/22 / В. В. Воробьев (автор и заявитель). – № 877031/25-28 ; заявл. 20.01.64 ; опубл. 12.02.71 // Бюл. изобретений. – 1971. – Бюл. № 8. – 3 с.

57 **Стрельников, В. Н.** Исследование шариковых передач : дис. ... канд. техн. наук / В. Н. Стрельников. – Харьков, 1975. – 176 с.

58 Шаровинтовая передача : а. с. 494550 СССР, F 16 Н 25/22 / В. Н. Стрельников ; Украинский заочный политехн. ин-т. – № 1862881/25-28 ; заявл. 28.12.72 ; опубл. 05.12.75 // Бюл. изобретений. – Бюл. № 45. – 2 с.

59 Improvements in variable speed mechanism : pat. 257052 UK / S. E. Scott. – Apl. № 16613/25 ; fil. 27.06.25 ; pat. 26.08.26. – 8 p.

60 Сфероидный зубчато-винтовой механизм : а. с. 109419 СССР, 47 h 6, 47 h 7 / Д. С. Рабинович (автор и заявитель). – № 14313/229/6168/455643 ; заявл. 24.04.51 ; опубл. 05.01.59 // Бюл. изобретений. – 1959. – № 1. – 6 с.

61 Пространственный кулачковый механизм : а. с. 1252578 А 1 СССР, F 16 Н 25/22 / И. П. Дороднов, В. П. Дороднов ; Северо-Кавказский гос. науч.-исслед. и проектный ин-т газовой промышленности. – № 3835104/25-28 ; заявл. 13.12.84 ; опубл. 23.08.86 // Открытия. Изобрет. – 1986. – Бюл. № 31. – 4 с.

62 Пространственный кулачковый механизм : а. с. 1486682 А 2 СССР, F 16 Н 25/06, 25/22 / М. Ф. Пашкевич ; Могилев. машиностроит. ин-т. – № 4229212/25-28 ; заявл. 13.04.87 ; опубл. 15.06.89 // Открытия. Изобрет. – 1989. – Бюл. № 22. – 3 с.

63 Планетарен сачмен редуктор : а. с. 13751 НРБ Кл. 47 h, 7, МПК F 06 Н / Васил Кирилов Киров (НРБ). – № 10886 ; заявл. 25.10.68 ; опубл. 20.12.69. – 6 с. : ил.

64 Ausgleichgetriebe fur Kraftfahrzeuge : pat. 801421 Bundesrepublik Deutschland, Kl. 63c, Gr. 13 05 / W. Altmann. – fil. 25.01.49 ; pat. 08.01.51. – 3 p.

65 **Игнатищев, Р. М.** Синусошариковый редуктор, его преимущества и целесообразность применения в буровой технике / Р. М. Игнатищев // Проблемы создания и внедрения самоходных буровых установок : тез. докл. I Всесоюз. науч.-техн. конф. – Фрунзе, 1974. – С. 123–125.

66 Планетарный редуктор для забойных двигателей : а. с. 605926 СССР, М. кл<sup>2</sup>. Е 21В 3/10, Е 21 В 3/12 / Р. М. Игнатищев, Б. З. Школьников, И. С. Сазонов, В. С. Веселов (авторы и заявители). – № 2111566/22-03 ; заявл. 14.01.75 ; опубл. 05.05.78 // Открытия. Изобрет. – 1978. – Бюл. № 17. – 2 с.

67 Синусошариковый редуктор для забойных двигателей : а. с. 1728461 А1 СССР, кл. F16 Н 13/08 / Ю. В. Вадецкий, Р. М. Игнатищев, В. П. Коротков, В. Ф. Давыдов, И. Я. Вальдман, М. И. Рущкий ; Могилев. машиностроит. ин-т. – № 3712004/03 ; заявл. 20.03.84 ; опубл. 23.04.92 // Открытия. Изобрет. – 1986. – Бюл. № 15. – 3 с.

68 **Игнатищев, Р. М.** Синусошариковые передачи с примером использования их варианта в забойных машинах для бурения скважин : дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.18 / Р. М. Игнатищев. – Л., 1990. – 253 с. : ил.

69 **Игнатищев, Р. М.** Синусошариковые редукторы / Р. М. Игнатищев. – Минск : Выш. шк., 1983. – 107 с. : ил.

70 **Макаревич, Д. М.** Разработка основ расчета и конструирования промышленных конструкций синусошариковых редукторов к забойным двигателям : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.07 / Д. М. Макаревич. – М., 1983. – 190 с. : ил.

71 Speed change device : pat. 4069718 USA, Int. Cl. 2 F 16 H 13/04 / E. F'Geppert. – Apl. № 722598 ; fill. 13.09.76 ; pat. 24.01.78. – 4 p.

72 Transmission : pat. 4960003 USA, Int. Cl.<sup>5</sup> F 16 H 25/06 / J. A. Hartley. – Apl. № 722598 ; fill. 04.08.89 ; pat. 02.10.90. – 6 p.

73 Modified-cam speed convertor : pat. 6039672 USA, Int. Cl.<sup>7</sup> F 16 H 1/48 / F. Bursal, F. A. Folino ; assignee Synkinetics Inc. – Apl. № 09/280364 ; fil. 29.03.99 ; pat. 21.03.00. – 19 p.

74 **Lehmann, M.** Sinoiden Getriebe / M. Lehmann // Konstruktion. – 1981. – В. 33, № 3. – S. 109–112.

75 **Макаревич, Д. М.** Оптимизация синусошариковых передач / Д. М. Макаревич, М. Е. Лустенков // Изв. Белорус. инж. академии. – 2000. – № 1 (9). – С. 36–42.

76 **Лустенков, М. Е.** Перспективы применения синусоцилиндрических шариковых редукторов (СШР) в буровой технике / М. Е. Лустенков // Современные технологии, материалы, машины и оборудование : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : МГТУ, 2002. – С. 78–79.

77 **Лустенков, М. Е.** Разработка синусоцилиндрических шариковых редукторов с повышенной нагрузочной способностью, работающих в режиме однократнопиковых нагрузок : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.02 / М. Е. Лустенков. – Минск, 2001. – 165 с. : ил.

78 Бесступенчатая автоматическая передача : пат. 2 161 279 РФ, F 16 H 15/40, 25/06 / Ю. Ф. Ващенко (заявитель). – № 99105067/28 ; 10.03.90 ; опубл. 27.12.00 // Изобрет. Полезные модели. – 2010. – 5 с.

79 Пространственный кулачковый механизм : а. с. 1486682 СССР, F 16 H 25/06, 25/22 / М. Ф. Пашкевич ; Могилев. машиностроит. ин-т. – № 4229212/25-28 ; заявл. 13.04.87 ; опубл. 15.06.89. – Бюл. № 22. – 3 с.

80 Шариковый цилиндрический вариатор : пат. 2 162 554 РФ, F 16 H 25/06 / С. А. Пашуков (заявитель). – № 99111094/28 ; заявл. 21.05.99 ; опубл. 27.01.2001 // Изобрет. Полезные модели. – 2001. – 5 с.

81 Волновая передача : а. с. 559052 СССР, М. Кл.<sup>2</sup> F 16 Н 1/00 / Г. С. Генфан, Е. Л. Селедков, В. И. Черкасов ; Всесоюзный науч.-исслед. ин-т по монтажным и строительным работам. – № 2165856/28 ; заявл. 15.08.75 ; опубл. 25.05.77 // Открытия. Изобрет. – 1977. – Бюл. № 19. – 3 с.

82 Getriebe fuer grosse uebersetzungsverhaeltnisse : pat. 215133 DDR, Int Cl<sup>3</sup> F 16 Н 1/24 / Н. Weissbeck. – Apl. № WP F 16 Н/2507324 ; fil. 09.05.83 ; pat. 31.10.84. – 15 p.

83 Планетарная передача : а. с. 1587271 А 1 СССР, М.кл. F 16 Н 1/43, 25/06 / М. Ф. Пашкевич, С. Ф. Янукович, А. И. Дерученко, Е. Г. Денисов, О. П. Самуйлов ; Могилев. машиностроит. ин-т и Специальное конструкторское бюро технологического оборудования. – № 4601193/25-28 ; заявл. 01.11.88 ; опубл. 23.08.90 // Открытия. Изобрет. – 1988. – Бюл. № 31. – 4 с.

84 Планетарная сферическая передача : а. с. 1025941 СССР, F 16 Н 1/32 / А. А. Рябцев (автор и заявитель). – № 3220985/25-28 ; заявл. 22.12.80 ; опубл. 30.06.83 // Открытия. Изобрет. – 1983. – Бюл. № 22. – 9 с.

85 Планетарная сферическая передача : а. с. 1381287 А2 СССР, F 16 Н 1/32 / А. А. Рябцев (автор и заявитель). – № 4043635/25-28 ; заявл. 31.03.86 ; опубл. 15.03.88 // Открытия. Изобрет. – 1988. – Бюл. № 10. – 4 с.

86 Передача с телами качения : а. с. 1221418 СССР, МКИЗ F 16 Н 25/06 / Г. И. Измальков (автор и заявитель). – № 3827371/25-28 ; заявл. 19.12.84 ; опубл. 30.03.86 // Открытия. Изобрет. – Бюл. № 12. – 3 с. : ил.

87 Exzentergetriebe fuer uebersetzung von drehbewegungen : pat. 354350 Deutschland, Kl. 47h, Gr. 7 (J 20365 XII/47h) / A. Jansen. – fill. 08.06.22 ; pat. 21.05.20. – 4 p.

88 Gearless planetary transmission : pat. 1449352 USA / F. W. Seeck. – Apl. № 501879 ; fil. 20.09.21 ; pat. 20.03.23. – 4 p.

89 Epicyclic ball transmission : pat. 1735616 USA / G. S. Morison. – Apl. № 124352 ; fil. 23.07.26 ; pat. 12.11.29. – 7 p.

90 Ball transmission : pat. 1738662 USA / G. S. Morison. – Apl. № 162310 ; fil. 20.01.27 ; pat. 10.12.29. – 7 p.

91 Differential gear for self-propelled vehicles : pat. 1689285 USA / H. Knab. – Ser. № 125759 ; fil. 29.07.26 (fil. in Germany 06.10.25) ; pat. 30.10.28. – 3 p.

92 Articulated differential gear, particularly for motor vehicles : pat. 1946358 USA, Cl. 74-7 / F. Porsche, K. Rabe. – Apl. № 664573 ; fil. 05.04.33 (fil. in Germany 08.04.32) ; pat. 06.02.34. – 3 p.

93 **Калабин, С. Ф.** Кинематический расчет плунжерной передачи / С. Ф. Калабин. – Ижевск : Удмуртия, 1965. – 48 с.

94 **Калужников, А. М.** Кинематический и силовой расчет сухарного дифференциала / А. М. Калужников // Вестн. машиностроения. – 1962. – № 10. – С. 12–17.

95 Mecanisme de changement de vitesse : pat. 748250 Belgium, F 16 H / P. G. Leeson. – Apl. № 748250 ; fil. 31.03.70 ; pat. 31.08.70. – 20 p.

96 **Брюховецкий, В. П.** Исследование планетарной эксцентриковой передачи с шариками в зацеплении : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.02 / В. П. Брюховецкий. – Томск, 1978. – 185 с. : ил.

97 Синусошариковая передача : а. с. 1260604 СССР, МКИ<sup>3</sup> F 16 H 11/32 / Р. М. Игнатищев, П. Н. Громыко, В. И. Николаенко, А. В. Корольков, В. И. Довженко, А. И. Пономарев (авторы и заявители). – № 3853716/25-28 ; заявл. 08.02.85 ; опубл. 30.09.86 // Открытия. Изобрет. – Бюл. № 36. – 3 с.

98 **Панкратов, Э. Н.** Волновые редукторы с промежуточными звеньями / Э. Н. Панкратов, В. В. Шумский, С. В. Лушников // Бурение и нефть. – 2003. – № 2. – С. 28–30.

99 **Ершов, Ю. В.** Анализ и синтез планетарных передач К–Н–V с промежуточными телами качения : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.18 / Ю. В. Ершов. – М. : МГТУ им. Баумана, 2007. – 242 с. : ил.

100 **Каракулов, А. С.** Микроконтроллерное управление асинхронным электроприводом запорной аппаратуры : дис. ... канд. техн. наук : 05.09.03 / А. С. Каракулов. – Томск : ТПИ, 2005. – 130 с. : ил.

101 **Степанов, В. С.** Методика проектирования привода на основе волновой передачи с телами качения : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.02.02 / В. С. Степанов. – М. : ГТУ МАИ, 2009. – 20 с. : ил.

102 Волновая передача [Электронный ресурс] / Официальный сайт компании Сибирской машиностроительной компании «SIMACO». – 2009. – Режим доступа : [http : // www.smc.tomsk.ru/ru/2](http://www.smc.tomsk.ru/ru/2). – Дата доступа : 20.08.2009.

103 Волновые редукторы с промежуточными телами качения [Электронный ресурс] / Официальный сайт ООО НПО «Сибирский машиностроитель». – 2009. – Режим доступа : [http : // www.nposibmach. ru / reducers.html](http://www.nposibmach.ru/reducers.html). – Дата доступа : 20.08.2009.

104 Animations / Simulations. SYNKdrive Animation [Электронный ресурс] / Официальный сайт Synkinetics Inc. – 2009. – Режим доступа : [http : // www.synk.com / pages / index.php?nv=81](http://www.synk.com/pages/index.php?nv=81). – Дата доступа : 20.08.2009.

105 Шаровая планетарная передача : а. с. 1019148 А СССР, М. кл. F 16 H 13/08 / Р. М. Игнатищев ; Могилев. машиностроит. ин-т. –

№ 3399190/25-28 ; заявл. 18.02.82 ; опубл. 30.04.88 // Открытия. Изобрет. – 1988. – Бюл. № 16. – 3 с.

106 **Пашкевич, М. Ф.** Теоретические и экспериментальные основы проектирования планетарных шариковых и роликовых передач : дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.02 / М. Ф. Пашкевич. – Минск, 1993. – 563 с. : ил.

107 **Пашкевич, М. Ф.** Планетарные шариковые и роликовые редукторы и их испытания / М. Ф. Пашкевич, В. В. Геращенко. – Минск : БелНИИИТИ, 1992. – 248 с. : ил.

108 **Bara, M.** The Study Of The Dynamic Balancing Of A Frontal-Sinusoidal Transmission With Balls. Complex mechanisms (linkages with cams, gears) and their applications / M. Bara // The 8-th IFToMM international symposium on theory of machines and mechanisms 28.08.01–1.09.01. Proceedings. Bucuresti, Bren, 2001. – Vol. 111. – P. 55–60.

109 Speed converter : pat. 5312306 USA, F 16 H 13/08 Cl. 475–196, 476/36 / F. A. Folino ; Synkinetics Inc. – Apl. № 670263 ; pat. 17.05.94 ; fil. 04.03.91. – 40 p.

110 Differential gear : pat. 5577423 USA, Int. Cl<sup>6</sup> F 16 H 13/04 13/08 / Kenji Mimura. – Apl. № 396210 ; fil. 28.02.95 ; pat. 26.11.96. – 38 p.

111 Motion transmitting mechanism : pat. 1748907 USA / B. Vallance. – Apl. № 349109 ; fil. 22.03.29 (in Great Britain 25.03.28) ; pat. 25.02.30. – 4 p.

112 Gear mechanism : pat. 1611981 USA, Int. Cl<sup>4</sup> F 16 H 1/28 / W. E. Amberg. – Apl. № 545921 ; fil. 23.03.22 ; pat. 28.12.26. – 7 p.

113 Планетарная прецессионная передача : а. с. 1427115 СССР, М. кл. F 16 h 1/32 / И. А. Бостан, М. Т. Козлов, А. Г. Опря ; Кишневский политехн. ин-т им. С. Лазо. – № 4095800/25-28 ; заявл. 29.07.86 ; опубл. 30.09.88 // Открытия. Изобрет. – 1988. – Бюл. № 36. – 3 с.

114 Планетарный механизм : а. с. 1044868 А СССР, М. кл. F 16 H 1/32, F 16H 25/06, F 16H 25/22 / И. А. Бостан, В. Е. Дулгеру ; Кишневский политехн. ин-т им. С. Лазо. – № 3442411/25-28, 3456882/25-28 ; заявл. 21.05.82 и доп. 25.06.82 ; опубл. 30.09.83 // Открытия. Изобрет. – 1983. – Бюл. № 36. – 5 с.

115 **Становской, В. В.** Самоторможение эксцентриковой передачи с промежуточными телами качения / В. В. Становской // Вестн. Машиностроения. – 2009. – № 5. – С. 3–7.

116 Шаровая лобовая передача : а. с. 396492 СССР, М. кл. F 16 h 13/04 / В. Н. Стрельников ; Украинский заочный политехн. ин-т. – № 1695409/25-8 ; заявл. 20.09.71 ; опубл. 29.08.73 // Открытия. Изобрет. – 1973. – Бюл. № 36. – 2 с.

117 Power transmission mechanism : pat. 2512272 USA, Cl.74-63 / A. E. Gull. – Apl. № 76601 ; fil. 16.02.49 (in Great Britain 20.07.48) ; pat. 20.06.50. – 11 p.

118 **Довженко, В. И.** Обоснование конструктивных схем и геометрических параметров плоской синусоидальной передачи с повышенным КПД передач : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.02 / В. И. Довженко. – Минск, 2000. – 155 с. : ил.

119 Oscillatory roller transmission : pat. 5989144 USA, Int. Cl<sup>6</sup> F 16 H 1/32 / Zhi Chen, Bo Chen, Shixian Chen. – Apl. № 08/828889 ; fil. 31.03.97 ; pat. 23.11.99. – 14 p.

120 Nested speed converter bearing apparatus : pat. 6314826 B1 USA, Int. Cl<sup>7</sup> F 16 H 1/34 / M. P. Cunningham, F. A. Folino, F. H. Bursal ; Synkinetics Inc. – Apl. № 09/430115 ; fil. 29.10.99 ; pat. 13.11.01. – 23 p.

121 Планетарная передача : а. с. 1216498 А СССР, кл. F 16 H 13/08 / Р. М. Игнатищев (автор и заявитель). – № 3795289-25/28 ; заявл. 02.10.84 ; опубл. 07.03.86 // Открытия. Изобрет. – 1986. – Бюл. № 9. – 3 с.

122 Планетарная передача : а. с. 1276869 СССР, кл. F 16 H 13/08, H 25/22 / Р. М. Игнатищев (автор и заявитель). – № 384631-25/28 ; 3861517/25-28 ; заявл. 29.01.85 ; опубл. 15.12.86 // Открытия. Изобрет. – 1986. – Бюл. № 6. – 2 с.

123 Дифференциальный преобразователь скорости «редуктор – подшипник» : пат. 2179272 С 1 РФ, F 16 H 25/06 / В. В. Становской, А. Ф. Шибико, Т. А. Ремнева, А. В. Становской, В. В. Кривошеев ; заявитель В. В. Становской. – № 2001108604/28 ; заявл. 30.03.01 ; опубл. 10.02.02 // Изобрет. Полезные модели. – 2002. – 24 с.

124 Планетарный шариковый передающий узел : пат. 2246649 С 1 РФ, F 16 H 25/06, 16/08 / В. В. Становской, С. М. Казакиявичус, А. Г. Петракович. – № 2003119476/11 ; заявл. 26.06.03 ; опубл. 20.02.05 // Изобрет. Полезные модели. – 2005. – 8 с.

125 Передающий узел планетарной шариковой передачи : пат. 2253776 С 2 РФ, F 16 H 25/06 / В. В. Становской, С. М. Казакиявичус, А. Г. Петракович. – № 2003116366/11 ; заявл. 02.06.03 ; опубл. 20.12.04 // Изобрет. Полезные модели. – 2005. – 7 с.

126 **Игнатищев, Р. М.** Шестерням весома́я поддержка / Р. М. Игнатищев. – Могилев : УПКП МОТ им. С. Соболя, 2007. – 24 с. : ил.

127 **Хохряков, Б. Г.** Электроприводы нового поколения для запорно-регулируемой арматуры / Б. Г. Хохряков // Арматуростроение. – 2004. – № 4 (30). – С. 32–33.

128 **Биргер, И. А.** Расчет на прочность деталей машин : справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1993. – 640 с. : ил.

129 **Крагельский, И. В.** Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с. : ил.

130 **Dupuit, A. J.** Essais et experiences sur le tirage de voitures et sur le frottement de second espece / A. J. Dupuit. – Paris, 1837. – 63 p.

131 **Crandall, C. L.** Friction Rollers / C. L. Crandall, A. Marston // Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. – 1984. – Vol. 32. – P. 99–129, 270–277.

132 **Drutowski, R. C.** Energy Losses Of Balls Rolling On Plates. Proceedings Of the Symposium On Friction And Wear / R. C. Drutowski. – Detroit, 1957. – Ed. 1959.

133 **Лужников, Ю. М.** Исследование трения на железнодорожных рельсах в интервале положительных температур / Ю. М. Лужников, Р. Г. Черепашенец // Тр. Московского ин-та инж. трансп. – М. : МИИТ, 1973. – Вып. 445. – С. 13–24.

134 **Лустенков, М. Е.** Определение потерь мощности в нагруженном контакте «тело качения–поверхность» / М. Е. Лустенков, А. П. Прудников // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2009. – № 2. – С. 107–114.

135 Method for determining the friction torque of a test bearing : pat. 4763508 USA, Int. Cl.<sup>4</sup> G 01 N 19/02 / Volker Buck ; Deutsche Forshungs-Und Versuchtanstalt fur Luft- und Raumfahrt e. V. – Apl. № 915530 ; fil. 06.10.86 ; pat. 16.08.88. – 6 p.

136 **Кошель, В. М.** Подшипники качения / В. М. Кошель. – Минск : Навука і тэхніка, 1993. – 255 с.

137 **Гаевик, Д. Т.** Подшипниковые опоры современных машин / Д. Т. Гаевик. – М. : Машиностроение, 1985. – 248 с.: ил.

138 **Nelias, D.** Power loss of gearbox ball bearing under axial and radial loads / D. Nelias, P. Sainsot, L. Flamand // STLE Tribology Transactions (ISSN 0569-8197). – 1994. – Vol. 37, № 1. – P. 83–90.

139 **Gafitanu, M. D.** Losses due to friction in radial-axial ball bearings at high rotational speeds / M. D. Gafitanu, D. N. Olaru, M. C. Cocea // Wear (ISSN 0043-1648). – 1993. – Vol. 160, № 1. – P. 51–60.

140 **Иосилевич, Г. Б.** Детали машин : учебник для студентов машиностроительных спец. вузов / Г. Б. Иосилевич. – М. : Машиностроение, 1988. – 368 с. : ил.

141 **Лустенков, М. Е.** Определение КПД тяжело нагруженного радиального подшипника качения / М. Е. Лустенков // Ремонт. Восста-

новление. Модернизация. – 2010. – № 4. – С. 2–5.

142 **Анурьев, В. И.** Справочник конструктора-машиностроителя / В. И. Анурьев. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1978. – 416 с. : ил.

143 **Лустенков, М. Е.** Определение потерь мощности в контакте тела качения с тремя поверхностями / М. Е. Лустенков, А. М. Даньков // Современные направления теоретических и прикладных исследований 2008 : сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф., Одесский нац. морской ун-т, Одесса, 15–25 марта 2008 г. Т. 3. Технические науки. – Одесса : Черноморье, 2008. – С. 3–5.

144 **Лустенков, М. Е.** Планетарные шариковые передачи цилиндрического типа : монография / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 123 с. : ил.

145 **Лустенков, М. Е.** Передачи с телами качения: анализ развития, классификация и перспективы / М. Е. Лустенков // Детали машин и трибология : межвуз. сб. науч. тр. – Калининград : КГТУ, 2005. – С. 19–29.

146 **Лустенков, М. Е.** Анализ развития и классификация передач с телами качения / М. Е. Лустенков // Приводная техника. – 2005. – № 4 (56). – С. 23–27.

147 **Лустенков, М. Е.** Разработка поршневого насоса на базе ЭШП / М. Е. Лустенков // Инженер-механик. – № 2 (25). – 2004. – С. 19–20.

148 **Колчин, Н. И.** Механика машин / Н. И. Колчин. – Л. : Машиностроение. – 1971. – 560 с. : ил.

149 **Дворников, Л. Т.** Основы теории анализа и синтеза структур механизмов и исключение в них избыточных связей / Л. Т. Дворников // Основы проектирования и детали машин – XXI век : материалы Всероссийской науч.-метод. конф. – Орел : ОрелГТУ, 2007. – С. 263–271.

150 **Решетов, Д. Н.** Детали машин : учебник для студентов машиностроительных и механических спец. вузов / Д. Н. Решетов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с. : ил.

151 Эллипсоидная передача с телами качения : пат. 8023 Респ. Беларусь, МПК<sup>7</sup> С 1 F 16 H 25/06 / М. Е. Лустенков ; заявитель Белорус.-Рос. ун-т. – № а 20020398 ; заявл. 15.05.02 ; опубл. 30.04.06 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2006. – № 2. – 98 с.

152 **Лустенков, М. Е.** Эллипсоидные шариковые редукторы: геометрия и вопросы кинематики / М. Е. Лустенков. – Могилев, 2002. – 17 с. : ил. – Деп. в БелИСА 24.05.02, № Д200242 // Реф. сб. неопублик. работ. Отчеты НИР, ОКР, ОТР, деп. науч. рукоп. – Вып. 1 (24). БелИСА. – Минск, 2002. – С. 90–91.

153 Планетарная передача с телами качения : пат. 11566 Респ. Беларусь, МПК (2006) F 16 H 25/00 / М. Е. Лустенков ; заявитель М. Е. Лустенков. – № а20061203 ; заявл. 30.11.06 ; опубл. 30.04.06 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2009. – № 2. – С. 76.

154 Приспособление для демонтажа колес автомобиля : пат. 8120 Респ. Беларусь, МПК<sup>7</sup> В 25 В 21/00 / М. Е. Лустенков ; заявитель Белорус.-Рос. ун-т. – № а 20030077 ; заявл. 31.01.03 ; опубл. 30.06.06 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2006. – № 3. – С. 72.

155 **Лустенков, М. Е.** Ключ для демонтажа ведущих колес грузовых автомобилей ЗИЛ и ГАЗ / М. Е. Лустенков // Автомобильная промышленность. – 2003. – № 5. – С. 24–25.

156 **Лустенков, М. Е.** Ключ для демонтажа ведущих колес грузовиков ЗИЛ и ГАЗ / М. Е. Лустенков // Инженер-механик. – 2003. – № 2 (19). – С. 24–26.

157 **Лустенков, М. Е.** Механизированный инструмент для демонтажа колес грузовых автомобилей / М. Е. Лустенков // Проблемы эксплуатации систем транспорта : тр. Всероссийской науч.-практ. конф. 7 нояб. 2007 г. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2007 – С. 87–89.

158 **Лустенков, М. Е.** Общие сведения об эллипсоидных шариковых передачах / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич, В. В. Неверко // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. – 2003. – Сер. В (прикладные науки). – Т. 2, № 4. – С. 230–232.

159 **Лустенков, М. Е.** Эллипсоидные шариковые передачи : недостатки и преимущества / М. Е. Лустенков // Приводная техника. – 2003. – № 3 (43). – С. 20–22.

160 **Лустенков, М. Е.** Эллипсоидные шариковые передачи: преимущества и недостатки / М. Е. Лустенков // Прогрессивные технологии, процессы и оборудование : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : МГТУ, 2003. – С. 77–79.

161 **Лустенков, М. Е.** Эллипсоидные шариковые передачи с примером их практической реализации / М. Е. Лустенков // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск : Технопринт, 2003. – Вып. 19. – С. 495–499.

162 **Бубенчиков, А. М.** Математическое моделирование работы эксцентриковой передачи с промежуточными телами качения и самоторможением / А. М. Бубенчиков, Н. Р. Щербаков / Доклады ТУСУРа. – 2009. – № 1 (19). – Ч. 1. – С. 65–71.

163 **Щербаков, Н. Р.** Математическое и компьютерное моделирование динамического состояния систем передачи движения : автореф.

дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / Н. Р. Щербаков. – Томск : Томский гос. ун-т, 2009. – 30 с. : ил.

164 **Лустенков, М. Е.** Сферическая планетарная шариковая передача / М. Е. Лустенков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2009. – Ч. 1. – С. 149.

165 Планетарный редуктор : пат. 12763 С 1 Респ. Беларусь, МПК (2006) F 16H 25/22 / М. Е. Лустенков ; заявитель М. Е. Лустенков. – № а20071521 ; заявл. 07.12.07, опубл. 30.08.09 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2009. – № 4. – С. 70.

166 **Лустенков, М. Е.** Проектирование планетарных шариковых передач с различными профилями беговых дорожек / М. Е. Лустенков // Вестн. Брянского гос. техн. ун-та. – 2009. – № 2. – С. 70–77.

167 **Лустенков, М. Е.** Количественная оценка явления искажения профиля беговых дорожек в эллипсных шариковых передачах / М. Е. Лустенков, С. Д. Макаревич, А. С. Захарьев // Вестн. МГТУ. – 2004. – № 1. – С. 124–128.

168 **Лустенков, М. Е.** Кинематический анализ редукторно-дифференциальных механизмов на базе планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич, И. Ю. Хадкевич // Nowoczesnych naukowych osiagniec-2008 : materialy IV miedzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji 1–14 lutego 2008 roku. Т. 16. Techniczne nauki : Przemysl. Nauka I studia. – S. 44–47.

169 **Тарасик, В. П.** Моделирование планетарных коробок передач структурно-матричным методом / В. П. Тарасик, О. В. Пузанова // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2003. – № 2 (5). – С. 148–153.

170 **Труханов, В. М.** Некоторые вопросы построения динамических моделей планетарных передач / В. М. Труханов, А. А. Тетюшев // Справочник. Инженерный журнал. – 2006. – № 5. – С. 38–40.

171 Проектирование трансмиссий автомобилей : справочник / Под общ. ред. А. И. Гришкевича. – М. : Машиностроение, 1984. – 272 с. : ил.

172 **Альгин, В. Б.** Динамика, надежность и ресурсное проектирование трансмиссий мобильных машин / В. Б. Альгин. – Минск : Наука и техника, 1995. – 256 с. : ил.

173 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Минск : ДизайнПРО, 2004. – 640 с. : ил.

174 **Лустенков, М. Е.** Динамическая модель планетарной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Ключевые аспекты научной деятель-

ности 2007 : материалы II науч.-практ. конф., Днепропетровск, 16–31 янв. 2007 г. Т. 8. Технические науки. – Днепропетровск : Наука и образование, 2007. – С. 18–20.

175 **Фролов, К. В.** Теория механизмов и машин / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов ; под ред. К. В. Фролова. – М. : Высш. шк., 1987. – 496 с. : ил.

176 **Лукин, П. П.** Конструирование и расчет автомобиля : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Автомобили и тракторы» / П. П. Лукин, Г. А. Гаспарянц, В. Ф. Родионов. – М. : Машиностроение, 1984. – 376 с. : ил.

177 Автомобили: конструкции, конструирование и расчет. Трансмиссия / Под ред. А. И. Гришкевича. – Минск : Выш. шк., 1985. – 240 с. : ил.

178 **Лустенков, М. Е.** Силовой анализ цилиндрического синусо-шарикового зацепления // Новые конкурентоспособные и прогрессивные технологии, машины и механизмы в условиях современного рынка : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев, 2000. – С. 191.

179 Теоретическая оценка механических потерь в эллипсных шариковых передачах / М. Е. Лустенков [и др.] // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск : Технопринт, 2004. – Т. 2, вып. 20. – С. 223–229.

180 **Лустенков, М. Е.** Исследование пространственной фрикционной модели эллипсного шарикового зацепления / М. Е. Лустенков, С. Д. Макаревич // Теория и практика машиностроения. – 2004. – № 3. – С. 38–41.

181 **Лустенков, М. Е.** Анализ пространственной фрикционной модели планетарной передачи с телами качения / М. Е. Лустенков // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2007. – № 4 (17). – С. 89–97.

182 Определение механических потерь в эллипсных шариковых передачах / М. Е. Лустенков [и др.] // Детали машин и трибология : межвуз. сб. науч. тр. – Калининград, 2005. – С. 30–37.

183 **Лефаров, А. Х.** Дифференциалы автомобилей и тягачей / А. Х. Лефаров. – М. : Машиностроение, 1972. – 145 с.

184 **Лустенков, М. Е.** Использование передач с телами качения в трансмиссиях автомобиля / М. Е. Лустенков [и др.] // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2004. – Ч. 2. – С. 113.

185 **Лустенков, М. Е.** Межколесные кулачковые дифференциалы повышенного трения / М. Е. Лустенков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн.

конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2004. – Ч. 2. – С. 111–112.

186 Металлорежущие станки / Под ред. В. К. Тепинкичиева. – М. : Машиностроение, 1973.

187 Способ фрезерования пазов на поверхности круговых дисков : а. с. 1155374 СССР, МКИ В 23 С 3/28 / А. И. Молчанов, Р. К. Шраго; Украинский науч.-исслед. ин-т станков и инструментов. – № 3542457/25-08; заявл. 28.01.83 ; опубл. 15.05.85 // Открытия. Изобрет. – 1985. – Бюл. № 18. – 3 с.

188 Инструмент для обработки пазов на торцах деталей : пат. 553 Респ. Беларусь, МПК<sup>7</sup> В 23 С 3/28 / В. А. Данилов, Р. А. Киселев (BY). – № и 20010263 ; заявл. 06.11.01 ; опубл. 03.06.02 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр уласнасці. – 2002. – № 3. – С. 63.

189 **Чистосердов, П. С.** Особенности динамики процесса фрезерования синусоидальных канавок на деталях синусошарикового редуктора / П. С. Чистосердов, А. И. Крез // Изв. вузов. Машиностроение. – 1985. – № 3. – С. 139–142.

190 **Виргинский, Ю. А.** Расширение технологических возможностей зубофрезерного станка / Ю. А. Виргинский // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – Вып. 31. Промышленность. Машиностроение. – 2008. – С. 94–96.

191 **Румянцев, А. В.** Технология изготовления кулачков / А. В. Румянцев. – Л. : Машиностроение, 1969. – 232 с. : ил.

192 **Лустенков, М. Е.** Технология изготовления многопериодных профильных поверхностей / М. Е. Лустенков, А. И. Крез, С. Д. Макаревич // Перспективные технологии, материалы и системы : сб. науч. тр. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – С. 201–206.

193 **Лустенков, М. Е.** Моделирование профиля рабочей поверхности кулачка шариковой планетарной передачи / М. Е. Лустенков, И. И. Маковецкий // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2008. – № 2. – С. 13–18.

194 **Лустенков, М. Е.** Расчет геометрии адаптированного профиля эллипсной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Технология машиностроения. – 2005. – № 5. – С. 36–38.

195 **Лустенков, М. Е.** Моделирование и изготовление многопериодного профиля торцового кулачка планетарной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2006. – № 3 (12) – С. 96–101.

196 **Лустенков, М. Е.** Технология изготовления адаптированного профиля торцового кулачка планетарной шариковой передачи / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич // Материалы, оборудование и ресурсосбе-

регающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 20–21 апр. 2006 г. : в 3 ч. / Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2006. – Ч. 1. – С. 72.

197 **Лустенков, М. Е.** Разработка технологичного профиля кулачков планетарной шариковой передачи / М. Е. Лустенков, С. Д. Макаревич, Т. Н. Питкова // Новые материалы и технологии в машиностроении : сб. науч. тр. по итогам Междунар. науч.-техн. конф., Брянск, 1–31 мая 2006 г. / Брянская гос. инж.-техн. академия ; редкол. : В. И. Микрин [и др.]. – Брянск, 2006. – Вып. 5. – С. 97–100.

198 **Лустенков, М. Е.** Многопериодные эллипсные шариковые передачи / М. Е. Лустенков // Вестн. ГГТУ им П. О. Сухого. – 2004. – № 2. – С. 24–30.

199 Формообразование рабочих поверхностей зубьев и беговых дорожек основных деталей планетарных передач новых типов / М. Е. Лустенков [и др.] // Современный науч. вестн. (Днепропетровск). – 2009. – № 21 (77). – С. 37–46.

200 **Макаревич, Д. М.** Прочностной расчет сепаратора СШР / Д. М. Макаревич, М. Е. Лустенков // Вестн. МГТУ. – 2002. – № 1. – С. 74–78.

201 **Лустенков, М. Е.** Расчет наружных втулок СШР / М. Е. Лустенков // Создание и применение высокоэффективных наукоемких ресурсосберегающих технологий, машин и комплексов : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : МГТУ, 2001. – С. 149–150.

202 **Лустенков, М. Е.** Методика расчета малогабаритных синусоцилиндрических шариковых редукторов / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич ; МогГТУ. – Могилев, 2002. – 12 с. : ил. – Библиогр. : 3 назв. – Рус. – Деп. в БелИСА 24.05.02, № Д200241 // Реф. сб. неопублик. работ. Отчеты НИР, ОКР, ОТР, деп. науч. рукоп. – Вып. 1 (24). БелИСА. – Минск, 2002. – С. 91.

203 **Лустенков, М. Е.** Создание высокомоментных синусошариковых редукторов и основ их расчета при статическом нагружении / М. Е. Лустенков // Современные направления развития производственных технологий и робототехника : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев, 1999. – С. 189.

204 **Лустенков, М. Е.** Определение основных геометрических параметров эллипсных шариковых передач на стадии проектирования и рекомендации по повышению их КПД / М. Е. Лустенков ; МогГТУ. – Могилев, 2004. – 11 с. : ил. – Библиогр. : 3 назв. – Рус. – Деп. в БелИСА

08.04.04, № Д 200430 // Реф. сб. неопублик. работ. Отчеты НИР, ОКР, ОТР, деп. науч. рукоп. – Вып. 31. БелИСА. – Минск, 2004. – С. 106.

205 **Лустенков, М. Е.** Определение основных геометрических параметров планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2008. – № 1. – С. 12–17.

206 Автоматизированная методика расчета планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков [и др.] // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 21–22 апр. 2005 г. : в 2 ч. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – Ч. 1. – С. 111–112.

207 **Лустенков, М. Е.** Автоматизация расчета планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков, И. Ю. Хадкевич // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. : Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2008. – Ч. 1. – С. 104.

208 **Лустенков, М. Е.** Обеспечение работоспособности синусоцилиндрических шариковых редукторов / М. Е. Лустенков // Перспективные технологии, материалы и системы : тр. МГТУ. – Могилев, 2001. – С. 287–290.

209 **Лустенков, М. Е.** Вибратор для ликвидации прихватов / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич // Нефть и газ : проблемы недропользования, добычи и транспортировки : материалы науч.-техн. конф., посвященной 90-летию со дня рождения В. И. Муравленко. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2002. – С. 147–148.

210 **Коломоец, А. В.** Предупреждение и ликвидация прихватов в разведочном бурении / А. В. Коломоец. – М. : Недра, 1985. – 220 с. : ил.

211 Устройство для отвинчивания труб в скважине : пат. 4314 С 2 Респ. Беларусь, МПК 7 Е 21 В 23/00, 23/04 / Р. М. Игнатищев, Д. М. Макаревич, М. Е. Лустенков ; заявитель Могилев. гос. техн. ун-т. – № а19990114 ; заявл. 10.02.99 ; опубл. 30.03.02 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2002. – № 1 (32). – С. 142–143.

212 **Лустенков, М. Е.** Устройство для развинчивания бурильных труб / М. Е. Лустенков ; МогМИ. – Могилев, 1999. – 10 с. : ил. – Библиогр. : 15 назв. – Рус. – Деп. в БелИСА 4.08.99, № Д199986 // Реф. сб. неопублик. работ. Отчеты НИР, ОКР, ОТР, деп. науч. рукоп. – Вып. 3 (14). БелИСА. – Минск, 1999. – С. 89.

213 Ловильные работы при добыче нефти / Р. Н. Мусаелянц [и др.]. – М. : Недра, 1975. – 120 с. : ил.

214 **Савин, Л. А.** Опытные образцы редукторов с планетарными шариковыми передачами / Л. А. Савин, М. Е. Лустенков // Основы проек-

тирования машин – XXI век : материалы Всероссийской науч.-метод. конф. – Орел : ОрелГТУ, 2007. – С. 350–354.

215 **Лустенков, М. Е.** Мотор-редуктор с двухступенчатой планетарной шариковой передачей / М. Е. Лустенков // Современные методы проектирования машин : Респ. межведомственный сб. науч. тр. – Вып. 2. : в 7 т. Т. 3. Проектирование приводов машин. – Минск : Технопринт, 2004. – С. 83–88.

216 **Лустенков, М. Е.** Малогабаритный привод с низким энергопотреблением для разъединителей высоковольтных контактных сетей / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич // Ресурсосберегающие технологии в машиностроении : материалы 5-й Всероссийской науч.-практ. конф. 21–22 сент. 2006 г. – Алт. гос. техн. ун-т, БТИ. – Бийск : Из-во Алт. гос. техн. ун-та, 2007. – С. 62–66.

217 **Лустенков, М. Е.** Трехступенчатый планетарный шариковый редуктор для скважинного прибора / М. Е. Лустенков // Материалы, технологии и оборудование в производстве, эксплуатации, ремонте и модернизации машин : сб. науч. тр. VI Междунар. науч.-техн. конф. : в 3 т. Т. 2. – Новополюцк : ПГУ, 2007. – С. 181–184.

218 **Лустенков, М. Е.** Редуцирующий узел скважинного прибора с планетарной шариковой передачей / М. Е. Лустенков // Горная механика. – 2008. – № 4. – С. 81–86.

219 **Лустенков, М. Е.** Шариковые планетарные передачи для средств малой механизации / М. Е. Лустенков // Вестн. машиностроения. – 2004. – № 6. – С. 15–17.

220 **Лустенков, М. Е.** Разработка средств малой механизации на базе эллипсоидной шариковой передачи / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич, А. С. Захарьев // Прогрессивные технологии, процессы и оборудование : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : МГТУ, 2003. – С. 74–76.

221 **Лустенков, М. Е.** Планетарные шариковые передачи: достигнутые результаты и перспективы дальнейших исследований / М. Е. Лустенков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. : в 3 ч. : Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2007. – Ч. 1. – С. 133–134.

222 Планетарные кулачково-плунжерные передачи. Проектирование, контроль и диагностика / М. Ф. Пашкевич [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2003. – 221 с. : ил.

223 **Лустенков, М. Е.** Лебедка со встроенной планетарной шариковой передачей / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич, С. Д. Макаревич // Новые материалы и технологии в машиностроении : сб. науч. тр. по итогам Междунар. науч.-техн. конф., Брянск, 1–31 мая 2006 г. / Брянская гос. инж.-техн. академия ; редкол. : В. И. Микрин [и др.]. – Брянск, 2006. – Вып. 5. – С. 94–97.

224 **Лустенков, М. Е.** Ручная лебедка с эллипсной шариковой передачей / М. Е. Лустенков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 21–22 апр. 2005 г. : в 2 ч. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – Ч. 1. – С. 109–110.

225 **Лустенков, М. Е.** Автоматизация расчета редукторного узла ручной лебедки / М. Е. Лустенков, Т. Ю. Орлова, А. П. Прудников // Состояние, проблемы и перспективы автоматизации технической подготовки производства на промышленных предприятиях : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брянск, 16–18 нояб. 2009 г. – Брянск : БГТУ, 2009. – С. 69.

226 **Лустенков, М. Е.** Ручная лебедка и мотор-редуктор с планетарной шариковой передачей / М. Е. Лустенков // Вестн. БГТУ. – 2005. – № 4 (34). – С. 62–65.

227 **Лустенков, М. Е.** Балонные ключи с редукторными узлами / М. Е. Лустенков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-тех. конф. : Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2008. – Ч. 1. – С. 103.

228 **Лустенков, М. Е.** Механизм для демонтажа и сборки резьбовых соединений / М. Е. Лустенков, А. П. Прудников // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. : Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2009. – Ч. 1. – С. 150.

229 Приспособление для демонтажа и сборки резьбовых соединений : пат. 6123 U Респ. Беларусь, МПК (2009) F 16 H 25/00 / М. Е. Лустенков, А. П. Прудников ; заявитель Белорус.-Рос. ун-т. – № u 20090806 ; заявл. 01.10.09 ; опубл. 30.04.10 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2010. – № 3. – С. 28.

230 **Лустенков, М. Е.** Сравнительный анализ программных пакетов, используемых для проектирования передач с телами качения / М. Е. Лустенков, И. Ю. Хадкевич // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности : материалы Междунар. конф. молодых

ученых 20–21 нояб. 2008 г. : Белорус.-Рос. ун-т ; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2008. – С. 52.

231 **Лустенков, М. Е.** Конструкция кулачкового дифференциала с ЭШП / М. Е. Лустенков // Грузовик &. – 2004. – № 1 (90). – С. 13–14.

232 **Лустенков, М. Е.** Межколесные кулачковые дифференциалы повышенного трения / М. Е. Лустенков // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 2004. – № 3. – С. 16–17.

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	3
<b>1 Состояние вопроса и концепция исследований</b> .....	6
1.1 О развитии теории сопротивления качению .....	6
1.2 Обоснование выбора ППТК в качестве объекта исследования .....	11
1.3 Анализ развития ППТК .....	13
1.4 Концепция исследований .....	50
<b>2 Определение и рекомендации по снижению потерь мощности в нагруженном контакте тел качения с поверхностями других тел</b> .....	53
2.1 Определение коэффициентов трения скольжения и сопротивления качению при движении тела качения по поверхности .....	53
2.2 Определение потерь мощности в нагруженном контакте «тело качения–поверхность» .....	65
2.3 Рекомендации по минимизации потерь мощности в нагруженном катящемся контакте .....	86
<b>3 Структурный аспект снижения потерь мощности в ППТК</b> .....	87
3.1 Классификация передач с телами качения, основные определения и принцип работы ППТК .....	87
3.2 Структурные резервы повышения КПД ППТК .....	93
3.3 Структурный анализ ППТК .....	97
3.4 Результаты экспериментальных исследований различных конструкций редукторов .....	102
3.5 Разработка конструкции планетарной зубчато-шариковой передачи .....	106
<b>4 Геометрический и кинематический анализ ППТК</b> .....	111
4.1 Развитие основ теории зацепления с промежуточными телами качения .....	111
4.2 Исследование ППТК с кривыми, расположенными на различных поверхностях .....	121

4.3 Исследование и синтез уравнений взаимодействующих кривых различных типов .....	130
4.4 Искажение идеального профиля беговых дорожек под сателлиты и минимизация его влияния .....	138
4.5 Определение скоростей и ускорений звеньев ППТК .....	144
4.6 Кинематический анализ редукторно-дифференциальных механизмов, созданных на основе ППТК .....	150
<b>5 Динамический анализ и оценка механических потерь в ППТК .....</b>	<b>154</b>
5.1 Вывод уравнения движения ППТК .....	154
5.2 Анализ динамической модели ППТК .....	162
5.3 Оценка механических потерь в ППТК на основе плоской и пространственной моделей зацепления .....	172
5.4 Оптимизация геометрических параметров ППТК и рекомендации по повышению КПД передач .....	181
5.5 Упрощение силовых зависимостей для инженерного расчета передач .....	190
5.6 Алгоритм определения КПД передач с различными типами сопряженных кривых .....	193
5.7 Силовые зависимости для дифференциалов на базе ППТК .....	196
<b>6 Обзор технологий изготовления деталей ППТК и разработка методик их расчета .....</b>	<b>199</b>
6.1 Вопросы технологии изготовления деталей ППТК .....	199
6.2 Материалы и термообработка деталей ППТК .....	217
6.3 Расчет деталей ППТК на прочность .....	218
6.4 Методика расчета и проектирования ППТК .....	224
<b>7 Механизмы, созданные на основе ППТК .....</b>	<b>228</b>
7.1 Разработка и испытания устройства для ликвидации аварий при бурении скважин .....	228
7.2 Конструкции редукторов и мотор-редукторов со встроенными ППТК .....	231
7.3 Средства малой механизации, разработанные на базе ППТК .....	236

7.4 Конструкции автотракторных дифференциалов с телами качения .....	244
<b>Заключение</b> .....	247
<b>Список литературы</b> .....	250

Научное издание

**Лустенков Михаил Евгеньевич**

**ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ  
КАЧЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ  
ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ**

Монография

Редакторы : А. Т. Червинская,

Т. А. Рыжикова

Художественное оформление обложки И. А. Алексеюс

Компьютерный дизайн Н. П. Полевничая

Подписано в печать 03.11.2010. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 15,99. Уч.-изд. л. 14,00. Тираж 100 экз. Заказ № 790.

Издатель и полиграфическое исполнение  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет»  
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.  
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43