

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Преподавание математики в высшей школе  
и работа с одаренными студентами  
в современных условиях**

**Teaching mathematics in higher education  
and working with gifted  
students in contemporary context**

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 19 февраля 2026 года)



Могилев  
«Белорусско-Российский университет»  
2026

УДК 37.091.3:51  
ББК 74.58:22.1  
П72

Редакционная коллегия: д-р техн. наук, проф. *М. Е. Лустенков* (гл. редактор); канд. техн. наук, доц. *Д. М. Свирева* (зам. гл. редактора); д-р техн. наук, проф. *В. М. Пашкевич* (зам. гл. редактора); канд. физ.-мат. наук, доц. *В. Г. Замураев*; канд. физ.-мат. наук, доц. *И. И. Маковецкий*; канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Романенко*; *А. Н. Бондарев* (отв. секретарь)

П72 **Преподавание** математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 19 февр. 2026 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Бел.-Рос. ун-т ; редкол.: М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2026. – 136 с.: ил.  
ISBN 978-985-492-320-8.

В сборнике представлены материалы научно-практического семинара, традиционно проводимого в Белорусско-Российском университете.

УДК 37.091.3:51  
ББК 74.58:22.1

ISBN 978-985-492-320-8

© Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», 2026

# СОДЕРЖАНИЕ

## Тезисы докладов

АПУШКИНСКАЯ Д. Е., КИНДЕРКНЕХТ Я. А. Математическое образование в вузах Германии: особенности, преимущества и проблемы .....	5
АРСЛАНБЕКОВА С. А., ДИК Е. Н., МУРЗИНА Э. Ф. Реализация межпредметных связей на примере подбора задачного материала .....	6
БУТОМА А. М. Обеспечение реализации прогностической функции обучения математике в высшей школе .....	9
БУТОМА А. М. Применение принципа дифференциации обучения для развития продуктивной деятельности студентов.....	11
ВАКАЕВА А. Б., БОРТКОВСКАЯ М. Р., ЛЕВИЦКИЙ Л. А. Использование знаменитого задачника Б. П. Демидовича в системе олимпиадной подготовки студентов .....	13
ВАКАЕВА А. Б., БОРТКОВСКАЯ М. Р. Участие в студенческих олимпиадах как фактор развития профессиональных компетенций .....	16
ВЕЛИКОВИЧ Л. Л. Теория решения задач: структурная схема решения задачи как модель процесса поиска ее решения .....	19
ВОЙТИЦКИЙ В. И. Подготовка задач Международной олимпиады RUDN Math Olymp – 2025 .....	23
ГАРИСТ В. Э. Элементы математической логики в системах компьютерной математики.....	26
ДИК Е. Н., АРСЛАНБЕКОВА С. А., МУРЗИНА Э. Ф. Изучение специальных разделов высшей математики в магистратуре .....	30
ЗАМУРАЕВ В. Г. Решения некоторых задач XV Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике.....	33
КОЗЛОВ А. Г. Автоматизация формирования большого количества задач в системе Moodle .....	36
МАСТИХИНА А. А. Преподавание дискретной математики во втузе: поиск эйлера цикла.....	39
МАСТИХИН А. В. Вывод оптических свойств кривых второго порядка в курсе аналитической геометрии.....	42
МУРЗИНА Э. Ф., ДИК Е. Н., АРСЛАНБЕКОВА С. А. Математическое моделирование в курсе математики.....	45
ОРЛОВА Т. Ю. Система упражнений для математического кружка по теме «Аналитическая геометрия» .....	48
РОМАНЕНКО А. А. Об интересе к прикладным задачам студентов специальности «Прикладная математика» .....	51

САКОВИЧ Н. В., РОМАНОВИЧ Л. А. Дидактическое обеспечение учебной дисциплины «Алгебра многочленов и расширения полей» .....	53
СЕРЫЙ А. И. Об изучении темы «Сжижение газов» в курсе термодинамики .....	55
СЕРЫЙ А. И. Об использовании блок-схем при изучении темы «Модель Бора» в курсе атомной физики .....	58
СТАРОВОЙТОВА Е. Л. Изучение вероятностно-статистических дисциплин студентами-гуманитариями: вопросы методики.....	61
СТАРОВОЙТОВА Т. С. Некоторые особенности освоения вопросов стохастической линии студентами-гуманитариями .....	64
ФИЛИПЕНКО О. В. Направления развития математического образования в техническом университете .....	67
ЧЕБ Е. С. Методические аспекты преподавания дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» при обучении студентов IT-специальностей.....	70
ЯКИМОВ А. И., ПОМОЗОВ В. А. Применение вайб-кодинга при изучении теории графов .....	73
ЯКИМОВ А. И., БОГДАШЕВА К. В. Формальное описание алгоритма Прима в теории графов .....	76
CHENG Z., FAN H., WANG M. Teaching gifted students in mathematics an approach of Wuhan University.....	78

### Статьи

АСТАШОВА И. В., АСТАШОВ Е. А., КОРОБКО Е. В., ПРОКОПЕНКО О. Д., РОГАЧЕВ В. В., СТЕПАНОВА М. А., ТУСУПБЕКОВА Э. Е. Об опыте проведения в МГУ имени М. В. Ломоносова отборочных этапов олимпиад по математике в условиях возможности использования участниками искусственного интеллекта.....	81
АСТАШОВА И. В., КИПКЕЕВ А. А., МАСНАВИЕВ Р. Р. Сравнительное исследование качества решений больших языковых моделей общего назначения в задачах математического анализа.....	105
УМАРОВА Т. М. Приоритет естественнонаучного образования.....	128

УДК 378.14

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ВУЗАХ ГЕРМАНИИ:  
ОСОБЕННОСТИ, ПРЕИМУЩЕСТВА И ПРОБЛЕМЫ

Д. Е. АПУШКИНСКАЯ

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы  
Москва, Россия

Я. А. КИНДЕРКНЕХТ

Независимый исследователь  
Фёльклинген, ФРГ

В Германии на 2024/25 учебный год насчитывается более 420 высших учебных заведений, включая университеты (109), педагогические, теологические, художественные и музыкальные высшие школы, а также институты прикладных наук (Fachhochschulen). Среди них 115 частных вузов, причем 21 из которых является государственно-признанным частным университетом.

Особенностью системы является наличие множества небольших вузов в малых городах (например, Технический университет Клаусталья – 3500 студентов). Это обеспечивает доступность высшего образования «на местах», способствует сохранению молодежи в регионах и создает рабочие места для ученых и преподавателей. Однако такая децентрализация имеет и минусы: высокая стоимость обучения в расчете на одного студента и недостаточно развитая научная среда в малых вузах.

Образовательные программы по математике в Германии включают бакалавриат, магистратуру и педагогическое образование (Lehramt). Каждый университет разрабатывает собственные учебные планы, которые аккредитуются министерствами земель. Это позволяет вузам предлагать специализированные программы, такие как «Математика и информатика», «Страховая и финансовая математика», «Техноматематика» и др.

Примером может служить *программа бакалавриата по математике в Университете земли Саар*.

Срок обучения: 6 семестров (180 кредитов ECTS).

Обязательная часть (87 ECTS) включает базовые курсы: математический анализ, линейная алгебра, программирование, численные методы, теория вероятностей.

Факультативно-обязательная часть (минимум 45 ECTS) позволяет студентам выбирать курсы в соответствии со своими интересами (например, алгебра, стохастика, финансовая математика).

Дополнительная специальность (Nebenfach) – 27–36 ECTS (например, экономика, информатика, физика и др.).

Включены практические семинары (Proseminar, Seminar) и бакалаврская работа (12 ECTS).

Главное отличие немецких программ – большая свобода выбора дисциплин. Это позволяет студентам рано специализироваться, но может привести к пробелам в общематематической подготовке и отсутствию единого стандарта знаний. В российских программах, как правило, больше обязательных дисциплин, что обеспечивает широкую базовую подготовку, но оставляет меньше возможностей для индивидуализации.

Учебный год делится на зимний (октябрь–март) и летний (апрель–сентябрь) семестры. Базовые лекции читаются всеми профессорами по очереди, что позволяет студентам знакомиться с разными преподавателями. Практические занятия (Tutorium) ведут студенты старших курсов, что облегчает коммуникацию, но может сказываться на качестве преподавания.

Экзамены проводятся в основном в письменной форме (Klausur). Устные экзамены чаще всего имеют место лишь на старших курсах. Оценки выставляются по 5-балльной шкале с промежуточными значениями. Студенты имеют право на две пересдачи; при трех неудачах они отчисляются и теряют право на дальнейшее обучение в Германии по данной специализации.

Дипломная работа выполняется самостоятельно при минимальной поддержке руководителя. Курсовые работы в немецких программах, как правило, не предусмотрены.

Немецкая система математического образования сочетает высокую степень академической свободы, возможность ранней специализации и гибкость учебных планов. Однако она требует от студентов высокой степени самостоятельности и ответственности за формирование своей образовательной траектории. Децентрализация системы обеспечивает доступность образования, но создает трудности в части финансирования и поддержания научной среды в небольших вузах.

УДК 629.027

## РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ НА ПРИМЕРЕ ПОДБОРА ЗАДАЧНОГО МАТЕРИАЛА

С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Е. Н. ДИК, Э. Ф. МУРЗИНА  
Башкирский государственный аграрный университет  
Уфа, Россия

В Башкирском ГАУ «Математика» является дисциплиной, которая ведется на всех направлениях бакалавриата. Ее изучают на факультете механики и цифрового инжиниринга, на факультете пищевых технологий, на энергетическом

факультете и на всех остальных. В целях повышения качества преподавания на кафедре математики разработана и действует система межпредметного подхода к подбору задачного материала. Преподаватели математики взаимодействуют с кафедрами, ведущими специальные дисциплины [1]. В ходе такого сотрудничества определяется минимальный набор знаний для студентов того или иного направления.

Приведем пример задачи, решаемой со студентами факультета пищевых технологий (рис. 1).

**Условие.** Определить температуру, до которой продукт охладится, если за 25 минут продукт остывает от  $100^{\circ}$  до  $55^{\circ}\text{C}$ , при этом температура окружающей среды  $20^{\circ}\text{C}$ .

**Решение.** Скорость охлаждения тела пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой:  $\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$ , где  $T$  - температура продукта,  $T_s$  - температура окружающей среды.

Зная, что  $T_s = 20^{\circ}\text{C}$ , имеем  $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ .

Решение составленного уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:  $\ln(T - 20) = kt + \ln C$ ,  $T - 20 = Ce^{kt}$  - общее решение.

Из условия  $T(0) = 100$  определяем  $C = 80$ ,  $T - 20 = 80e^{kt}$  - частное решение.

Из дополнительного условия  $T = 55^{\circ}\text{C}$  при  $t = 25$  минут:  $e^k = \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{1}{25}}$ .

Итак, уравнение охлаждения горячего продукта имеет вид:

$$T = 80 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{t}{25}} + 20.$$

Определим искомую температуру продукции через 45 минут:

$$T = 80 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{45}{25}} + 20 = 38,4 \approx 38.$$

**Ответ.** Через 45 минут продукт остынет до температуры приблизительно  $T = 38^{\circ}\text{C}$ .

Рис. 1. Задача для студентов факультета пищевых технологий

Дифференциальные уравнения востребованы в преподавании специальных дисциплин на любом направлении подготовки [2]. Составление задач, наполненных практическим содержанием, – работа трудоемкая и творческая. На кафедре математики действует научно-методический кружок, в работу которого вовлечены студенты, интересующиеся изучением математики. Одним из направлений работы кружка является составление прикладных заданий [3]. Сначала участники изучают предложенные преподавателем задачи с решением,

а затем работают над наполнением задач новым содержанием практического характера, привязанным к тому или иному направлению обучения.

Задача с аналогичным решением для студентов факультета биотехнологий и ветеринарной медицины формулируется так, чтобы ее условие было связано с их будущей профессиональной деятельностью (рис. 2).

Такой подход к преподаванию, с одной стороны, повышает интерес обучающихся к дисциплине «Математика», а с другой – способствует вовлечению обучающихся в научную деятельность уже на первом году обучения [4]. Кроме того, предложенный метод обучения способствует лучшему освоению профессиональных компетенций.

**Условие.** В охотничьих угодьях, была найдена туша животного, убитого одним выстрелом. Требуется установить время выстрела, если в момент обнаружения температура туши составляла 28°C; через 2 часа температура тела убитого животного составила 22°C; температура воздуха во время обхода угодий не изменялась и была равна 15°C, средняя нормальная температура тела живого животного 38°C.

**Решение.** Составим функцию, описывающую изменение температуры в зависимости от времени  $y = y(x)$ , где  $x$  – время (ч);  $y$  – температура (°C). Выстрел производился в момент времени  $x = 0$ ,  $y_0 = y(0) = 38^\circ\text{C}$ .

Туша была найдена в момент времени  $x_0$ ,  $y(x_0) = 28^\circ\text{C}$ ,  $y(x_0+2) = 22^\circ\text{C}$ .

Температура воздуха  $k$  в период обхода угодий равна 15°C;

Составим зависимость между временем излучения тепла тушей и ее температурой в определенный момент времени:  $\dot{y} = -p(y - k)$ , где  $p$  – коэффициент пропорциональности, больший нуля.

Решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dy}{y-k} = -p \int dx \Leftrightarrow \ln(y - k) = -px + \ln(y_0 - k) \Leftrightarrow \ln \frac{y-k}{y_0-k} = -px.$$

Из имеющихся данных и условия задачи следует

$$\ln \frac{28-15}{38-15} = -px \Rightarrow \ln \frac{22-15}{38-15} = -p(x+2) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{28-15}{38-15} - \ln \frac{22-15}{38-15} = 2p.$$

Из расчетов следует

$$x = \frac{2}{0,619039} \ln \frac{38-15}{28-15} = \frac{2 \ln 1,769231}{0,619039} = 1,861366$$

**Ответ.** Между моментом выстрела и моментом обнаружения туши прошло приблизительно 1 час 52 минуты.

Рис. 2. Задача для студентов факультета биотехнологий и ветеринарной медицины

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багаутдинова, И. И. Анализ математического моделирования при восстановлении рабочих органов почвообрабатывающих машин / И. И. Багаутдинова, А. Ф. Фаюршин, Р. Р. Хакимов // Вестник Брянской государственной сельскохозяйственной академии. – 2015. – № 4. – С. 52–55.

2. Сагадеева, Э. Ф. Применение математических методов в сельском хозяйстве / Э. Ф. Сагадеева, А. И. Тагрифуллина // Российский электронный научный журнал. – 2025. – № 1 (55). – С. 756–765.

3. Багаутдинова, И. И. Примеры статистических исследований промышленных процессов / И. И. Багаутдинова, Р. И. Зайруллин // Наука молодых – инновационному развитию АПК : материалы XV Нац. науч.-практ. конф. молодых ученых, Уфа, 16–17 нояб. 2022 г. : в 2 ч. – Уфа : Башкир. гос. аграр. ун-т, 2022. – Ч. 1. – С. 171–177.

4. Сагадеева, Э. Ф. Анализ объема работ, выполненных по виду экономической деятельности «Строительство» / Э. Ф. Сагадеева, А. И. Тагрифуллина, А. А. Сарвартдинова // Российский электронный научный журнал. – 2025. – № 1 (55). – С. 780–787.

УДК 37.091.3:51

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГНОСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

А. М. БУТОМА

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

При обучении математике в высшей школе наибольшее внимание уделяется реализации таких функций математического обучения, как образовательная, развивающая, воспитательная и практическая. Однако для формирования разносторонне развитого и мыслящего специалиста не менее важной представляется реализация и других функций математического обучения, в частности прогностической.

Прогностическая функция математического обучения заключается в формировании умения быстро и правильно принимать верные, а главное, более рациональные решения той или иной проблемы. Лаконизм мысли, точность применяемых формул и утверждений способствуют сокращению времени на поиск решений. Реализация прогностической функции при обучении математике развивает умение правильно и логично рассуждать, выдвигать гипотезы, аргументировать и защищать выбранный метод решения, предвидеть и предсказывать получаемый результат.

Для обеспечения реализации прогностической функции обучения математике необходимо запланированное и целенаправленное сочетание совокупности таких методов, приемов, форм и средств обучения, которые построены на применении эвристических и развивающих моментов.

Среди методов для обеспечения реализации прогностической функции выделяются методы стимулирования и мотивации учебной деятельности, например, метод акцентирования проблем, методы подачи материала, в частности проблемно-поисковые, методы формирования творческой деятельности.

Применение интерактивных приемов, таких как «Заверши фразу», «Ярмарка идей», «Математические дебаты», «Мозговой штурм», усиливает реализацию прогностической функции математического обучения.

Прием «Заверши фразу» предназначен для проверки знаний студентов по определенной теме или разделу математики. Реализовать указанный прием можно в виде устного математического диктанта, проводимого преподавателем или одним из студентов.

Прием «Ярмарка идей» предназначен для актуализации знаний и генерации идей. Он начинается с постановки проблемы или вопроса. Далее идеи обсуждаются студентами в определенные временные рамки, индивидуально или по группам, после чего создается «банк» идей. Затем происходит общий разбор достоинств и недостатков предложенных решений задачи и выбор наиболее перспективного.

Прием «Математические дебаты» может применяться тогда, когда задача имеет несколько способов решения, а в ходе обсуждения этих решений происходит выяснение, какой из них, например, более рациональный.

Среди форм организации обучения следует выделить проведение таких практических занятий, как «Групповая дискуссия» и «Совещание», а также лекции со «стопами». При проведении практического занятия в форме групповой дискуссии происходит постановка проблем, связанных с предложенными математическими задачами, разрешение возникающих спорных вопросов, обсуждение и принятие к сведению различных вариантов решений задач и способов их применения. Проведение практического занятия в форме совещания предполагает нахождение решения задачи на основе данных, полученных непосредственно от представителей нескольких мини-групп, на которые разбивается вся группа [1].

Лекция со «стопами» – это лекция, при проведении которой происходит диалог преподавателя со студентами. В процессе подготовки лекции преподаватель выбирает от трех до пяти точек остановки изложения материала – например, при доказательстве теоремы или в месте, где возможна типичная ошибка. При проведении лекции после остановки изложения материала лектором задает студентам заранее подготовленный вопрос. После краткой паузы он выслушивает несколько гипотез, предложенных студентами, после чего происходит их обсуждение и выбор верной идеи для решения проблемы.

Таким образом, качественное обеспечение реализации прогностической функции способствует формированию у студентов прогностического мышления, включающего в себя умения собирать информацию, выдвигать гипотезы, строить не только базовые модели при решении задач, но и прогнозировать и интерпретировать получаемые результаты, а также предвидеть возможные последствия выбора принимаемого решения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутома, А. М. К вопросу использования различных форм практических занятий по математике для студентов вузов / А. М. Бутома // Кулешовские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 26–27 апр. 2007 г. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2007. – С. 349–351.

УДК 372.8

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ  
ДЛЯ РАЗВИТИЯ ПРОДУКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

А. М. БУТОМА

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Как известно, обучение математике рассматривается в контексте деятельностного подхода. Это означает, что обучение и развитие студентов происходят только при такой организации учебного процесса, при которой создаются условия для усвоения ими знаний и способов деятельности. Понятие деятельности является одним из основных в педагогике и психологии. Различают репродуктивную и продуктивную деятельность.

Репродуктивная деятельность может быть двух типов. Первый тип (деятельность на уровне узнавания) предполагает, что решение заданий воспроизводится по уже известному образцу (например, вычисление определителей, сложение матриц), и при этом не требуется установление каких-либо логических связей между понятиями.

Второй тип (деятельность на уровне воспроизведения) предполагает, что при воспроизведении информации (решении математических задач) требуется обнаружение логических связей и элементарных аналогий (например, нахождение ранга матрицы, решение систем линейных уравнений).

Продуктивная (или творческая) деятельность предполагает не буквальное повторение ранее усвоенных умений и навыков, а использование усвоенных операций по аналогии на новых учебных заданиях.

Успешность усвоения учебного материала, темп овладения им, прочность и осмысленность знаний зависят как от начального математического потенциала каждого студента, так и от особенностей восприятия, памяти, мыслительной деятельности. Поэтому в процессе обучения математике для развития продуктивной деятельности студентов большое значение имеет принцип дифференциации обучения, согласно которому для повышения его эффективности преподаватель создает комплекс дидактических условий, учитывающих не только

начальный уровень математической подготовки учащихся, но и их способности к обучению, особенности мышления, а также различие индивидуально-творческих и субъективно-личностных способностей [1].

При обучении математике в высшей школе речь идет прежде всего о внутренней дифференциации, т. е. внутригрупповой. Применение вводных тестов в начале семестра позволяет определить начальный уровень знаний каждого студента. И хотя психологические особенности учащихся определяются позже, уже на первых практических занятиях имеет смысл применять дифференцированный подход к обучению.

Основными положениями при этом являются:

- использование разноуровневых систем упражнений на практических занятиях;
- снижение объема фронтальной работы (с обязательным изучением базовых заданий);
- выборочный подход к решению задач (т. е. отказ от обязательного выполнения всеми студентами группы всех заданий);
- предоставление дополнительных заданий студентам с более высоким уровнем знаний;
- наличие заданий, решаемых несколькими способами;
- использование вариативных задач (когда в одной задаче имеется несколько пунктов с различными требованиями к выполнению задания);
- более частый контроль выполнения заданий студентами с более низким уровнем знаний.

Таким образом, применение дифференцированного подхода к обучению позволяет создать оптимальный психологический климат для изучения курса математики, способствуя тем самым развитию продуктивной деятельности каждого студента.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутома А. М.** Дифференциация обучения как средство развития индивидуально-творческих способностей студентов / А. М. Бутома // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – С. 20–21.

УДК 372.851

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАМЕНИТОГО ЗАДАЧНИКА Б. П. ДЕМИДОВИЧА В СИСТЕМЕ ОЛИМПИАДНОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

А. Б. ВАКАЕВА<sup>1,2</sup>, М. Р. БОРТКОВСКАЯ<sup>1</sup>, Л. А. ЛЕВИЦКИЙ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Санкт-Петербург, Россия

При работе со студентами, стремящимися к решению нестандартных задач и участию в математических олимпиадах, преподаватели используют специализированные учебные пособия и сборники олимпиадных задач [1–4], а также материалы, размещенные на официальных сайтах олимпиад. Такие источники позволяют ознакомить студентов с форматом олимпиадных задач, их уровнем сложности и характерными методами решения.

Однако широко известные классические задачки, традиционно применяемые на обычных практических занятиях, также могут служить эффективной основой для олимпиадной подготовки. Особое место среди них занимает «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича [3]. Данный задачник хорошо известен как пособие, содержащее большое количество задач различного уровня сложности, однако его потенциал в контексте олимпиадной подготовки часто недооценивается.

Задачник Б. П. Демидовича [3] содержит значительное число задач, которые по своему характеру близки к олимпиадным: они требуют нетривиального анализа условий, умения выявлять скрытые закономерности, использовать идеи монотонности, ограниченности, предельного перехода и аналогий между различными задачами. Такие задачи не могут быть использованы непосредственно на олимпиадах в силу их широкой известности, однако они полезны для формирования у студентов олимпиадного стиля мышления и отработки ключевых приемов решения.

Проиллюстрируем сказанное на примере одной из типичных сквозных тем олимпиадных задач – нахождения предела последовательности, заданной рекуррентным соотношением. Задачи такого типа регулярно встречаются на студенческих олимпиадах различного уровня и допускают разнообразные подходы: использование монотонности, оценку разностей соседних членов, применение теоремы Штольца, анализ подпоследовательностей и предельного перехода в функциональных соотношениях.

Рассмотрим одну из таких задач, встречавшуюся на студенческой олимпиаде в Казани 2003 г., где требовалось исследовать поведение рекуррентно заданной последовательности (в [1] приведено разобранное решение). Пусть

$x_n = \frac{(n-1)x_{n-1} + x_{n-2}}{n}$  при  $n \geq 2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . Найти предел этой последовательности. Поскольку решение достаточно краткое, приведем его здесь, чтобы использовать в дальнейшем.

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \frac{1}{n(n-1)}(x_{n-2} - x_{n-3}) = \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x_1 - x_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!},$$

тогда

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = x_{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \dots = x_0 + 1 - \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Получаем, что  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \dots$  С другой стороны,

используя ряд Тейлора, получаем  $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots = 1 - x$ , так

что  $x = 1 - \frac{1}{e}$ .

Рассмотрим следующий пример – задачу из олимпиады студентов СПбПУ 2020 г. (решение приведено в [2]). В задаче исследуется последовательность, заданная рекуррентным соотношением  $x_n = 1 - x_{n-1}^2$ , и требуется найти пределы ее четной и нечетной подпоследовательностей в зависимости от начального значения. Вначале рассматривается частный случай, при котором все члены последовательности совпадают. Это приводит к исследованию алгебраического уравнения, решения которого определяют возможные постоянные значения последовательности. Далее показано, что среди этих решений существует единственное, лежащее в рассматриваемом промежутке, – именно оно соответствует существованию общего предела.

В общем случае вводится подпоследовательность, состоящая из членов с нечетными индексами. Для данной подпоследовательности устанавливаются ограниченность и монотонность. Основным инструментом при этом является анализ поведения вспомогательной функции, определяющей рекуррентное соотношение, а также исследование знака разности соседних членов подпоследовательности – это позволяет доказать существование конечного предела. Далее, используя связь между четными и нечетными членами исходной последовательности, находятся пределы обеих подпоследовательностей.

Аналогичные идеи лежат в основе ряда задач из [3]. В частности, в задаче № 637.4 требуется исследовать поведение рекуррентной последовательности с использованием анализа вспомогательных выражений и свойств монотонности.

$$x_0 = 1; \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}. \quad (1)$$

Если докажем, что существует конечный предел  $x_n$ , то, переходя к пределу в равенстве (1), этот предел будет найден. Заметим, что для любого  $n$  справедливо  $x_n > 0$ . Исследуем монотонность данной последовательности:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1 - x_{n-1} - x_{n-1}^2}{1 + x_{n-1}} = -\frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} - 1}{1 + x_{n-1}}.$$

Квадратный трехчлен в числителе имеет корни  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Выделяя четную и нечетную подпоследовательности, проверяем при помощи метода математической индукции, что четная подпоследовательность строго убывает, а нечетная – возрастает. В результате простых математических выкладок получим, что обе подпоследовательности с разных сторон стремятся к конечному пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ . Как видим, по своей идейной структуре данная задача близка к рассмотренному выше алгоритму решения и может использоваться как эффективный тренировочный материал при подготовке к решению олимпиадных задач подобного типа. Это лишь один пример в рамках конкретной темы; при этом в каждом разделе знаменитого задачника [3], наряду с типовыми задачами разной сложности, можно найти целую россыпь такого рода «типичных», но не типовых олимпиадных задач.

Согласимся с автором пособия [4], утверждающим, что «любой достаточно большой массив нестандартных задач можно проклассифицировать, выделив в нем типичные черты».

Таким образом, [3] может рассматриваться не только как классическое учебное пособие, но и как эффективный инструмент олимпиадной подготовки студентов. Его использование в рамках олимпиадных кружков и факультативов позволяет наработать навыки решения нестандартных задач и чувство аналогий. Тем самым задачник [3] позволяет органично сочетать углубленное изучение математического анализа с развитием нестандартного мышления, необходимого для успешного участия в математических олимпиадах.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Григорьева, И. С.** Казанские студенческие олимпиады по математике. Сборник задач : учеб.-метод. пособие / И. С. Григорьева. – Казань : Казан. ун-т, 2011. – 48 с.
2. Математика. Задачи студенческих олимпиад СПбПУ по математике : учеб. пособие / В. И. Антонов, М. Р. Бортковская, А. В. Одинцов, А. В. Ястребов. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 129 с.
3. **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие / Б. П. Демидович. – М. : АСТ ; Астрель, 2010. – 558 с.
4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики : учеб. пособие / И. Ю. Попов. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.

УДК 372.851

## УЧАСТИЕ В СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

А. Б. ВАКАЕВА<sup>1,2</sup>, М. Р. БОРТКОВСКАЯ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Санкт-Петербург, Россия

За последние годы студенческие олимпиады по естественным и точным наукам стали рассматриваться не только как форма выявления наиболее способных обучающихся, но и как важный элемент образовательной среды, позволяющий развивать профессиональные и личностные компетенции. В связи с этим интерес представляет анализ опыта, полученного участниками олимпиад: насколько они считают его полезным и в каком направлении возможно усовершенствование олимпиадного движения.

Целью статьи является анализ влияния участия в студенческих олимпиадах на образовательное, профессиональное и личностное развитие студентов по результатам анкетирования непосредственных участников. Исследование проводилось в форме анонимного опроса студентов бакалавриата и магистратуры Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, имеющих опыт участия в олимпиадах по математике и физике. Анкета включала вопросы, направленные на выявление изменений в профессиональных контактах, оценку приобретенных знаний и навыков, карьерные перспективы, а также отношение к олимпиадному опыту и открытый вопрос с предложениями по улучшению формата проведения олимпиад.

### **Расширение профессиональных контактов.**

Одним из важных аспектов участия в олимпиадах является формирование и расширение профессионального круга общения. Результаты проведенного опроса показали, что большинство респондентов незначительно расширили свой круг профессиональных знакомств (1–4 контакта). Тем не менее часть опрошенных отметили существенное расширение – более 10 новых контактов. Следует отметить, что зачастую разброс по новым контактам связан, в том числе, с возрастом и курсом обучающихся: чем старше и опытнее студент, тем проще ему заводить новые контакты посредством участия в олимпиадах. В то же время студенты младших курсов только начинают опыт олимпиадного взаимодействия и предпочли выбрать ответ, где круг контактов практически не изменился. Анализ также показал, что новые знакомства чаще всего возникали среди самих студентов. Практически все опрошенные указали на наличие контактов с другими студентами-участниками олимпиад. Почти половина респондентов отметили появление контактов с теми, кто чаще всего сопровождал

ет команды на олимпиадах и занимается подготовкой участников – аспирантами и преподавателями вузов. При этом контакты с представителями других вузов отмечены у большей части опрошенных (46,2 %). Вдвое меньше опрошенных установили контакты с участниками из других городов и регионов России, и примерно столько же – с участниками из других стран. Таким образом, олимпиады в ряде случаев способствуют выходу студентов за рамки собственного вуза, формированию межвузовских и межрегиональных связей, хотя для части опрошенных этот опыт остается ограниченным.

#### **Польза новых контактов и нематериальные эффекты.**

Отвечая на вопрос о практической пользе новых знакомств, респонденты чаще всего (69,2 %) отмечали личностное развитие и расширение кругозора. Более половины опрошенных указали на возможность обмена учебными материалами и опытом подготовки. Часть студентов (38,5 %) отметили совместную подготовку к олимпиадам и экзаменам. Значительно реже упоминались участие в научных проектах (7,7 %) и получение информации о стажировках, грантах или других научных мероприятиях (15,4 %). При этом 15,4 % опрошенных указали, что новые знакомства пока не принесли им практической пользы. Тем самым можно сделать вывод, что участие в олимпиадах в первую очередь воспринимается студентами как пространство для интеллектуального и личностного общения и в меньшей степени как инструмент для карьерного продвижения.

#### **Влияние олимпиад на уровень знаний и формирование навыков.**

Значительная часть опрошенных (53,8 %) отметила положительное влияние олимпиад на их уровень знаний по профильным дисциплинам. Существенное повышение уровня знаний указала треть респондентов, еще чуть больше половины сочли повышение умеренным. Тем не менее, были и те (7,7 %), кто посчитал, что участие в олимпиадах не оказало заметного влияния на уровень знаний. Анализ ответов о сформированных навыках показывает, что наибольшее развитие связано с решением именно олимпиадных задач. Так, две трети опрошенных отмечают развитие навыков умения решения нестандартных задач и улучшение навыков работы в условиях ограниченного времени. Более половины также указали на развитие навыков самостоятельной подготовки и углубленное понимание теоретического материала. В то же время навыки коммуникации, командной работы и уверенность в профессиональных компетенциях отмечались существенно реже. Данный факт может свидетельствовать о том, что традиционный формат индивидуальных олимпиад в меньшей степени способствует развитию коммуникативных компетенций, чем командные соревнования.

#### **Карьерные перспективы и практическое использование олимпиадного опыта.**

Большинство респондентов положительно оценивают влияние участия в олимпиадах на свои карьерные перспективы. Так, половина опрошенных считают, что олимпиады повышают их карьерные возможности, и треть склоняются к

тому, что это повышение существенно. Вновь отметим наличие тех, кто выражает сомнение в значимости олимпиадного опыта для карьеры. Практическое использование результатов участия носит разнообразный характер. Около трети участников уже использовали этот опыт при составлении резюме или портфолио, подаче заявок на гранты и стипендии, а также при поступлении в магистратуру или аспирантуру. При этом почти половина опрошенных пока не использовали данный опыт, но планируют сделать это в будущем. Возможно, полученные результаты также связаны с разной выборкой по годам обучения [1].

### **Общая удовлетворенность и направления для улучшения.**

Отметим, что общая удовлетворенность опытом участия в олимпиадах является высокой. Более половины респондентов оценили свой опыт на четыре или пять баллов по пятибалльной шкале. Низкие оценки встречались крайне редко. В ответах на открытый вопрос о возможных направлениях улучшения организации олимпиад респонденты отметили несколько ключевых аспектов:

- необходимость повышения прозрачности проверки работ и процедуры апелляции;
- расширение тематики олимпиад за счет отдельных разделов дисциплин;
- важность включения олимпиад в официальные региональные и всероссийские перечни, что позволит учитывать достижения студентов при подаче заявок на гранты и стипендии;
- значимость предоставления участникам материалов для целенаправленной подготовки к конкретным этапам олимпиад.

Подводя итог, результаты проведенного анкетирования показывают, что участие в студенческих олимпиадах воспринимается студентами как полезный и значимый опыт. Олимпиады способствуют развитию предметных знаний, формированию навыков решения нестандартных задач и самостоятельной подготовки, а также расширяют профессиональный круг общения. Выявленное в ходе опроса положительное влияние участия в олимпиадах на мотивацию и удовлетворенность обучением подтверждается результатами эмпирических исследований. Показано, что студенты-победители олимпиад обладают более устойчивой учебной мотивацией и выраженной ориентацией на достижение по сравнению со студентами с иными типами академических достижений [2], что согласуется с современными исследованиями образовательных траекторий студентов-олимпиадников [3]. Вместе с тем выявленные замечания и предложения указывают на интерес и потенциал дальнейшего совершенствования формата олимпиад и повышения их практической значимости для студентов.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Особенности образовательных траекторий и профессиональных планов студентов, поступивших в вуз по результатам олимпиад школьников / И. А. Алешковский, А. Т. Гаспа-

ришвили, О. В. Крухмалева [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия : Социология. – 2025. – Т. 25, № 2. – С. 322–343.

2. Гордеева, Т. О. Особенности мотивации достижения и учебной мотивации студентов, демонстрирующих разные типы академических достижений (ЕГЭ, победы в олимпиадах, академическая успеваемость) / Т. О. Гордеева, Е. Н. Осин // Психологические исследования. – 2012. – Т. 5, № 24. – С. 4.

3. Трудности интеграции как причина отсева студентов-победителей олимпиад / Е. В. Горбунова, Е. В. Маюкова, Е. В. Овакимян [и др.] // Вопросы образования / Educational Studies Moscow. – 2024. – № 4. – С. 33–60.

УДК 378.1:517

## ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: СТРУКТУРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАК МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПОИСКА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого  
Гомель, Беларусь

Воображение важнее, чем знание.  
А. Эйнштейн

Целью теории решения задач (ТРЗ) является исследование закономерностей процесса поиска решения задач (ППРЗ) с последующей их формализацией. В [1] представлена новая формализация ППРЗ, которую я называю структурная схема решения задач (ССРЗ). Действие ССРЗ в [1] проиллюстрировано на простых примерах. В статье продолжены исследования, начатые в [1]. В частности, показано, как работает ССРЗ в более сложных ситуациях.

**Задача 1.** В треугольной пирамиде  $SABC$  (рис. 1) все плоские углы при вершине  $S$  прямые,  $SO$  – высота пирамиды. Известно, что отношение площади  $\triangle AOB$  к площади  $\triangle BOC$  равно 49. Найдите отношение площади  $\triangle ASB$  к площади  $\triangle BSC$ .

*Решение*

Условимся в следующем: треугольные пирамиды с тремя прямыми плоскими углами при вершине  $S$  будем называть прямоугольными.

Сразу понятно, что объекты, между которыми следует установить связь, – это  $\triangle AOB$  и  $\triangle ASB$ , а также  $\triangle BOC$  и  $\triangle BSC$ . Качественная связь между указанными парами треугольников известна:  $\triangle AOB$  является ортогональной

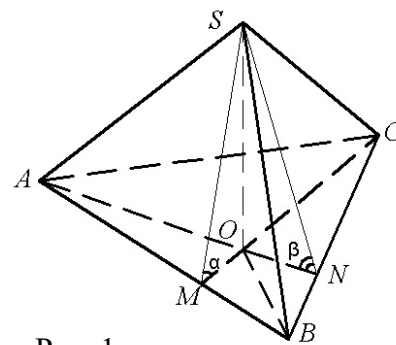


Рис. 1

проекцией  $\Delta ASB$  на плоскость  $ABC$ , а  $\Delta BOC$  – проекция  $\Delta BSC$  на ту же плоскость  $ABC$ . Но нам нужно количественное соотношение между ними. Ничего не остается как «прогуляться» в информационную базу задачи (ИБЗ) и поискать там нужный инструмент-факт. К счастью, таковой имеется:

– **лемма 1** (о площади ортогональной проекции). Площадь проекции плоской фигуры равна площади самой этой фигуры, умноженной на абсолютную величину косинуса двугранного угла между плоскостями.

Увы, для дальнейшего продвижения леммы 1 недостаточно: нам потребуется еще один факт, которого, по-видимому, в стандартной ИБЗ нет;

– **лемма 2**. В прямоугольной пирамиде вершина пирамиды проектируется в ортоцентр основания.

*Доказательство.* Пусть  $CM$  – высота  $\Delta ABC$ , опущенная на сторону  $AB$ . Соединим точки  $S$  и  $M$ . Поскольку  $CS \perp (ASB)$  (это сразу вытекает из того, что пирамида прямоугольная), то  $SM$  есть проекция  $CM$  на плоскость  $ASB$ . По теореме о трех перпендикулярах  $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp SM \Rightarrow AB \perp (SCM)$ . Значит,  $(ABC) \perp (SCM)$ , ибо плоскость  $ABC$  проходит через перпендикуляр  $AB$  к плоскости  $SCM$ . Опустим теперь из вершины  $S$  перпендикуляр  $SO$  на плоскость основания. Из факта  $(ABC) \perp (SCM)$  следует, что этот перпендикуляр целиком принадлежит плоскости  $SCM$ , т. е. точка  $O$  находится на высоте  $CM$  основания. Дальнейшее очевидно.

Этап 1.

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ASB} \cos \alpha; \quad (1)$$

$$S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BSC} \cos \beta. \quad (2)$$

Этап 2.

$$S_{\Delta ASB} = S_{\Delta ABC} \cos \alpha; \quad (3)$$

$$S_{\Delta BSC} = S_{\Delta ABC} \cos \beta. \quad (4)$$

Этап 3.

$$\text{Из (1) и (3)} \Rightarrow S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABC} \cos^2 \alpha. \quad (5)$$

$$\text{Из (2) и (4)} \Rightarrow S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} \cos^2 \beta. \quad (6)$$

Разделив (5) на (6), получим

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 = 49 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 7. \quad (7)$$

Из (3), (4), (7) окончательно имеем

$$\frac{S_{\Delta ASB}}{S_{\Delta BSC}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 7.$$

*Замечание.* При решении этой задачи фактически использовали так называемый принцип «наоборот» (см. [3, с. 87], принцип № 13), причем он является ключевым моментом в ППРЗ. Действительно, стандартной для нас является ситуация, когда боковые грани пирамиды проектируются с помощью высоты на ее основание. Оказалось, что для прямоугольной пирамиды каждая боковая грань является ортогональной проекцией основания пирамиды.

**Задача 2.** Дан  $\triangle ABC$  единичной площади (рис. 2 и 3). На его сторонах выбраны точки  $K, L, M$  так, что  $AK = 1/4AB$ ,  $BL = 1/4BC$ ,  $CM = 1/4CA$ . Отрезки  $CK$  и  $AL$  пересекаются в точке  $P$ ,  $BM$  и  $AL$  – в точке  $Q$ ,  $CK$  и  $BM$  – в точке  $R$ . Найти площадь  $\triangle PQR$ .

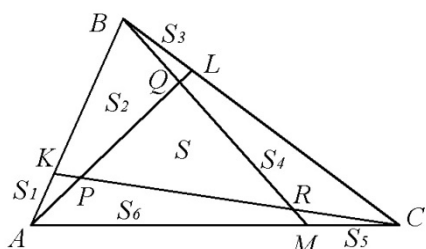


Рис. 2

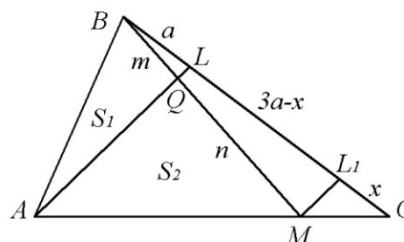


Рис. 3

### Решение

Этап 1. Рассмотрим типичный фрагмент конфигурации, присутствующий в нашей задаче. Из точки  $M$  проведем прямую, параллельную  $AL$ , и пусть  $L_1$  – точка пересечения этой прямой с отрезком  $BC$ . Пусть  $BL = a$ . Тогда  $LC = 3a$ . Пусть  $CL_1 = x$ . Тогда  $LL_1 = 3a - x$ . По обобщенной теореме Фалеса имеем

$$\frac{x}{3a - x} = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{3}; \quad 3x = 3a - x \Rightarrow 4x = 3a \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

Пусть  $BQ = m$ ,  $MQ = n$ . Тогда по той же теореме имеем

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{a}{3a - x}; \\ x = \frac{3a}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{3a - \frac{3a}{4}} = \frac{4}{9}.$$

Далее приходим к системе

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{3}{4}; \\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{3}{4} \\ 9S_1 = 4S_2 \end{cases} \Rightarrow 9S_1 = 4\left(\frac{3}{4} - S_1\right) \Rightarrow 13S_1 = 3 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{13}.$$

$$S_{\Delta BQL} = S_{\Delta ABL} - S_{\Delta BAQ} = \frac{1}{4} - S_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{13} = \frac{1}{52}.$$

Этап 2. Поскольку в нашей конфигурации присутствует круговая (циклическая) симметрия, то площади всех «малышей» равны между собой и равны  $\frac{1}{52}$ , т. е.  $S_{\Delta BQL} = S_{\Delta CRM} = S_{\Delta AKP} = \frac{1}{52}$ .

Далее имеем

$$S_{\Delta ABL} = \frac{1}{4} \cdot 1 = S_1 + S_2 + S_3; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{52} \cdot 2 + S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{11}{52}.$$

Легко видеть (симметрия), что  $S_2 = S_4 = S_6 = \frac{11}{52}$ . Окончательно получаем

$$S + 3S_2 + 3S_3 = 1 \Rightarrow S + 3 \cdot \frac{11}{52} + 3 \cdot \frac{1}{52} = 1 \Rightarrow S = \frac{4}{13}.$$

*Комментарии.*

1. В литературе имеется другой подход к решению задачи 2 [4, с. 389, 391, 392].

2. Решение приведенных в статье задач по моей просьбе осуществил старший преподаватель кафедры Н. Н. Бородин, за что хочу ему выразить искреннюю благодарность.

3. ССРЗ будем называть некоторую совокупность структурных единиц, объединенных общей целью достижения ТКР и соединенных последовательно или параллельно.

Теперь поговорим о строении самой структурной единицы. Она включает четыре элемента (в авторской терминологии): объект, челнок, стрела, мешок (рис. 4):

а)  $t_1, t_2, \dots$  – инструменты (объекты-посредники);

б) 1, 2, 3, 4 – базовые объекты;

в)  $I_1, I_2, \dots$  – информация (удобно представлять, что мы складываем ее в мешки).

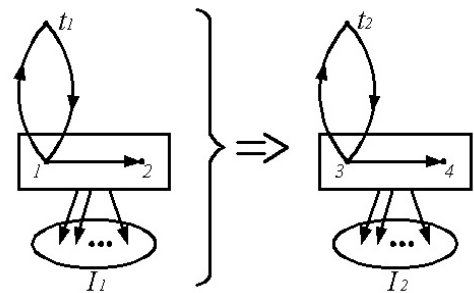


Рис. 4

Детальный анализ приведенных решений задач с позиций ССРЗ предоставляется читателю (алгоритм см. в [1]).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: структурная схема решения задач и другие смежные вопросы / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 31 окт. 2025 г. – Гомель : БелГУТ, 2025. – С. 65–69.
2. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач : новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков : студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.
3. **Альтшуллер, Г. С.** Творчество как точная наука / Г. С. Альтшуллер. – М. : Совет. радио, 1976. – 175 с.
4. **Подгорная, И. И.** Уроки математики : учеб. пособие для поступающих в вузы / И. И. Подгорная. – М. : Моск. лицей, 2006. – 692 с.

УДК 372.851

ПОДГОТОВКА ЗАДАЧ МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЫ  
RUDN MATH OLYMP – 2025

В. И. ВОЙТИЦКИЙ

Математический институт

Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы  
Москва, Россия

Международная студенческая олимпиада по математике RUDN Math Olymp проводится в Российском университете дружбы народов с 2023 г. Олимпиада состоит из индивидуального и командного туров. Особенностью олимпиады является то, что командный тур проходит в виде турнира математических боев, где в играх участвуют тройки команд с дополнительной ролью наблюдателей (см. правила на официальном сайте *math-battle-ru-2025.pdf*). Девять сильнейших команд образуют три полуфинальные тройки. Команда-победитель из каждой тройки выходит в открытый суперфинал, который является ярким завершением олимпиады. Остальные сборные одновременно с полуфиналом участвуют в дружеских играх. Абсолютные победители индивидуального и командного туров получают денежные призы от спонсоров олимпиады и льготы на продолжение учебы в РУДН.

Описанная специфика олимпиады накладывает определенную ответственность и специфику при составлении задач индивидуального и командного туров. В последние годы индивидуальный тур состоит из шести разноплановых задач (задачи индивидуального тура RMO-2024 доступны для скачивания по ссылке <https://math-olymp.rudn.ru/doc/individual-criteria-2024.pdf>).

Подбор задач индивидуального тура является наиболее трудоемким и сложным этапом в организации международной олимпиады. Можно выделить пять основных принципов, которыми руководствовалась группа по подготовке задач RMO-2025. На наш взгляд, все эти факторы являются необходимыми условиями удачной подборки заданий студенческой олимпиады.

1. Задания должны быть, по возможности, авторскими и новыми, чтобы исключить известные задачи, которые часто дублируются в различных задачниках.

2. Несколько задач должны быть существенно сложными (в идейном или техническом плане), чтобы выявить наиболее достойных абсолютных победителей олимпиады.

3. Олимпиада должна содержать не очень сложные задачи, практически школьного уровня, чтобы проявить себя смогли различные участники, в том числе первокурсники.

4. Олимпиада должна содержать задания по разным математическим дисциплинам, чтобы раскрыть талант студентов, имеющих разные виды мышления.

5. Задания должны быть достаточны интересными, чтобы студенты могли мотивировать себя на освоение дополнительной информации и самостоятельный научный поиск.

В 2025 г. было предложено шесть авторских задач по следующим темам (в порядке следования).

1. Функциональное уравнение.
2. Коммутируемость матриц.
3. Стереометрия.
4. Теория чисел и определители.
5. Поведение решений дифференциального уравнения.
6. Свойства повторных интегралов.

Задачи были условно упорядочены по возрастанию сложности. Наиболее простые задачи (первая и вторая) были доступны первокурсникам, и их решили многие участники. Остальные задачи оказались гораздо более трудоемкими. Отдельные студенты справились с решением третьей, четвертой и шестой задач. Пятую задачу полностью не удалось решить ни одному участнику. Сформулируем ее условие (предложена И. В. Асташовой).

Пусть  $y(x)$  и  $z(x)$  – заданные в левой полукрестности нуля и стремящиеся при  $x \rightarrow -0$  к  $+\infty$  решения, соответственно, уравнений  $y^{(20)}(x) = y^{25}(x)$  и  $z^{(20)}(x) = z^{25}(x)$ .

1. Вычислите значение предела  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\ln y(x)}{\ln z(x)}$  для некоторых частных решений.
2. Найдите все возможные значения этого предела.

Оказывается, что частными решениями здесь являются степенные функции  $y(x) = c(-x)^{\frac{5}{6}}$ ,  $z(x) = d(-x)^{\frac{25}{19}}$  при некоторых числах  $c$  и  $d$ . Непосредственная подстановка приводит к ответу  $\frac{19}{30}$ . Других значений предела здесь не возникает, что доказать достаточно трудно.

При оценивании решения каждой задачи олимпиады РМО используется 10-балльная шкала. Абсолютный победитель РМО-2025 (студент МФТИ) набрал 43 балла из 60 возможных. Критерии оценки каждой задачи окончательно формулируются в процессе проверки работ участников олимпиады. Например, в пятой задаче за первый пункт можно получить до трех баллов (за обоснование вида частных решений и найденную величину предела), за второй пункт – до 7 баллов, из которых 3 балла даются за доказательство того, что каждое решение имеет производные, стремящиеся к бесконечности при  $x \rightarrow -0$ . Такая накопительная система оценивания используется довольно часто.

В командном туре задачи имеют несколько иную специфику. Так как параллельно с полуфиналами те же задачи разбирают все команды-участники, то уровень сложности полуфинальных задач является средним. Задачи выбираются с учетом «подводных камней», чтобы докладчик оставлял место для коварных вопросов оппонента. На наш общий взгляд, умение доказывать и отстаивать свою точку зрения, презентовать решение, вести полемику не менее важно, чем умение оформлять решения сложных задач. Именно этими факторами объясняется выбор командного соревнования в виде математического боя.

Например, в полуфинале РМО-2025 была предложена следующая задача (предложена Л. Е. Россовским).

*Непрерывная функция  $f: R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  удовлетворяет уравнению  $f(f(x)) = x^2 - x + \frac{3}{4}$ ,  $x \neq \frac{1}{2}$ . Найдите  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ .*

Несмотря на кажущуюся простоту, в этой задаче существенно используется то, что функция не определена в точке  $x = \frac{1}{2}$  (на самом деле функция имеет в ней вертикальную асимптоту). Правильный ответ в задаче  $\frac{3}{2}$ , по ходу решения возникает постороннее значение  $-\frac{1}{2}$ .

В финальном бое предлагаются более сложные задачи, предполагающие проведение маленького исследования. В финале РМО-2025 была предложена следующая задача (предложена В. И. Войтицким).

Описать все упорядоченные четверки действительных чисел  $a, b, c, d$ , для которых дробно-линейное рекуррентное преобразование  $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$  является периодическим для всех  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ . Как определить длину периода? В каком случае период равен двум, т. е.  $x_{n+2} \equiv x_n$ ?

В этой задаче непосредственной подстановкой можно установить, что период равен двум лишь в случае  $a + d = 0$ . Общее решение существенно опирается на свойства собственных значений матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , а также на использование экспоненциальной формы записи комплексных чисел. Период в этой задаче может быть любой длины  $L$  в случае, если  $\frac{(a+d)^2}{ad-bc} = 4 \cos^2\left(\frac{\pi K}{L}\right)$  при натуральных  $K$  и  $L$ .

Подводя итог вышесказанному, можно отметить, что подбор задач международной олимпиады требует значительных методических усилий и командной работы в связи с большим числом предъявляемых к задачам требований. Кроме 6 задач индивидуального тура и 10 задач для математических боев, подбирается около 15 простых задач для конкурса капитанов и возможных блиц-раундов, которые нужно решить за 2–3 мин. Весь этот большой набор задач подбирает команда из 8–10 человек более чем за 3 месяца.

УДК 378.147

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова  
Могилев, Беларусь

Фрагменты курса математической логики неявно присутствуют в любом курсе математики: в формулировках теорем используются кванторы, по закону контрапозиции формулируются следствия теорем, многие математические факты уточняются с использованием как прямых, так и обратных теорем. При этом учебные планы некоторых специальностей университета предусматривают изучение либо отдельного курса математической логики, либо ее раздела в рамках курса дискретной математики – правда, в условиях небольшого количества

аудиторных занятий. Один из центральных разделов математической логики – булева алгебра. Главные навыки, которые должны сформироваться у студента при изучении этого раздела, – научиться упрощать и(или) устанавливать эквивалентность логических формул. Одним из способов решения указанных задач является составление таблиц истинности. Представляется целесообразным при составлении таких таблиц использовать возможности систем компьютерной математики (СКМ).

Поддержка работы с булевыми переменными – отличительная особенность современных СКМ. Причем эта поддержка касается как численных, так и символьных вычислений и преобразований. Изложение вышесказанного проиллюстрируем с использованием СКМ Smath Studio [1]. Выбор именно этой СКМ обоснован, например, в [2].

Как известно, булева функция  $n$  переменных имеет  $2^n$  различных комбинаций аргументов и существует  $2^{2^n}$  различных булевых функций  $n$  переменных. При  $n = 2$ , соответственно, четыре различных набора аргументов и 16 различных булевых функций. Часть булевых функций являются встроенными в систему и могут быть вызваны с панели «Булева». Определим недостающие до полного списка из 16 функций как пользовательские (рис. 1) и для контроля выведем в виде таблицы расчётные значения их полного списка (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 x &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tab}_{1j} := 0 \quad \text{tab}_{2j} := x_{1j} \wedge x_{2j} \quad \text{tab}_{3j} := (x_{1j} \wedge \neg x_{2j}) \quad \text{tab}_{4j} := x_{1j} \\
 \text{tab}_{5j} &:= (x_{2j} \wedge \neg x_{1j}) \quad \text{tab}_{6j} := x_{2j} \quad \text{tab}_{7j} := x_{1j} \oplus x_{2j} \quad \text{tab}_{8j} := x_{1j} \vee x_{2j} \\
 \text{tab}_{9j} &:= \neg(x_{1j} \vee x_{2j}) \quad \text{tab}_{10j} := x_{1j} = x_{2j} \quad \text{tab}_{11j} := \neg x_{2j} \quad \text{tab}_{12j} := ((\neg x_{2j}) \vee x_{1j}) \\
 \text{tab}_{13j} &:= \neg x_{1j} \quad \text{tab}_{14j} := (\neg x_{1j} \vee x_{2j}) \quad \text{tab}_{15j} := \neg(x_{1j} \wedge x_{2j}) \quad \text{tab}_{16j} := 1
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Наборы переменных и определение булевых функций

$$\text{stack}(x; \text{tab})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Наборы булевых переменных и векторы значений всех булевых функций двух переменных

Для удобства обращения к отдельной функции удобно ввести идентификатор, переключаящийся с устоявшимся названием функции (рис. 3). Для кратко-

сти также удобно, чтобы все функции имели одно обозначение  $F$ , а различались по номеру  $F_i$  (как координаты одного вектора).

$$\begin{array}{c}
 f\_FALSE'(x1; x2) \\
 f\_AND'(x1; x2) \\
 f\_coimpl\_left'(x1; x2) \\
 f\_arg\_1'(x1; x2) \\
 f\_coimpl\_right'(x1; x2) \\
 f\_arg\_2'(x1; x2) \\
 f\_XOR'(x1; x2) \\
 f\_OR(x1; x2) \\
 f\_Pirs\_NOR'(x1; x2) \\
 f\_equival\_XNOR'(x1; x2) \\
 f\_not\_arg2(x1; x2) \\
 f\_imlic\_right(x1; x2) \\
 f\_not\_arg1(x1; x2) \\
 f\_imlic\_left(x1; x2) \\
 f\_Sheffer\_NAND'(x1; x2) \\
 f\_TRUE'(x1; x2)
 \end{array}
 :=
 \begin{array}{c}
 0 \\
 x1 \wedge x2 \\
 x1 \wedge \neg x2 \\
 x1 \\
 x2 \wedge (\neg x1) \\
 x2 \\
 x1 \oplus x2 \\
 x1 \vee x2 \\
 \neg(x1 \vee x2) \\
 x1 = x2 \\
 \neg x2 \\
 (\neg x2) \vee x1 \\
 \neg x1 \\
 (\neg x1) \vee x2 \\
 \neg(x1 \wedge x2) \\
 1
 \end{array}
 F(x1; x2) :=
 \begin{array}{c}
 f\_FALSE'(x1; x2) \\
 f\_AND'(x1; x2) \\
 f\_coimpl\_left'(x1; x2) \\
 f\_arg\_1'(x1; x2) \\
 f\_coimpl\_right'(x1; x2) \\
 f\_arg\_2'(x1; x2) \\
 f\_XOR'(x1; x2) \\
 f\_OR(x1; x2) \\
 f\_Pirs\_NOR'(x1; x2) \\
 f\_equival\_XNOR'(x1; x2) \\
 f\_not\_arg2(x1; x2) \\
 f\_imlic\_right(x1; x2) \\
 f\_not\_arg1(x1; x2) \\
 f\_imlic\_left(x1; x2) \\
 f\_Sheffer\_NAND'(x1; x2) \\
 f\_TRUE'(x1; x2)
 \end{array}$$

Рис. 3. Идентификация булевых функций двух переменных

Для работы с булевыми функциями трех переменных учтем новую область определения – восемь трехкоординатных наборов (понадобятся и их отрицания), структурированных в виде вектор-столбцов (рис. 4), и снабдим описание введенных выше функций комментариями (рис. 5).

$$X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\neg X1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\neg X2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\neg X3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 4. Область определения булевых функций трех переменных

Теперь легко можно построить вектор значений произвольной булевой функции трех переменных. Проиллюстрируем сказанное конкретными вычислениями. Построим вектор значений булевой функции  $\overline{(x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)}$  (рис. 6).

$SPISOK(x1; x2) =$	0	0	"тождественный ноль"
	1	$x1 \wedge x2$	"конъюнкция"
	2	$x1 \wedge \neg x2$	"коимпликация левая"
	3	$x1$	"дублирование $x1$ "
	4	$x2 \wedge \neg x1$	"коимпликация правая"
	5	$x2$	"дублирование $x2$ "
	6	$x1 \oplus x2$	"исключающее или"
	7	$x1 \vee x2$	"дизъюнкция"
	8	$\neg(x1 \vee x2)$	"стрелка Пирса или эл. Вебба"
	9	$x1 = x2$	"эквивалентность"
	10	$\neg x2$	"не $x2$ "
	11	$\neg x2 \vee x1$	"импликация прав"
	12	$\neg x1$	"не $x1$ "
	13	$\neg x1 \vee x2$	"импликация лев"
	14	$\neg(x1 \wedge x2)$	"штрих Шеффера"
15	1	"тождественная единица"	

Рис. 5. Список булевых функций двух переменных с комментариями

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\neg(x1 \vee x2)} \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow{x1 = x3}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow{\neg(x1 \vee x2) \vee x1 = x3}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow{\neg\neg(x1 \vee x2) \vee x1 = x3}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 6. Вычисление вектора значений конкретной булевой функции трех переменных

При расчетах необходимо использовать встроенную функцию векторизации (стрелочка сверху). Операция векторизации распространяет однотипные действия логических операций над отдельными координатами на все координаты векторов. Очевидно, что предложенная техника работы может быть распространена и на функции с большим числом переменных.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт программы SMath Studio. – URL: <https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме>.

2. **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февр. 2021 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2021. – С. 35–37.

УДК 519.2

## ИЗУЧЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В МАГИСТРАТУРЕ

Е. Н. ДИК, С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Э. Ф. МУРЗИНА  
Башкирский государственный аграрный университет  
Уфа, Россия

По программе магистратуры 08.04.01 «Строительство, механика грунтов, геотехника и геоэкология» в обязательной части изучается предмет «Специальные разделы высшей математики». Необходимость освоить общепрофессиональную компетенцию – решение задач профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ и математического аппарата фундаментальных наук – требует выбрать раздел высшей математики для изучения. В силу того, что обучение имеет прикладной, практико-ориентированный характер, в работе рассмотрен статистический метод моделирования технологических процессов с использованием таких математических методов, как метод потенциалов и метод критериальной оценки показателей [1].

На современном этапе реализация специальных дисциплин происходит в сочетании с цифровым форматом образовательных технологий на кафедре математики. Цифровой образовательный контент (электронные учебники, образовательные сайты, медиаприложения) и образовательные коммуникационные сети (система связи между обучающимися, преподавателями через различные платформы и интернет-ресурсы) представлены в единой системе – электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Башкирского ГАУ. На рис. 1 демонстрируется элемент системы связи между преподавателем и студентом в ЭИОС.


Читаемый специальный раздел математики для решения производственных задач рассматривает метод корреляционного анализа. Этот метод позволяет оценивать динамический процесс связи производственных величин, учитывать изменения параметров и характеристик, а также прогнозировать взаимосвязи основных показателей предприятия и его подразделений. Выполнение магистерской диссертации, внедрение ее результатов в технологии производ-

ства обуславливает актуальность выбранного специального раздела математики в направлении обучения магистратуры [2].


### Специальные разделы высшей математики I (25-26)

1 сентября - 7 сентября

#### 1 учебная неделя

 02.09.2025(10.20-11.55) Лекция № 1. Первичная обработка результатов измерений. Точечные и интервальные оценки 443.4Кбайт документ PDF  
Загружено 10/10/25, 18:55

Сделать конспект лекции по представленному материалу и прикрепить в пункт "Задания по лекции № 1"


 Задание по лекции № 1

8 сентября - 14 сентября

#### 2 учебная неделя


 09.09.2025 (12.55-14.30) Практическое занятие по теме: Понятие выборочной совокупности 220.6Кбайт документ PDF Загружено 10/10/25, 20:08

Решить задачи № 1-5 и прикрепить в пункт "Задания к ПЗ № 1"

 Задание к ПЗ № 1

15 сентября - 21 сентября

#### 3 учебная неделя

 16.09.2025 (12.55-14.30) Практическое занятие по теме: Точечные и интервальные оценки. Часть 1. 213.8Кбайт документ PDF Загружено 10/10/25, 19:04

Решить задачи № 1-5 и прикрепить в пункт "Задания к ПЗ № 2"


 Задание к ПЗ № 2

Рис. 1. Цифровой элемент связи преподавателя и студента

Магистрантам предлагается ряд задач для самостоятельной работы на исследование следующих зависимостей: между пористостью и газонасыщенностью пород; между объемом разрушенной породы и глубиной внедрения зуба; между скоростью бурения в твердых породах и нагрузкой на долото; между дебитом скважины и диаметром штуцера; между скоростью резания и площадью поперечного сечения стружки при обработке стали. Решение задач сопровождается использованием цифровых технических и программных средств (Mathcad, Excel) в учебном процессе. Построение математической модели сопровождается определением надежности коэффициента корреляции, расчетом коэффициента детерминации, применением критерия Фишера для проверки адекватности модели, оценкой величин погрешности как самого уравнения, так и его коэффициентов.

Например, корреляционная зависимость результативного признака  $Y$  (ежемесячная стоимость технического обслуживания) от факторного признака  $X$  (пробег автомобилей) представлена на рис. 2.

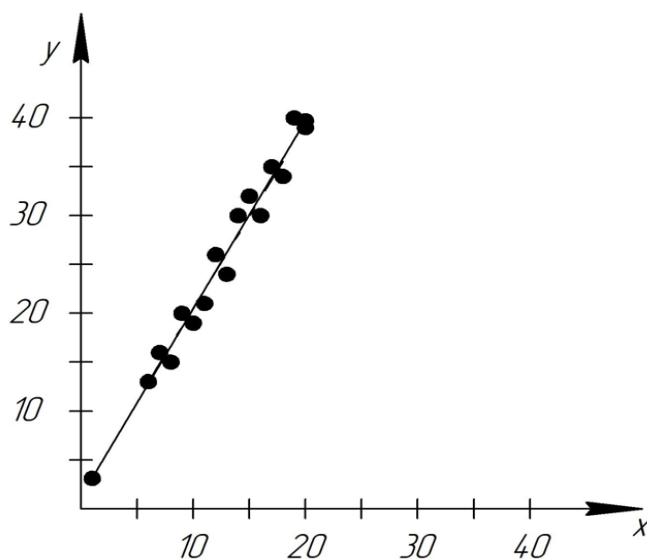


Рис. 2. Линейная регрессия  $Y$  на  $X$ , связанная зависимостью  $y = 1,93x + 1,18$

Погрешность самого уравнения регрессии в данном расчете составляет 12 %. Это обуславливает достоверное описание экспериментальных данных. На завершающем этапе исследования магистрант прогнозирует развитие производственного процесса с доопределением факторных опытных признаков.

Отметим, что учебно-методическое обеспечение дисциплины «Специальные разделы высшей математики» требует доработки: необходимо издание учебного пособия на базе изучения пяти и более источников, а также разработка методических указаний по построению математических моделей по сгруппированности данных и по количеству влияющих факторов [3, 4].

Считаем, что решение прикладных практико-ориентированных задач на основе теоретических и практических основ, а также математического аппарата фундаментальных наук способствует освоению общепрофессиональной компетенции магистра при изучении специальных разделов высшей математики. Математическое моделирование в статистическом анализе фундаментально и достоверно описывает эксперименты, является мощным средством познания в исследовательской деятельности и источником научной новизны. В дополнение к масштабным математическим расчетам следует реализовывать исследования магистров в современном формате с использованием цифровых технологий, предложенных в статье.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Губин, В. И.** Статистические методы обработки экспериментальных данных : учеб. пособие / В. И. Губин, В. Н. Осташков. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2007. – 202 с.
2. **Батршина, Р. Р.** Приложение математической теории в инженерной графике / Р. Р. Батршина, И. И. Багаутдинова // Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании : сб. тр. II Всерос. молодеж. школы-конф., посвящ. 80-летию со дня рождения д-ра физ.-мат. наук, проф. Р. С. Сингатуллина, Уфа, 18–20 апр. 2023 г. – Уфа : Башкир. гос. пед. ун-т им. М. Акмуллы, 2023. – С. 8–10.
3. **Багаутдинова, И. И.** Примеры статистических исследований промышленных процессов / И. И. Багаутдинова, Р. И. Зайруллин // Наука молодых – инновационному развитию АПК : материалы XV Нац. науч.-практ. конф. молодых ученых, Уфа, 16–17 нояб. 2022 г. : в 2 ч. – Уфа : Башкир. ГАУ, 2022. – Ч. 1. – С. 171–177.
4. **Багаутдинова, И. И.** Анализ математического моделирования при восстановлении рабочих органов почвообрабатывающих машин / И. И. Багаутдинова, А. Ф. Фаюршин, Р. Р. Хакимов // Вестник Брянской государственной сельскохозяйственной академии. – 2015. – № 4. – С. 52–55.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ XV ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ  
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

**Задача 1** [1, с. 130]. Вычислите объём тела, ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2).$$

*Решение*

Из уравнения границы тела  $T$  видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где  $T'$  – восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменим в этом интеграле переменные по формулам

$$x = 2\rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = 2\rho \cos \theta \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Якобиан преобразования равен  $8\rho^2 \sin \theta$ . В новых координатах уравнение границы тела принимает вид

$$\rho^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta,$$

откуда заключаем, что  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим

$$V = 64 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}} \rho^2 d\rho = \frac{32\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\cos \theta.$$

Произведем в интеграле замену  $\sqrt{2} \cos \theta = \sin t$ . Тогда

$$V = \frac{32\pi}{3\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} d\sin t = \frac{64\pi}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{16\pi}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^2 dt = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

Ответ:  $2\sqrt{2}\pi^2$ .

**Задача 2** [2, с. 1]. Каждой паре  $(x, y)$  целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его через  $x \circ y$ . При этом числа  $x \circ y$  и  $y \circ x$  могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел  $a, b, c$  и  $d$  выполняется равенство  $(a \circ b + d) \circ c = (a - b) \circ (c - d) + 1$ . Найдите значение  $2025 \circ 1991$ .

*Решение*

Подставляя  $c + d$  вместо  $c$  в равенство из условия задачи, получим

$$(a \circ b + d) \circ (c + d) = (a - b) \circ c + 1. \quad (1)$$

Заметим, что правая часть равенства (1) не зависит от  $d$ . Значит, и левая часть тоже от  $d$  не зависит. Тогда при  $d = -c$  получаем

$$(a \circ b + d) \circ (c + d) = (a \circ b - c) \circ 0. \quad (2)$$

Докажем, что выражение  $a \circ b$  может принимать произвольное целое значение. Пусть  $S$  – множество всех значений, которые может принимать  $a \circ b$  при всех возможных целых значениях  $a$  и  $b$ , и пусть  $s \in S$ . Выберем  $a, b$  и  $c$  такими, что  $(a - b) \circ c = s$ . Тогда из (1) получаем, что  $(a \circ b + d) \circ (c + d) = s + 1$ , откуда следует, что  $s + 1 \in S$ . Аналогично можно показать, что  $s - 1 \in S$ . Таким образом,  $S$  – множество всех целых чисел.

Заменяя в равенстве (2)  $a \circ b$  на  $a$ , получим  $(a + d) \circ (c + d) = (a - c) \circ 0$ , откуда при  $d = 0$  получаем

$$a \circ c = (a - c) \circ 0. \quad (3)$$

Пусть  $f(x) = x \circ 0$ . Тогда, в силу (3),  $f(a - b) = (a - b) \circ 0 = a \circ b$ . Отсюда

$$f(a - b - c + d) = f((a - b) - (c - d)) = (a - b) \circ (c - d),$$

$$f(a - b) + d = a \circ b + d,$$

$$f(f(a - b) + d - c) = f((f(a - b) + d) - c) = (a \circ b + d) \circ c.$$

В терминах функции  $f$  равенство из условия задачи принимает тогда вид

$$f(f(a - b) + d - c) = f(a - b - c + d) + 1.$$

Заменяя здесь  $a - b$  на  $x$  и  $d - c$  на  $y$ , для произвольных  $x$  и  $y$  получаем

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

В частности, при  $y = 0$  имеем  $f(f(x)) = f(x) + 1$ . Тогда

$$f(x + y) + 2 = (f(x + y) + 1) + 1 = f(f(x) + y) + 1 = f(f(f(x) + y)). \quad (4)$$

Откуда следует, что

$$f(f(f(x) + y)) = f(f(x) + y) + 1 = f(x + y + 1) + 1. \quad (5)$$

После замены  $x + y = z$  из равенств (4) и (5) получаем

$$f(z) + 2 = f(z + 1) + 1,$$

т. е.  $f(z + 1) = f(z) + 1$ . Отсюда следует, что  $f(x) = x + C$  для  $x \in \mathbb{Z}$ , т. е.  $a \circ b = a - b + C$  для всех целых  $a$  и  $b$ . Подставляя в изначальное равенство, найдём  $C = 1$ , которое подходит. Таким образом,  $a \circ b = a - b + 1$  и, значит,  $2025 \circ 1991 = 35$ .

Ответ: 35.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочное пособие по высшей математике : в 5 т. Т. 3 : Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай [и др.]. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

2. Adu.by : нац. образоват. портал. – Мн., 2025. – URL: <https://adu.by/images/2025/Respublikanskaa-olimpiada-po-ucebnym-predmetam/2024-2025/Tretij-etap/Matematika/10/Matem-10-Tur-1-Var-1.pdf> (дата обращения: 08.01.2026).

УДК 372.851:004.4

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ MOODLE

А. Г. КОЗЛОВ

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Разработка онлайн-курса или подготовка к семестру часто упирается в рутинную задачу: необходимо создать десятки, а то и сотни учебных элементов и тестовых заданий. Ручное создание каждого из них в Moodle превращается в бесконечный цикл копирования и вставки, отнимая у преподавателя время, которое можно было бы посвятить творческой работе и взаимодействию со студентами.

Одной из ресурсоемких задач является формирование обширного банка заданий, обеспечивающего объективный контроль знаний, адаптивность обучения и устойчивую мотивацию студентов.

Три основных принципа эффективной работы с большими объемами заданий в Moodle – использование банка вопросов (центральное хранилище), освоение форматов импорта (GIFT, XML, Aiken) и применение автоматизации через внутренние или внешние инструменты.

Наиболее простым форматом для импортирование тестовых вопросов в Moodle является GIFT. Формирование текстового файла производится по специальной схеме (рис. 1).

**Название вопроса.** ::Таблица производных функции::

**Вопрос.** Найдите производную функции:  $(\tan(x))' = ?$ .

В фигурных скобках указываются варианты ответов на вопрос. Верные ответы обозначаются знаком =, неверные ответы – знаком ~.

```
{
= ( \frac{1}{\cos^2(x)} )
~ ( \frac{1}{\cos(x)} )
~ ( \frac{1}{\tan(x)} )
~ ( \frac{1}{\sin(x)} )
~нет правильного ответа
}
```

```

Table_derivatives_function — Блокнот
Файл Правка Формат Вид Справка
::Таблица производных функции::
Найдите производную функции: \(\ \small \left(\tan(x) \right)' = ? \)
{
= \(\ \small \frac{1}{\cos^2(x)} \) \)
~ \(\ \small \frac{1}{\cos(x)} \) \)
~ \(\ \small \frac{1}{\tan(x)} \) \)
~ \(\ \small \frac{1}{\sin(x)} \) \)
~нет правильного ответа
}

```

Рис. 1. Фрагмент текстового файла

При сохранении название файла набрать латинскими буквами и выбрать кодировку текста UTF8.

Текстовый файл с заданным количеством вопросов формируем на языке программирования Python (рис. 2).

```

Вопросы для Moodle (Таблица производных).ipynb
Файл Изменить Вид Вставка Среда выполнения Инструменты Справка
Команды + Код + Текст | ▶ Выполнить все
def answers(ResponseLine): #функция генерирует ответы: правильные и неправильные.
#составляем строку (строки), которую записываем в файл
s = "{\n"
#1 верное значение
s += "=" + ResponseLine[1] + "\n"
#2
s += "~" + ResponseLine[2] + "\n"
#3
s += "~" + ResponseLine[3] + "\n"
#4
s += "~" + ResponseLine[4] + "\n"
#5
s += "~" + ResponseLine[5] + "\n"
s += "}\n"
return s
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151 N = 100 # количество генерируемых заданий
152 #Создаем новый файл в формате txt
153 file_name = "Table_derivatives_function.txt" # файл в формате txt
154 with open(file_name, "w", encoding = "utf-8") as file:
155     for _ in range(N):
156         # Записываем в файл
157         file.write("::Таблица производных функции::\n")
158         n = randint(0, 14) # случайным образом задаем функцию (16 производных)
159         S = stringDerivative(n) # Функция генерирует производную
160
161         file.write("Найдите производную функции: " + S[0])
162         file.write(answers(S))
163         file.write("\n")
164 #Скачивание файла
165 files.download("Table_derivatives_function.txt")

```

Рис. 2. Фрагмент кода на Python

Производим импорт вопросов из файла (рис. 3).

Импорт ▾

Импорт вопросов из файла ⓘ

▼ Формат файла

- «Вложенные ответы» (Cloze) ⓘ
- Формат «Пропущенное слово» ⓘ
- Формат таблицы Word 2010 (верстка) ⓘ
- Формат Aiken ⓘ
- Формат Blackboard ⓘ
- Формат GIFT ⓘ
- Формат Moodle XML ⓘ

---

› Общее

▼ Импорт вопросов из файла

Импорт ⓘ

Выберите файл... Максимальный размер для новых файлов: 8 Мбайт

Simple\_derivatives\_function.txt

Импорт

Обязательные для заполнения поля в этой форме помечены ⓘ .

Рис. 3. Импорт вопросов из текстового файла

В результате банк вопросов пополнился на 100 задач по теме «Производная функции», которые в дальнейшем используются при составлении тестовых заданий (рис. 4).

Импорт ▾

Получение вопросов из импортируемого файла

Импортировано вопросов из файла - 100

---

1. Найдите производную функции: [ \small \left(\tan(x) \right) = ? ]

---

2. Найдите производную функции: [ \small \left(\log\_{ax} \right) = ? ]

---

3. Найдите производную функции: [ \small \left(\tan(x) \right) = ? ]

---

4. Найдите производную функции: [ \small \left(a^x \right) = ? ]

Рис. 4. Импорт вопросов из текстового файла

УДК 519.1

ПРЕПОДАВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ВО ВТУЗЕ:  
ПОИСК ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

А. А. МАСТИХИНА

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
Москва, Россия

Теорема Эйлера является критерием существования в графе эйлера цикла [1, 2]. Данная тема является стандартной в разделе «Теория графов» дискретной математики. Доказательство же не всегда приводится конструктивное, дающее непосредственный способ построения цикла. К тому же стоит заметить, что существует несколько таких алгоритмов построения. Например, в [3] приводится алгоритм построения эйлера цикла из простых циклов, а разложение графа на простые циклы и существование эйлера цикла указываются в формулировке теоремы Эйлера как эквивалентные утверждения. Построение эйлера цикла из простых является распространённым методом, т. к. имеет умеренную вычислительную сложность.

Алгоритм Флэри был предложен в конце XIX в. [4]. Его вычислительная сложность не является оптимальной, но, помимо того, что он представляет исторический интерес, этот алгоритм удобен тем, что строит путь последовательно, а необходимые проверки связности могут быть реализованы различными методами, как правило, рассмотренными в курсе ранее. Также затрагиваются свойства степеней графа и возможное количество мостов в ходе работы алгоритма.

Рассмотрим неориентированный граф  $G = (V, E)$ . Эйлеров цикл определим как замкнутый путь  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m, v_1$ , где  $e_j = \{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\}$ ;  $e_m = \{v_{i_m}, v_{i_1}\}$ , содержащий все ребра графа  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Считаем, что ребра в пути не могут повторяться.

Назовем граф эйлеровым, если в нем существует эйлеров цикл. Степенью вершины считаем количество ребер, исходящих из нее.

**Теорема Эйлера.** *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.*

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть в графе существует замкнутый путь  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m, v_1$ ,  $\{e_1, \dots, e_m\} = E$ . Покажем, что степени всех его вершин четные. Действительно, т. к. каждое ребро пройдено, причем ровно один раз, степень каждой вершины есть сумма количества соседних с ней в

этой последовательности ребер. Для каждого вхождения вершины таких ребер два, в том числе для  $v_i$ .

Для доказательства *достаточности* приведем алгоритм, строящий эйлеров цикл или цепь. Введем необходимые определения.

*Связным* назовем граф, все вершины которого достижимы друг из друга, т. е. существует путь между любыми двумя вершинами.

*Подграфом* графа  $G = (V, E)$  назовем граф  $G' = (V', E')$ , такой что  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$ .

*Связная компонента* графа – максимальный по включению связный подграф.

Ребро в связном графе, при удалении которого граф перестает быть связным, назовем *мостом*.

### **Алгоритм Флёрри.**

Назначим произвольную вершину  $v_0$  начальной, путь должен закончиться в той же вершине. Начальная вершина является текущей на первом шаге. В процессе обхода будет построена последовательность вершин и ребер, являющаяся эйлеровым циклом. В начале это одна вершина  $v_0$ .

*Шаг алгоритма.* Из текущей вершины  $v$  проходим по любому исходящему из нее ребру  $\{v, u\}$ , если оно не является мостом. Добавим в последовательность  $\{v, u\}, u$ . Пройденные ребра за собой удаляем. Если при удалении ребра  $\{v, u\}$  пройденная вершина  $v$  оказалась изолированной (нулевой степени), она также удаляется. Вершина  $u$  становится текущей на следующем шаге.

Алгоритм заканчивает работу, когда ребер больше нет.

*Обоснование корректности.* Сначала обратим внимание на то, что при удалении (прохождении) ребра  $\{u, v\}$  вершины  $u, v$  меняют свою четность. Алгоритм начинается из вершины с четной степенью. После первого шага появляются две нечетные величины, одна из них будет текущей на следующем шаге. Так как ребра проходятся последовательно, при удалении следующего ребра текущая вершина снова получает четную степень, а новая текущая – нечетную, а если новая текущая имела нечетную степень, все степени снова становятся четными.

Таким образом, в процессе работы алгоритма Флёрри в графе имеется не более двух вершин с нечетной степенью, причем одна из них – текущая. Заметим также, что граф остается связным. Покажем, что алгоритм заканчивает работу только в том случае, если все ребра пройдены.

Пусть обход заканчивается в вершине, у которой больше нет исходящих ребер, но не все ребра удалены. Значит, непройденная часть графа не связна с текущей вершиной. Раз граф перестал быть связным, было прохождение по мосту, что в алгоритме происходить не должно.

Покажем, что шаг алгоритма всегда возможен, т. е. найдется ребро, не являющееся мостом. Пусть все ребра, выходящие из текущей вершины, – мосты. Случай со степенью 1 тривиален, пусть степень не меньше 2. Покажем, что в процессе работы алгоритма из текущей вершины  $v$  не может выходить более одного ребра, являющегося мостом.

Пусть при удалении двух ребер, исходящих из  $v$ , назовем их  $\{v, v_1\}$  и  $\{v, v_2\}$ , граф становится несвязным. При удалении  $\{v, v_1\}$  возникает связная компонента  $G_1 = (V_1, E_1)$ , где  $V_1$  содержит вершину  $v_1$ , а при удалении  $\{v, v_2\}$  возникает  $G_2 = (V_2, E_2)$ , где  $v_2 \in V_2$ . Рассмотрим отдельно каждую связную компоненту. Сумма степеней вершин компоненты  $G_1$ , как и в любом графе, четная (лемма о рукопожатиях), значит, в исходном графе сумма степеней тех же вершин  $V_1$  на единицу больше (т. к. присутствует ребро  $\{v, v_1\}$ ), т. е. нечетная. Значит, среди вершин  $V_1$  исходного графа  $G$  есть нечетная вершина.

Те же рассуждения верны для  $V_2$ .

Таким образом, нечетных вершин в графе получается, помимо текущей, по крайней мере, две, что противоречит построениям в ходе алгоритма. Значит, двух мостов быть не может. Следовательно, шаг алгоритма всегда возможен. Теорема доказана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дискретная математика : учеб. пособие / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 744 с.
2. **Оре, О.** Теория графов: пер. с англ. / О. Оре. – М. : Либроком, 2009. – 354 с.
3. **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов : учебник / Ф. А. Новиков. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2009. – 384 с.
4. **Fleury, M.** Deux problèmes de Géométrie de situation / M. Fleury // Journal de mathématiques élémentaires [et spéciales]. – 1883. – Vol. 2, livr. 2nd ser. – P. 257–261.

УДК 51.74

## ВЫВОД ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КУРСЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. В. МАСТИХИН

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
Москва, Россия

В учебниках по аналитической геометрии [1] редко приводятся доказательства оптических свойств эллипса, гиперболы, параболы, что связано с некоторой их изошренностью. Однако можно свести их к простому вычислению, сопровождающемуся важным геометрическим свойством директрис, объединяющим все эти кривые, и тогда заполняется брешь в восприятии данного материала студентами. Изучить математику по методическим указаниям к решению типовых расчетов невозможно, математика – наука о вычислениях, часто теоретических [2].

В вузовских программах по аналитической геометрии изучение векторного произведения предшествует теории кривых второго порядка. В работе предлагается рассмотреть оптические свойства этих кривых как набор простых задач на доказательство с одинаковым алгоритмом решения. Применим для их вывода метод векторов [1, 3]. Способ же состоит в вычислении синусов углов, образованных фокальными радиусами, и вектора касательной к кривой, как отношения модуля векторного произведения соответствующих векторов к произведению их модулей. Причем различные положения точки на кривой дают немного различную картину вывода, что порождает некоторый набор задач для самостоятельного решения, приведенный ниже. Разберем три типа таких задач для эллипса, гиперболы и параболы.

Для **эллипса** обозначим полуоси, фокальное расстояние и эксцентриситет  $a, b, c, e$ . Введем стандартную систему координат, связанную с центром эллипса и полуосями. Для точки  $M(x_0, y_0)$ , лежащей на эллипсе, вычислим синусы углов между векторами касательной и вектором фокального радиуса как отношений модулей векторных произведений к произведению длин. Пусть, для простоты,  $M$  лежит в первой четверти,  $x_0 > 0, y_0 > 0$ .

Координаты касательного вектора возьмем из известного уравнения  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ ,  $\vec{l} = (y_0 a^2; -x_0 b)$ , в трехмерном пространстве  $\vec{l} = (y_0 a^2; -x_0 b; 0)$ .

Проверим равенство

$$\sin \alpha_1 |\vec{l}| = \frac{|\overrightarrow{F_1 M} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{F_1 M}|} = \frac{|\overrightarrow{F_2 M} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{F_2 M}|} = \sin \alpha_2 |\vec{l}|.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_1M} \times \vec{l} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - c & y_0 & 0 \\ y_0 a^2 & x_0 b^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2 + x_0 b^2 c) = \vec{k} a^2 b^2 \left( \frac{x_0 c}{a^2} - 1 \right) = \\ &= \vec{k} a^2 b^2 \left( \frac{ex_0 - a}{a} \right) = \vec{k} ab^2 (ex_0 - a),\end{aligned}$$

где воспользовались каноническим уравнением эллипса и определением эксцентриситета.

По свойству директрис фокальный радиус  $|\overrightarrow{F_1M}|$  равен произведению эксцентриситета на расстояние от точки  $M$  до директрисы ( $MD_1$ ):

$$|\overrightarrow{F_1M}| = e |\overrightarrow{MD_1}| = e \left| \frac{a}{e} - x_0 \right| = |a - ex_0|.$$

Тогда

$$\sin \alpha_1 |\vec{l}| = \frac{|\overrightarrow{F_1M} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{F_1M}|} = \frac{|b^2 (ex_0 - a)|}{|a - ex_0|} = ab^2.$$

Аналогичные вычисления для второго фокуса и второй директрисы дают

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_2M} \times \vec{l} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 + c & y_0 & 0 \\ y_0 a^2 & x_0 b^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2 - x_0 b^2 c) = \\ &= -\vec{k} a^2 b^2 \left( \frac{x_0 c}{a^2} + 1 \right) = -\vec{k} ab^2 (ex_0 + a),\end{aligned}$$

свойство директрисы

$$|\overrightarrow{F_2M}| = e |\overrightarrow{MD_2}| = e \left| \frac{a}{e} + x_0 \right| = a + ex_0,$$

получаем

$$\sin \alpha_2 |\vec{l}| = \frac{|\overrightarrow{F_2M} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{F_2M}|} = \frac{|ab^2 (ex_0 + a)|}{|a + ex_0|} = ab^2.$$

Окончательно, синусы двух углов равны, угол падения равен углу отражения.

**Гипербола.** При тех же обозначениях, при том же положении точки, все вычисления полностью совпадают,  $\sin\alpha_1 |\vec{l}| = \sin\alpha_2 |\vec{l}| = ab^2$ .

**Парабола.** Для параболы с уравнением  $y^2 = 2px$  воспользуемся уравнением  $yy_0 = p(x + x_0)$  ее касательной в точке  $M(x_0; y_0)$ ,  $x > 0, y > 0$ . Касательный вектор имеет координаты  $\vec{l} = (y_0; p)$  на плоскости,  $\vec{l} = (y_0; p; 0)$  в пространстве.

Тангенс угла наклона касательной к оси  $Ox$  равен  $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p}{y_0}$ . Покажем, что его

синус,  $\sin\alpha_1 = \frac{p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}$ , равен синусу угла  $\alpha_2$  между касательным вектором  $\vec{l}$

и вектором фокального радиуса  $\overrightarrow{FM}$ . Вычислим его при помощи векторного произведения:

$$\overrightarrow{F_1M} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - \frac{p}{2} & y_0 & 0 \\ y_0 & p & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left( x_0 p - y_0^2 - \frac{p^2}{2} \right) = -\vec{k} \left( x_0 p + \frac{p^2}{2} \right) = -\vec{k} p \left( x_0 + \frac{p}{2} \right).$$

По определению параболы,  $|\overrightarrow{FM}| = e |\overrightarrow{MD}| = x_0 + \frac{p}{2}$ .

$$\sin\alpha_2 = \frac{|\overrightarrow{FM} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{FM}| |\vec{l}|} = \frac{|\overrightarrow{FM} \times \vec{l}|}{|\overrightarrow{DM}| |\vec{l}|} = \frac{p \left( x_0 + \frac{p}{2} \right)}{\left( x_0 + \frac{p}{2} \right) \sqrt{y_0^2 + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}},$$

что и требовалось доказать.

### Задачи

Доказать оптическое свойство эллипса для точки, лежащей во второй, третьей и четвертой четвертях (три задания). Прodelать то же для гиперболы (три задания). Для параболы  $y^2 = 2px$  доказать оптическое свойство для точки из четвертой четверти и рассмотреть оставшиеся три канонических уравнения для разных положений точки  $M$  (семь заданий). Провести те же вычисления для произвольной точки на каждой из кривых (три задания). Всего 16 задач без учета рассмотренных трех.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канатников, А. Н.** Аналитическая геометрия : учебник / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 388 с.
2. **Кузнецов, В. В.** Аксиоматика Вейля – Рашевского в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры / В. В. Кузнецов, А. В. Мастихин // Наука и инновации. – 2013. – С. 10.
3. **Кузнецов, В. В.** Векторы в пространстве : учеб.-метод. пособие по стереометрии / В. В. Кузнецов, Н. Г. Окроемешко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 55 с.

УДК 519.6:378.14

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Э. Ф. МУРЗИНА, Е. Н. ДИК, С. А. АРСЛАНБЕКОВА  
Башкирский государственный аграрный университет  
Уфа, Россия

В условиях технологического развития общества немаловажным аспектом является качественная математическая подготовка обучающихся технических направлений подготовки. Профессиональная компетентность и конкурентоспособность будущих инженеров зависит от умения использовать математический инструментарий в своей практической деятельности. Поэтому для инженерных направлений подготовки в Башкирском ГАУ математика является обязательным предметом.

В рамках курса математики изучаются основные разделы, но особое внимание уделяется линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям и теории вероятностей. Обучение в курсе математики имеет смешанный характер: наряду с традиционными формами (лекции, практические и лабораторные занятия) применяются инновационные методы [1, с. 303], в первую очередь – математическое моделирование [2, с. 151]. В процессе изучения отдельных тем обучающимся предлагаются тренировочные прикладные задачи, напоминающие собой производственные процессы агропромышленного комплекса. С помощью математических инструментов студенты учатся создавать структурированное, упрощенное представление сложного производственного процесса, т. е. строить математическую модель. Следующим этапом является разработка алгоритма решения. С целью развития цифровых навыков у обучающихся (навыки использования программного обеспечения) в качестве инструментария предлагается прикладная программа Mathcad. Это означает, что обучающиеся

реализуют решение поставленной задачи в среде Mathcad, которая уникальна для выполнения инженерных расчетов.

Рассмотрим методику построения математической модели некоторых мини-производственных процессов аграрной сферы с решением в пакете Mathcad.

Первая учебная задача – задача планирования выпуска продукции, в которой требуется определить себестоимость единицы продукции при известных материальных затратах на производство в течение трех дней. Данная задача рассматривается при изучении раздела «Линейная алгебра», в частности, при исследовании систем линейных алгебраических уравнений. При программировании решения в среде Mathcad необходимо, чтобы обучающиеся овладели техникой нахождения решения системы вручную. Итак, частное предприятие производит три вида металлических деталей: фланцы, гайки, кольца. Определить себестоимость каждого типа производимых деталей, если известны масштабы выпуска и финансовые издержки за три дня (табл. 1).

Табл. 1. Масштабы выпуска и финансовые издержки на производство деталей

Дни	Объем выпуска деталей, ед.			Затраты, усл. ед.
	Фланцы	Гайки	Кольца	
1	200	100	100	32000
2	300	300	200	50000
3	300	250	250	50000

Обучающиеся строят математическую модель данной задачи, сводящуюся к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 200x + 100y + 100z = 32000; \\ 300x + 300y + 200z = 50000; \\ 300x + 250y + 250z = 50000, \end{cases}$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – затраты на производство одного фланца, гайки и кольца соответственно.

Решение системы является трудоемким, поэтому его реализация выполняется в пакете Mathcad (рис. 1).

Вторая учебная задача – задача нахождения наибольшего значения функции, которая является одной из ключевых в анализе функции. Агроинженерам предлагается задача: брус длиной 6 м разделить на три части так, чтобы из этих частей, как из сторон, построить прямоугольное хранилище для зерна наибольшего объема. Обучающиеся строят математическую модель задачи с реализацией в пакете Mathcad. В данном случае представлено не численное решение, а использована встроенная функция (рис. 2).

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 300 & 300 & 200 \\ 300 & 250 & 250 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 32000 \\ 50000 \\ 50000 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{X} := \text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \\ & \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 150 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad - \text{решение системы уравнений с помощью функции Lsolve} \\ & \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad - \text{проверка результатов вычисления} \end{aligned}$$

Рис. 1. Нахождение объема хранилища в Mathcad

### Вычисление наибольшего объема хранилища для зерна

$$\begin{aligned} a & := 6 && - \text{длина балки} \\ \mathbf{V}(x, y) & := x \cdot y \cdot (a - x - y) && - \text{целевая функция (объем хранилища)} \\ x & := 0.1 \quad y := 0.1 && - \text{начальные значения параметров} \\ \\ \text{Given} \\ t & := \text{Maximize}(\mathbf{V}, x, y) && - \text{встроенная функция (нахождение максимального значения)} \\ \\ t & = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}(t_0, t_1) & = 8 && - \text{наибольший объем хранилища} \end{aligned}$$

Рис. 2. Нахождение объема хранилища в Mathcad

Таким образом, приведенные тренировочные задачи производственного характера показывают, что математическое моделирование с интеграцией цифровых технологий [3, с. 204] должно быть неотъемлемой частью курса матема-

тики для бакалавров, тем самым развивая математическую составляющую профессиональных компетенций будущих инженеров.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Валишина, Н. Р.** Самостоятельная познавательная деятельность студентов вузов в процессе цифровизации образования / Н. Р. Валишина, А. Ф. Гарифуллина // Экономическая наука и образование в контексте глобальной трансформации : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 95-летию со дня рождения первого декана экон. фак. Башкир. ГАУ Олега Ивановича Щепанского. – Уфа : Башкир. ГАУ, 2024. – С. 303–306.

2. Математическое моделирование движения зерноочистительной машины с приводом от линейного электродвигателя / М. З. Нафиков, И. И. Загиров, Х. Т. Каримов [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 76. – С. 150–164.

3. **Хужин, Р. А.** Интеграция цифровых технологий в проектное обучение: новые подходы и вызовы / Р. А. Хужин, А. Ф. Гарифуллина // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. – 2025. – № 2 (47). – С. 201–207.

УДК 514.74

#### СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Т. Ю. ОРЛОВА

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Как привить студенту-первокурснику интерес к математике? Как не убить интерес к предмету, если он есть со школы? Можно и нужно работать с такими студентами индивидуально. В каких формах можно организовать эту работу? Это и математический кружок, и индивидуальные домашние задания, и нестандартные индивидуальные задания на практических занятиях. Хочу предложить подборку задач по теме «Аналитическая геометрия», некоторые из которых могут быть использованы не только на занятиях математического кружка технического университета, но и предложены студентам, успешно решающим стандартные задачи, на практических занятиях по данной тематике.

1. Дан треугольник с вершинами  $A(0; -4)$ ,  $B(3; 0)$ ,  $C(0; 6)$ . Найти расстояние от вершины  $C$  до биссектрисы угла  $A$  [1].

На первый взгляд задача простая, но стандартной ее не назовешь. Уравнения биссектрисы угла составить легко, если знать, что направляющий вектор биссектрисы равен сумме ортов сторон. Перед студентом можно поставить задачу доказать этот факт, если он сам до этого не догадался. Как только найден

направляющий вектор биссектрисы, назовем его  $\vec{b}$ , задача становится стандартной.

$$\vec{b} = (\overline{AB})_0 + (\overline{AC})_0 = \frac{1}{5}(3;4) + \frac{1}{10}(0;10) = \left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

Уравнение биссектрисы угла  $A$  будет иметь вид  $3x - y - 4 = 0$ , а искомое расстояние найдем как расстояние от точки до прямой по известной формуле:

$$\rho = \frac{|-6 - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10}.$$

2. Дан эллипс  $x^2 + 3y^2 = 4$  и две точки  $A(7;5), B(-5;1)$ . Найти координаты такой точки  $C$  эллипса, чтобы площадь треугольника  $ABC$  была минимальной. Найти площадь треугольника  $ABC$ .

Площадь треугольника будет минимальной, если высота  $CH$  будет минимальной, т. е. расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$  должно быть минимальным.

Пусть точка  $C(x_0; y_0)$ . Прямая  $AB$  имеет уравнение  $x - 3y + 8 = 0$ , угловой коэффициент этой прямой равен  $\frac{1}{3}$ . Касательная к эллипсу в точке  $C$  параллельна  $AB$ , значит ее угловой коэффициент также равен  $\frac{1}{3}$ .

Дифференцируем уравнение эллипса, получим  $y' = -\frac{x}{3y}$ . Следовательно,  $-\frac{x_0}{3y_0} = \frac{1}{3}$ . Из системы

$$\begin{cases} x_0^2 + 3y_0^2 = 4, \\ x_0 = -y_0 \end{cases} \text{ находим } C_1(1; -1), C_2(-1; 1). \text{ Выясним без визуализации, какая}$$

точка  $C$  является вершиной искомого треугольника. Найдем расстояние  $\rho(C, AB)$ .

$$|C_1H| = \frac{|1 + 3 + 8|}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} > |C_2H| = \frac{|-1 - 3 + 8|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно,  $C(-1; 1)$ .

$$S(ABC) = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |C_2H| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5 - 7)^2 + (1 - 5)^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 8.$$

На занятии по данной теме, кроме разобранных выше, можно рассмотреть со студентами следующие задачи.

1. Прямая, параллельная прямой  $3x + 4y - 12 = 0$ , пересекает положительные полуоси координат, образуя треугольник площадью 54. Написать уравнение этой прямой [1].

Ответ:  $3x + 4y - 36 = 0$ .

2. Дана вершина  $(3;5)$  равнобедренного треугольника, уравнение его основания  $x - 2y + 12 = 0$  и его площадь  $S = 15$ . Составить уравнения боковых сторон [1].

Ответ:  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 7y + 32 = 0$ .

3. Точка  $A(1;-1)$  – вершина равнобедренного треугольника  $ABC$ , прямая  $2x + y = 0$  служит его основанием  $BC$ , а точка  $M(0;-3)$  лежит на стороне  $AB$ . Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник  $ABC$  [1].

Ответ:  $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{320}$ .

4. Составить уравнения сторон квадрата, если две из них проходят через точку  $O(0;0)$ , а на двух других сторонах (прямых, содержащих стороны) лежат точки  $(3;1), (8;6)$ . Чему равна площадь квадрата? [1]

Ответ:  $7x + 9y = 0$ ,  $7x + 9y - 30 = 0$ ,  $9x - 7y = 0$ ,  $9x - 7y - 30 = 0$ ,  
 $S = \frac{90}{13}$ .

5. Найти координаты точки  $M_0$  прямой  $l: 3x - 4y + 23 = 0$ , ближайшей к кривой  $L: x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0$ , и кратчайшее расстояние от  $M_0$  до  $L$  [1].

Ответ:  $M_0\left(-\frac{53}{25}; \frac{104}{25}\right)$ ,  $\rho = \frac{1}{5}$ .

6. Дана точка  $M_0$  с положительными координатами  $(x_0; y_0; z_0)$ . Через нее проведена плоскость. Найти наименьший возможный объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

Ответ:  $\frac{9}{2}x_0y_0z_0$ .

7. Дан куб с длиной ребра 12. Найти расстояние между диагональю куба и диагональю грани, не пересекающей эту диагональ куба.

Ответ:  $2\sqrt{6}$ .

8. На плоскости заданы две точки  $A(-1;1), B(1;2,5)$  и взята точка  $C(x;y)$  на кривой  $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ . Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника  $ABC$ ? Найти координаты точки  $C$  [1].

Ответ:  $S_{\max} = 7$ ,  $C\left(\frac{11}{5}; -\frac{18}{5}\right)$ .

9. Найти координаты точки  $M_0$  прямой  $l: x + y + 7 = 0$ , ближайшей к кривой  $L: y^2 = 12x$ , и кратчайшее расстояние от  $M_0$  до  $L$  [1].

Ответ:  $M_0(1; -8)$ ,  $\rho = 2\sqrt{2}$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович, Ф. Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями : учеб. пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 171 с.

УДК 37.091.3:51

#### ОБ ИНТЕРЕСЕ К ПРИКЛАДНЫМ ЗАДАЧАМ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

В процессе преподавания дисциплины «Математический анализ» для специальности «Прикладная математика», уделяя внимание прикладным задачам дисциплины, заметил, что студентов особенно не интересуют доказательства теоретических положений, а интересуют прикладные задачи. Так, в материалах третьего семестра в теме «Знакопеременные ряды» большой интерес вызвали задачи, связанные с оценками значений частичных сумм и остатков рядов. В теме «Ряды Тейлора – Маклорена» – задачи, связанные с приближенными вычислениями значений функций, доказательствами таблицы эквивалентных бесконечно малых функций (вариантов первых замечательных пределов), приближенными вычислениями определенных интегралов и приближенными решениями задачи Коши для ОДУ.

В приложениях темы «Ряды Фурье» [1] вызвали интерес задачи, связанные с суммированием числовых рядов с помощью рядов Фурье, решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Возникли также вопросы при изучении амплитудно-частотного спектра периодического сигнала. Где он используется? Пришлось объяснять, как с помощью амплитудно-частотного спектра можно зашифровать сигнал, объяснять такие вопросы, как «голосовой портрет человека» (наряду с отпечатками пальцев, структурой сетчатки глаза или чертами лица). Хотя продемонстрировать это не представляется возможным ввиду отсутствия соответствующих технических средств, кроме разговоров, напри-

мер, о телевизионных интервью сотрудников спецслужб, в которых лицо заретушировано, а голос искажен.

Возникли также вопросы по прикладным аспектам интегральных преобразований Фурье. «Голые» интегральные представления различных элементарных функций не вызвали особого интереса. Словесные объяснения по использованию в области теоретической физики студентов не устраивали, а для демонстрации прикладных аспектов интегралов Фурье необходимо знание методов анализа интегралов теории функций комплексной переменной, а это материал следующего семестра [2]. Для того чтобы хоть как-то удовлетворить интерес студентов, я на примере показал, как с помощью интегралов Фурье можно найти общее решение линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами, хотя подход применим и к ДУ с переменными коэффициентами, для которых не существует общих методов решения, а анализируя интегральные представления элементарных и специальных функций получать их решения. Выбрал простую задачу, которую можно решить известными методами, чтобы потом сравнить. Найти общее решение ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Подвергая прямому преобразованию Фурье левую и правую части уравнения (1), воспользовавшись свойством линейности интеграла Фурье и Фурье-образом производной функции, т. е. если  $F[y(x)] = F(\omega)$ , то  $F[y^{(k)}(x)] = (i\omega)^k F(\omega)$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y'' e^{-i\omega x} dx + 4 \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx,$$

или

$$-\omega^2 F(\omega) + 4F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \dots = \frac{1}{1 + i\omega}.$$

В результате получили линейное алгебраическое уравнение относительно Фурье-образа искомой функции  $y(x)$  (решения ДУ). Решаем его:

$$F(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega)(4 - \omega^2)}.$$

А теперь выполняем обратное преобразование Фурье и находим интегральное представление искомого решения:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(1+i\omega)(4-\omega^2)} d\omega.$$

Анализ полученного интегрального представления решения перенесен на следующий семестр, где будут изучаться методы анализа интегралов от ФКП с помощью теории вычетов.

В результате студенты были удовлетворены увиденным и не задавали больше вопросов о практическом использовании преобразований Фурье.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романенко, А. А.** О приложениях при изучении темы «Ряды и интеграл Фурье» специальности «Прикладная математика» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одарёнными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 20 февр. 2025 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2025. – С. 50–51.

2. **Романенко, А. А.** Об изучении дисциплины «Теория функций комплексной переменной» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одарёнными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 22 февр. 2024 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2024. – С. 65–68.

УДК 511:003.26 (075.8)

#### ДИДАКТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ И РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ»

Н. В. САКОВИЧ, Л. А. РОМАНОВИЧ

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова  
Могилев, Беларусь

В 2022 г. был принят общегосударственный классификатор Республики Беларусь «Специальности и классификации» ОК РБ 011–2022. В связи с этим существенной корректировке подверглись учебные планы специальностей, что повлекло за собой необходимость разработки новых учебных программ изучаемых дисциплин. Разделы «Алгебра многочленов» и «Расширение полей», традиционные для курса алгебры физико-математических специальностей университетов, выделены в отдельную дисциплину. Вследствие этого возникла необходимость в разработке учебно-методических материалов для организации учебной деятельности студентов. Теоретические основы курса разбиты на два модуля: «Алгебра многочленов» и «Расширения полей», которые в электронной форме размещены на образовательном портале *moodle.msu.by*. Студенты, изу-

чающие дисциплину, имеют возможность ознакомиться с основными понятиями и фактами теории многочленов и расширений полей.

При разработке учебно-методических материалов возникла необходимость учесть некоторые аспекты. С одной стороны, как показывает опыт, теоретический материал по данным темам сложен для восприятия большинством студентов нашего факультета. Поэтому для успешного усвоения теоретических знаний и практических навыков доцентом Н. В. Сакович разработана система индивидуальных заданий и методические указания к ним, которая включает в себя задания качественного характера, предназначенные для проверки теоретических знаний, и задания практического характера, предназначенные для отработки практических умений и навыков. Задания частично заимствованы из литературы [1, 2], частично составлены автором [3].

С другой стороны, на математических олимпиадах школьников и студентов довольно часто встречаются задачи, относящиеся к теории многочленов и расширениям полей. Даже на районных и областных этапах встречаются задачи, при решении которых нужно уметь находить НОД и НОК многочленов, знать и уметь применять схему Горнера, теорему Безу, обобщенную теорему Виета, отыскивать рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами, знать понятия алгебраического и трансцендентного числа и уметь применять их, уметь избавляться от иррациональности в знаменателе дроби. Поэтому нынешним студентам факультета – будущим учителям математики, важно изучить дисциплину на высоком уровне, чтобы использовать в своей дальнейшей профессиональной деятельности. По указанным выше направлениям олимпиадной математики на кафедре математики МГУ имени А. А. Кулешова накоплен и систематизирован учебно-методический материал, который предоставляется студентам для написания курсовых и дипломных работ. Приведём несколько примеров заданий, разработанных преподавателями кафедры, которые были предложены для выполнения на городском этапе математической олимпиады школьников Могилевской области в 2020 г. (примеры 1 и 2) и при проведении университетской олимпиады по математике среди учащихся 11 классов в 2023 г. (пример 3). Для их выполнения учащиеся должны обладать знаниями теории многочленов и уметь применить их в конкретной ситуации.

**Пример 1** – Рассматриваются квадратные трехчлены  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами, у которых  $p + q = 16$ . Сколько таких многочленов имеют целые корни?

**Пример 2** – Запишите квадратный трехчлен, у которого коэффициенты по модулю равны 1 или 2020, а сумма кубов его корней наибольшая.

**Пример 3** – Найдите положительное значение  $a$ , при котором сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0$  равна 73.

Собранный учебно-методический материал используется на кафедре для организации учебно-исследовательской деятельности студентов и представляется им при написания курсовых и дипломных работ. Такая организация учебной деятельности может способствовать как расширению и углублению знаний по учебной дисциплине «Алгебра многочленов и расширения полей», так и формированию профессиональных компетенций будущего учителя математики.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Радьков, А. М.** Алгебра и теория чисел : атлас для самостоятельной работы : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. – Мн. : Выш. шк., 1992. – 286 с.
2. **Шнеперман, Л. Б.** Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. Б. Шнеперман. – Мн. : Выш. шк., 1982. – 223 с.
3. **Сакович, Н. В.** Индивидуальные задания по алгебре и теории чисел. Теория многочленов. Алгебраические и трансцендентные числа / Н. В. Сакович, В. Н. Борбат. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2009. – 34 с.

УДК 37.016:533.24

#### ОБ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СЖИЖЕНИЕ ГАЗОВ» В КУРСЕ ТЕРМОДИНАМИКИ

А. И. СЕРЫЙ

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина  
Брест, Беларусь

В учебных программах вузовского курса термодинамики для физико-математических и других специальностей присутствует тема «Сжижение газов» [1, с. 408–412]. Из-за сокращения количества аудиторных часов по физике в целом требуются дидактические новации, позволяющие излагать материал сжато, но без ущерба для полноты содержания.

С одной стороны, следуя известному принципу «все познается в сравнении», в качестве разновидности опорных конспектов можно применять сравнительные таблицы. В качестве примеров учебных пособий преимущественно школьного уровня, использующих такой подход, можно назвать [2, 3]; на вузовском уровне данный подход менее распространен. С другой стороны, в случае вывода отдельных формул с промежуточными подстановками и преобразованиями предпочтительнее использовать блок-схемы.

В качестве примера дадим сравнительную характеристику методов сжижения газов, основанных на предварительном охлаждении, с помощью процесса Джоуля – Томсона [1, с. 143] и адиабатического расширения (табл. 1 и 2).

Табл. 1. Методы охлаждения газов

Метод	Адиабатическое расширение (метод Клода)	С эффектом Джоуля – Томсона (дросселирование)
Постоянная величина	Энтропия $S$	Энтальпия $H$
$\Delta T = T_2 - T_1$	$\int_{P_1}^{P_2} \frac{T}{C_p} (\partial V / \partial T)_P dP$	$\int_{P_1}^{P_2} \frac{T (\partial V / \partial T)_P - V}{C_p} dP$
Схема вывода формулы	Рис. 1	Рис. 2 (другие комментарии в табл. 2)
При прочих равных условиях	Охлаждение больше	Охлаждение меньше
Для идеального газа	Возможно	Невозможно
Разработка холодильного цикла	В. Сименс (Германия) запатентовал в 1857 г., Ж. Клод (Франция) получил жидкий воздух в 1902 г.	У. Хемпсон (Англия), К. Линде (Германия) в 1895 г.
Простота	Более сложный: есть подвижные части, нужна смазка (а она может замерзнуть) или прокладки из других материалов	Более простой: нет подвижных частей, не нужна смазка
Элементы схемы, дающие различие между методами	Поршень и детандер	Вентиль (для дросселирования)

Табл. 2. Варианты записи выражения для  $dH$  в блок-схеме на рис. 2

$dH$	$TdS + VdP$	$(\partial H / \partial T)_P dT + (\partial H / \partial P)_T dP$
То есть через дифференциалы	Только «своих» переменных [1, с. 139]	Не только «своей» переменной [1, с. 142]
Для чего используется	Для получения выражений для $(\partial H / \partial T)_P$ и $(\partial H / \partial P)_T$ , далее используемых в столбце справа	Для приравнивания к нулю (после подстановки выражений для $(\partial H / \partial T)_P$ и $(\partial H / \partial P)_T$ , полученных методом, описанным в столбце слева) для установления взаимосвязи между $dT$ и $dP$

Будем использовать обозначения:  $T$ ,  $T_i$  и  $\Delta T$  – абсолютная температура, ее конкретное значение и конечное изменение соответственно;  $P$  и  $P_i$  – давление и его конкретное значение соответственно;  $V$  – объем;  $C_p$  – молярная теплоемкость при постоянном давлении;  $S$  – энтропия;  $H$  – энтальпия;  $\delta Q$  – количество теплоты.

Тонкие стрелки на блок-схемах (рис. 1 и 2) соответствуют подстановкам, жирные стрелки – следствиям. Исходные блоки (с которых можно начинать

рассуждения) закрашены светло-серым цветом, конечные формулы – темно-серым цветом. В обоих случаях используется одно и то же термодинамическое соотношение Максвелла, отдельно доказываемое в теории термодинамических функций [1, с. 142].

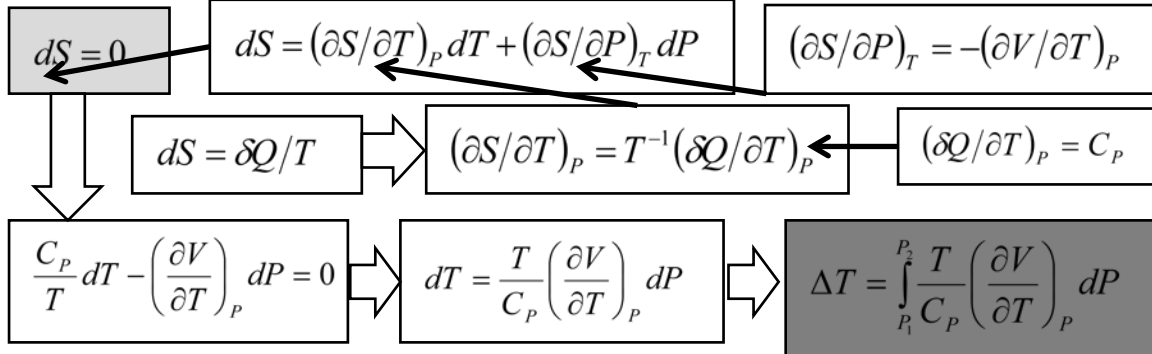


Рис. 1. Блок-схема получения выражения для конечного изменения температуры при адиабатическом расширении газа

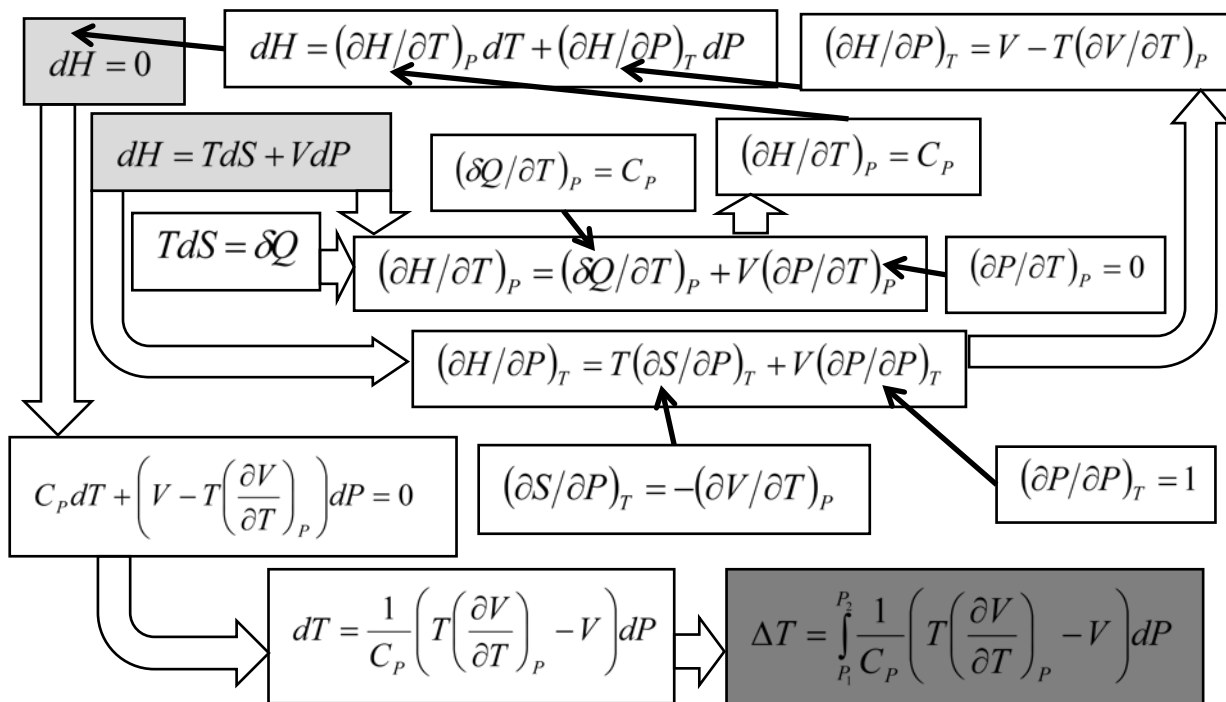


Рис. 2. Блок-схема получения выражения для конечного изменения температуры вследствие эффекта Джоуля – Томсона

Публикация дополняет статьи [4, с. 16–19; 5, с. 8–11], посвященные использованию блок-схем и сравнительных таблиц при изучении термодинамики и статистической физики в вузе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 2 : Термодинамика и молекулярная физика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1975. – 552 с.
2. Физика в таблицах. 7–11 кл.: справ. пособие / авт.-сост. В. А. Орлов. – 11-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2008. – 63 с. : ил.
3. Физика. Справочник школьника и студента : пер. с нем. / под ред. Р. Гёбеля. – 3-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2003. – 366 с.
4. **Серый, А. И.** Об изучении темы «Начала термодинамики» / А. И. Серый // Научный диалог: актуальные вопросы теории и практики : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : Наука и Просвещение, 2024. – С. 16–19.
5. **Серый, А. И.** Об изучении темы «Термодинамические функции» / А. И. Серый // Наука и просвещение: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : Наука и Просвещение, 2024. – С. 8–11.

УДК 37.016:539.18

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БЛОК-СХЕМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ  
«МОДЕЛЬ БОРА» В КУРСЕ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

А. И. СЕРЫЙ

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина  
Брест, Беларусь

В курсе физики присутствуют темы, при изучении которых приходится выводить те или иные формулы; при большом количестве соответствующих преобразований приходится, как правило, делать промежуточные текстовые комментарии в случае обычной повествовательной формы изложения. И если в случае обычного учебного пособия каждый читатель может при необходимости вернуться назад для повторения нужного ему фрагмента (не мешая другим), то при использовании презентации на лекции возможны дополнительные неудобства, т. к. преобразования не всегда удастся разместить на одном слайде. Поскольку не все учащиеся легко воспринимают такую форму подачи материала (даже в случае учебных пособий), альтернативной формой изложения могут быть блок-схемы (иногда с поясняющими сравнительными таблицами). Этот вопрос ранее затрагивался автором в [1, с. 53]. Такому подходу в вузовском курсе физики на сегодняшний день не уделяется существенного внимания (в качестве примеров пособий преимущественно школьного уровня можно назвать [2, 3]).

В качестве примера рассмотрим изучение модели атома водорода и водородоподобных ионов, предложенной Н. Бором, в курсе физики атома и атомных

явлений. Последовательность вывода формул для радиусов электронных орбит, скоростей электронов на таких орбитах, а также полной энергии электрона на различных орбитах в обычном повествовательном изложении можно найти в [4, с. 59–60; 5, с. 70–71; 6, с. 339–340]. В качестве альтернативного подхода представим процесс получения основных соотношений в виде блок-схемы (рис. 1).

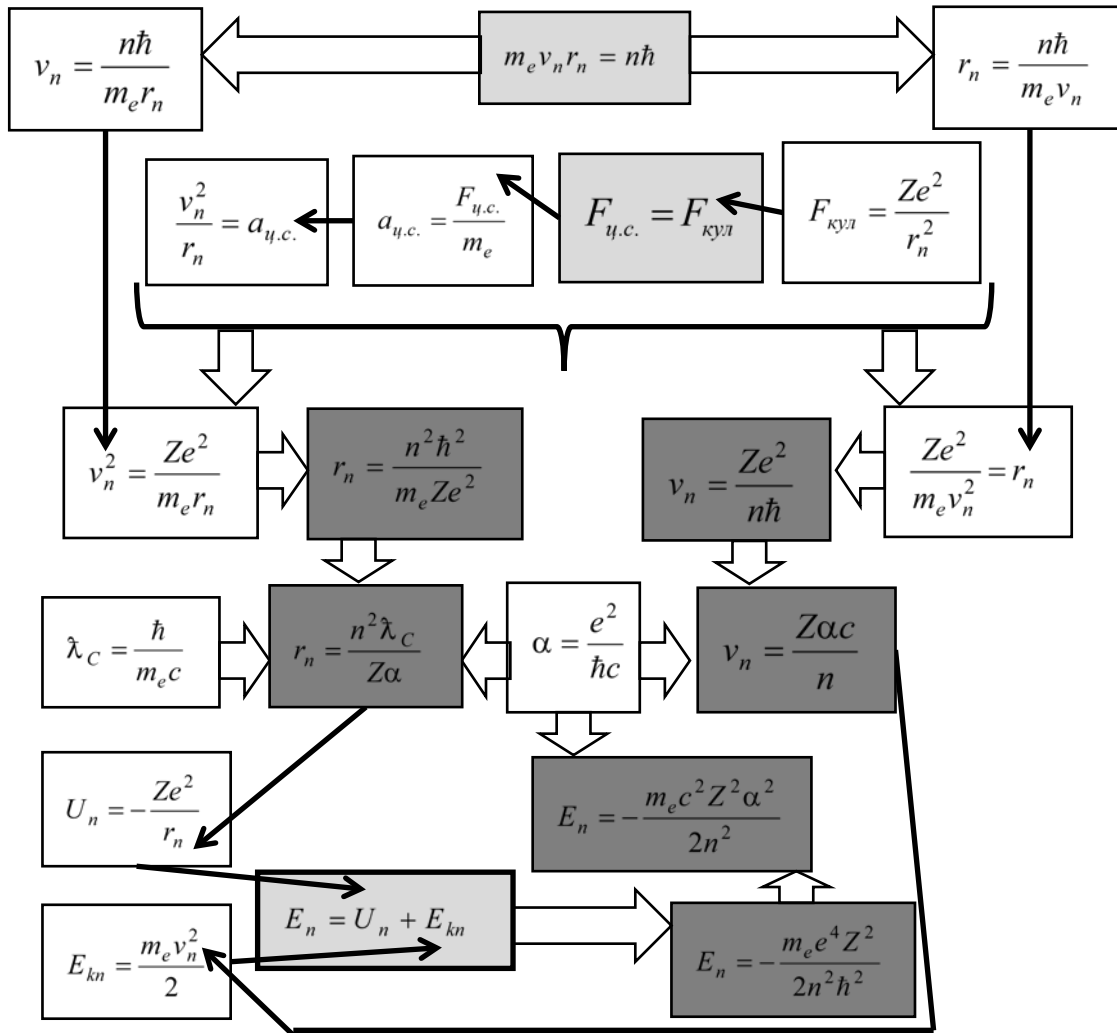


Рис. 1. Блок-схема вывода основных соотношений для атома водорода и водородоподобных ионов в модели Бора

Будем использовать следующие обозначения:  $m_e$  – масса электрона;  $r_n$  – радиус  $n$ -й орбиты электрона;  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $n$  – главное квантовое число (номер состояния электрона);  $\hbar$  – постоянная Планка;  $a_{у.с.}$  – центростремительное ускорение электрона;  $F_{у.с.}$  – центростремительная сила, приводящая к движению электрона по окружности; в данном случае она равна  $F_{кул}$  – силе взаимодействия электрона с ядром по закону Кулона;  $Z$  – зарядовое число ядра;  $e$  – элементарный заряд;  $c$  – скорость света в вакуу-

ме;  $\alpha$  – постоянная электромагнитного взаимодействия или тонкой структуры;  $\lambda_C$  – комптоновская длина волны электрона;  $E_{kn}$  – кинетическая энергия электрона на  $n$ -м уровне;  $U_n$  – потенциальная энергия электрона на  $n$ -м уровне;  $E_n$  – полная энергия электрона на  $n$ -м уровне.

Тонкие стрелки на представленной схеме (см. рис. 1) соответствуют подстановкам, жирные стрелки и фигурные скобки – логическим следствиям. Исходные блоки (с которых можно начинать рассуждения) закрашены светло-серым цветом, конечные формулы – темно-серым цветом.

Представленная на рисунке последовательность действий не является единственно возможной. Промежуточные преобразования на рисунке не показаны; они могут быть добавлены в блок-схему, изложены отдельно или предложены учащимся в качестве самостоятельной работы или задач на практических занятиях.

Публикация дополняет статьи [7, с. 10–13; 8, с. 291–294; 9, с. 12–15; 10, с. 12–15; 11, с. 14–17], посвященные использованию блок-схем в процессе преподавания физики атома и атомных явлений.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем и таблиц при решении задач квантовой механики в курсе теоретической физики / А. И. Серый // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 20 февр. 2025 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2025. – С. 53–56.
2. Физика в таблицах. 7–11 кл.: справ. пособие / авт.-сост. В. А. Орлов. – 11-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2008. – 63 с. : ил.
3. Физика. Справочник школьника и студента : пер. с нем. / под ред. Р. Гёбеля. – 3-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2003. – 366 с.
4. **Савельев, И. В.** Курс общей физики : учеб. пособие : в 3 т. Т. 3 : Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И. В. Савельев. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
5. **Сивухин, Д. В.** Атомная и ядерная физика : учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1 : Атомная физика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1986. – 416 с.
6. **Шпольский, Э. В.** Атомная физика: в 2 т. Т. 1 : Основы квантовой механики и строение электронной оболочки атома / Э. В. Шпольский. – 6-е изд., перераб. – М. : Наука, 1974. – 575 с.
7. **Серый, А. И.** Об изучении темы «Формула Резерфорда» в курсе атомной физики / А. И. Серый // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. XXXIV Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 10–13.
8. **Серый, А. И.** К методике изучения темы «Эффект Комптона» в курсе квантовой физики / А. И. Серый // Фундаментальная наука и образовательная практика : материалы III Респ. науч.-метод. конф. с междунар. участием «Актуальные проблемы современного естествознания», Минск, 30 нояб. 2023 г. – Мн. : РИВШ, 2023. – С. 291–294.

9. Серый, А. И. К вопросу о методике преподавания темы «Равновесное излучение» в курсе физики / А. И. Серый // Актуальные вопросы современной науки и образования : сб. ст. XXXIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 12–15.

10. Серый, А. И. Об использовании блок-схем при выполнении расчетов в лабораторных работах по атомной физике / А. И. Серый // Научные исследования: фундаментальные и прикладные аспекты : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 12–15.

11. Серый, А. И. О различных способах вывода формулы Планка в курсе квантовой физики / А. И. Серый // Актуальные вопросы современных научных исследований : сб. ст. VIII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Пенза : Наука и Просвещение, 2023. – Ч. 1. – С. 14–17.

УДК 378. 016:51

## ИЗУЧЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН СТУДЕНТАМИ-ГУМАНИТАРИЯМИ: ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Математические знания, полученные студентами при освоении различных математических курсов, позволяют выпускникам вузов решать прикладные задачи различных сфер деятельности человека посредством применения современных математических методов.

«Теория вероятностей и математическая статистика» как учебная дисциплина занимает особое место в системе математического знания. В процессе ее изучения студенты овладевают умениями собирать, анализировать, обрабатывать и интерпретировать разнообразную, зачастую противоречивую информацию; принимать адекватные и аргументированные решения в ситуациях неопределенности; прогнозировать изменчивые явления; оценивать шансы (вероятность) успеха и риска событий.

Для направления подготовки «Зарубежное регионоведение» (социально-гуманитарная группа направлений подготовки) относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)» (часть Блока 1, формируемая участниками образовательных отношений). Цель этой учебной дисциплины состоит в формировании специалистов, умеющих обоснованно и результативно применять существующие и осваивать новые основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики, используемые в профессиональной деятельности выпускников указанной специальности, связанной, в частности, с оценкой, анализом и исследованием ресурсов и возможностей региона специализации, систематизацией архивных документов, библиотечных фондов и музейных экспонатов.

В результате освоения содержания теории вероятностей и математической статистики у обучающегося должна быть сформирована способность выделять, систематизировать и интерпретировать содержательно значимые эмпирические данные из потоков информации, а также смысловые конструкции в оригинальных текстах и источниках по профилю деятельности. Требования этой компетенции (ОПК-3) будут использованы при изучении методов социологических и региональных исследований и управления проектами.

Отметим некоторые значимые аспекты методики обучения студентов гуманитарного направления теории вероятностей и математической статистике.

Студенты гуманитарных направлений высшего образования не видят и не понимают необходимости в изучении математических дисциплин, в частности, теории вероятностей и математической статистики. Они не представляют возможности применения теории и методов этой учебной дисциплины в будущей профессиональной деятельности, что определяет их негативное отношение к ней (как к математике вообще) и отсутствие мотивации к ее изучению [1].

Одним из мотивирующих факторов является отражение связи изучаемой дисциплины с различными сферами деятельности человека и реальными жизненными ситуациями, в основе которых лежит вероятностный характер событий и явлений окружающей действительности. Например, на практическом занятии можно организовать обсуждение (с аргументацией теорией темы занятия) проблемной мини-ситуации следующего содержания «Результаты исследований психологов показывают, что 70 % женщин позитивно реагируют на некоторые жизненные ситуации, в то время как 40 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, отразив свое отношение к предлагаемым ситуациям. В случайно извлеченной анкете указана отрицательная реакция. Кто мог ее заполнить?»

В обучении студентов-гуманитариев особо значимым является наполнение содержания учебной дисциплины прикладными аспектами, направленными, в соответствии с требованиями рабочей программы изучаемой дисциплины, на овладение математическим аппаратом и навыками моделирования и анализа задач, возникающих на практике, и решаемых вероятностно-статистическими методами. Реализуя идеи дифференциации обучения, этот аспект можно отразить при подборе задач для самостоятельного решения. Задача «Дана выборка, содержащая сведения о сумме заработной платы работников некоторого предприятия (12500, 11800, 12100, 11900, 13200, 12800, 12800, 13400, 12300, 13500). Найти оценку средней заработной платы и дисперсии на данном предприятии» соответствует требованиям порогового уровня сформированности компетенций.

У большинства студентов-гуманитариев слабый уровень школьной математической подготовки, значительные пробелы в которой не способствуют психологической готовности к овладению математическим содержанием в вузе.

У них недостаточно сформированы общеучебные умения и навыки, приемы аналитико-синтетической деятельности. Эти факты констатируются многими исследователями проблемы обучения математическим дисциплинам студентов гуманитарных специальностей и преподавателями-практиками (например, [2]).

С учетом этих фактов при изучении вероятностно-статистических дисциплин студентами-гуманитариями целесообразно при подаче нового материала и при решении задач применить методику работы с задачами последовательно нарастающей трудности [3].

Преподавание некоторых вопросов теории вероятностей и математической статистики может быть описательным и проходить в форме изложения теоретических сведений и примеров с обращением к интуиции и наглядности, поскольку у студентов-гуманитариев преобладающим является наглядно-образное и интуитивное мышление.

В практике обучения этот факт необходимо учитывать при обсуждении вариантов решения, например, вероятностной задачи следующего содержания: «Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта понимается выигрыш одного из них в  $i$ -й партии или ничью. Построить пространство  $\Omega$  элементарных исходов». Поиск вариантов решения основывается на внутренних интуитивных ощущениях студента и догадке через использование ассоциаций и визуализации материала, а не через строгие определения и теоремы содержания изучаемой дисциплины. Для гуманитариев важно проговаривание и комментирование текста задачи и предлагаемого варианта ее решения с уточнениями и возможными переформулировками.

В такой деятельности формируются навыки систематического перебора всех вариантов для конкретной задачной ситуации, построения дерева всевозможных вариантов, использование кодирования (некоторого условного обозначения перебираемых в задаче объектов) как основы лексикографического подхода. Например, при рассмотрении вопросов комбинаторики студенты должны усвоить и уметь видеть (выделять) в конкретных задачах два основных правила – правило суммы и правило произведения. Затем можно переходить к базовым формулам комбинаторики (размещениям и сочетаниям), сообщая необходимые сведения из теории множеств. Методически важно на примерах несложных задач научить студентов при определении метода решения комбинаторной задачи получить ответ на следующие вопросы: повторяются ли элементы; все ли элементы используются; важен ли порядок следования элементов; совместны или несовместны выборы в задаче, если их несколько?

Учитывая, что для студента-гуманитария важно умение грамотно и четко преподнести свои мысли, уметь составлять причинно-следственные связи, понимать и знать, как нужно проводить анализ своих исследований, одним из направлений организации самостоятельной работы является подготовка рефератов по вопросам изучаемого содержания, мини-выступлений на практических

занятиях, для развития информационной грамотности студентов, раскрывающей области применения изучаемых вопросов, можно предложить задания для самостоятельного исследования по темам «Азбука Морзе», «Почтовый индекс» и другие.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дергунова, Н. А.** Устранение затруднений у студентов-гуманитариев при изучении математики в вузе / Н. А. Дергунова // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской Академии образования. – 2007. – № 3. – С. 47–55.
2. **Соловьева, А. А.** Психологические особенности студентов гуманитарных специальностей в контексте их обучения математике / А. А. Соловьева // Личность, семья и общество: вопросы педагогики и психологии. – 2015. – № 12 (57). – С. 70–80.
3. **Старовойтова, Е. Л.** Педагогические аспекты обучения бакалавров технического вуза вероятностно-статистическим дисциплинам / Е. Л. Старовойтова // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном образовании : сб. науч. ст. IV Междунар. науч.-практ. конф., Ярославль, 12 марта 2020 г. – Ярославль : ЯГПУ, 2020. – С. 132–134.

УДК 378. 016:51

#### НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ВОПРОСОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ СТУДЕНТАМИ-ГУМАНИТАРИЯМИ

Т. С. СТАРОВОЙТОВА

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

С 2024/25 учебного года в систему подготовки студентов специальности «Зарубежное регионоведение» включена учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» (Блок 1 «Дисциплины (модули)» (часть Блока 1, формируемая участниками образовательных отношений)). Всего по дисциплине 108 часов (3 зачетных единицы), из них контактная работа по учебным занятиям 50 часов (16/34). В соответствии с целью учебной дисциплины планируемые результаты обучения определяют знание студентами основных понятий и методов теории вероятностей и математической статистики, умение применять их к решению практических задач, владение математическим аппаратом и навыками моделирования и анализа для задач, возникающих на практике и решаемых вероятностными методами.

Вероятностный характер многих событий и явлений в окружающей действительности требует соответствующего поведения человека, владеющего вероятностной интуицией и конкретными способами оценки ситуации, в частности, способами оценки данных. Изучение вероятностно-статистической линии

оказывает положительное влияние на развитие интеллектуальных способностей студентов, поддерживает их интерес к учебной дисциплине, отражает прикладную значимость математического знания.

Эффективность обучения определяется как содержанием учебной дисциплины, так и способами организации деятельности обучающихся по его освоению. Это определяет ряд методических проблем при организации учебно-познавательной деятельности студентов, в частности, студентов-гуманитариев, при освоении ими вероятностно-статистических дисциплин, раскрывающих особенности, возможности и перспективы применения математических методов для решения задач профессиональной деятельности, что, в свою очередь, способствует развитию профессионального мышления и формирует математическую культуру обучающихся.

Освоение вероятностно-статистического содержания студентами-гуманитариями имеет свою специфику, которая определяется, прежде всего, психологическими особенностями их личности. Применительно к изучению математических дисциплин особо значимыми являются общие для студентов гуманитарных направлений подготовки характерные черты мышления, восприятия математики и мотивов ее изучения.

Особенности организация деятельности студентов гуманитарного направления подготовки по освоению содержания учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» на методическом уровне определяются рядом обстоятельств, отдельные из которых представим далее.

Характеризуя познавательные процессы студентов-гуманитариев, авторы отмечают, что у гуманитариев преобладает синтетическое восприятие и менее развиты операции анализа и систематизации [1]. Поэтому одной из основных задач обучения теории вероятностей и математической статистике является развитие у гуманитариев мыслительных операций, в первую очередь – умения анализировать как необходимого условия успешного решения задач.

Синтетическое восприятие проявляется целостностью (студенты видят общую картину) и одномоментностью отражения разных сторон объекта (замечают связи между явлениями), в результате создается обобщенный образ (с учетом скрытых смыслов и контекста) с эмоционально-личностными моментами (эмоциональная вовлеченность).

Так, эмоциональное восприятие красоты математики определяется гуманитариями не через формулы, а через ее проявление в живой природе, в произведениях искусства, в конкретных математических объектах, событиях, фактах и занимательных (познавательно-информативных) задачных ситуациях, например, такого содержания «Сколько различных паролей для вашего компьютера можно составить из десяти цифр при условии, что цифры в пароле не повторяются? Приведите примеры некоторых из них».

Из типов восприятия информации гуманитариями характерен «художественный» тип, проявляющийся, например, в сохранении зрительных объектов в деталях, склонности использовать образные формы репрезентации. Зрительная память, как отмечается в исследованиях, обеспечивает приемы целостного «схватывания» материала, владение приемами образной памяти и использование наглядно-образных опор при запоминании [2].

В практике обучения студентов-гуманитариев вопросам стохастики особое внимание надо уделять применению различных видов наглядности, отражая в наглядном материале определения понятий, формулировки теорем, правила, схемы (алгоритмы) решения типовых задач, например, «В семье – 6 человек, а за столом в кухне – 6 стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?».

Студентам-гуманитариям присущи наглядно-образное и интуитивное мышление. Основная функция наглядно-образного мышления заключается в создании образов и оперирование ими в процессе решения задач. В процессе обучения необходимо использовать возможности образной памяти, отражая в наглядном материале (схемы, образцы решения задач, графики) определения, правила, структуру основных понятий и методов теории вероятностей и математической статистики.

Интуитивное мышление основано на опыте и непосредственных чувственных восприятиях, характеризуется способностью человека усваивать всю проблему в целом, не прибегая к последовательному разбору отдельных ее аспектов (составляющих) по определенным стандартным правилам и разработанным процедурам (алгоритмам). В соответствии с этим фактом, на практических занятиях надо использовать возможности выработки интуитивного чувства правильности того или иного варианта решения задачи, используя методику рассуждения вслух с учетом предпочтений студентами-гуманитариями активных коллективных методов работы (например, обсуждения, дискуссии, выслушивание разных точек зрения в процессе поиска решения задач).

Студенты-гуманитарии придают большое значение соответствию условия предлагаемой для решения математической задачи реальной действительности, первоначальное осмысление задачных данных происходит с позиций здравого смысла, а затем, отвлекаясь от конкретного содержания, ими осуществляется перевод (описание) задачной ситуации на математический язык (зачастую этот этап вызывает значительные трудности).

Поэтому при решении задач на практических занятиях необходимо использовать методические приемы актуализации знаний, которые помогут студентам «вхождению в тему» [3]. Например, можно предложить несколько задач, разных по содержанию, но одинаковых по способу решения, или предло-

жить задачу с требованием ее решения несколькими способами, или рассмотреть несколько задач с последовательно нарастающей трудностью.

Студенты-гуманитарии на первое место ставят профессиональные мотивы, поэтому через решение задач и рассмотрение примеров реальной действительности они осознают значимость знания вероятностных закономерностей, владения методами построения вероятностных моделей профессиональных задач как необходимых условий формирования вероятностно-статистического мышления специалистов указанного направления подготовки.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванова, А. В.** Педагогические условия учета специфики возрастных и индивидуальных особенностей учащихся-гуманитариев в процессе обучения математике / А. В. Иванова, А. П. Бугаева, А. Г. Скрыбина // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 6-1. – С. 135–139.

2. **Артюхина, М. С.** Особенности интерактивного обучения математике бакалавров гуманитарного профиля / М. С. Артюхина // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 5. – URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=22176> (дата обращения: 11.12.2025).

3. **Старовойтова, Е. Л.** Методические особенности изучения вопросов теории вероятностей и математической статистики студентами-первокурсниками / Е. Л. Старовойтова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 21 февр. 2020 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – С. 81–84.

УДК 377.147

#### НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

О. В. ФИЛИПЕНКО

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

В Концепции национальной безопасности Республики Беларусь акцентируется внимание на важности качественного профессионального образования. Отмечается, что в социальной сфере одним из внутренних источников угрозы национальной безопасности является «...снижение качества подготовки квалифицированных конкурентоспособных рабочих и специалистов...» [1, с. 14]. Выпускникам технических университетов сегодня необходимы фундаментальные знания по выбранной профессии, практические умения и опыт творческой деятельности, умение анализировать различные источники информации, вы-

двигать гипотезы, делать выводы, презентовать результат своего труда, отстаивать собственную точку зрения, а также способность работать в команде.

В современной системе образования преобладают следующие тенденции развития профессионального образования [2, с. 4]: приоритет в выборе наиболее востребованных сфер жизнедеятельности общества – прагматизация; повсеместная автоматизация производства – цифровизация; учет индивидуальных особенностей обучаемого, его способностей и профессиональной самоактуализации – индивидуализация профессионального образования; сокращение спроса на профессии низкой квалификации и ручного труда и увеличением спроса на профессии высокоинтеллектуального труда; усиление внимания к социальным умениям и взаимодействию – *soft skills*, продвинутому уровню владения цифровыми умениями в условиях повышения производительности – *digital skills*.

Анализ образовательной практики и учебных программ учреждений высшего образования технического профиля показал, что содержание математического образования является обязательной частью профессионального образования технических специальностей. В связи с этим актуальна проблема качественной математической подготовки будущих инженеров.

С быстрым развитием науки, техники и повсеместным внедрением в различные сферы человеческой деятельности вычислительных машин актуализируется важность качественного математического образования при подготовке специалистов высшего образования [3, с. 80]. А. И. Митюхин в [4, с. 23] констатирует значимость математического образования, отмечает, что математические дисциплины образуют базис для развития инновационных технологий. В связи с этим заключаем, что от качества математического образования зависит качество подготовки конкурентноспособных выпускников технических университетов, поскольку формирование математической компетентности у будущих инженеров является важным для формирования у них профессиональной компетентности.

В связи с необходимостью повышения качества образовательного процесса в системе профессионального образования актуальны изменения *содержания и технологий обучения математике* в соответствии с ведущим в профессиональном образовании компетентностным подходом, в Республике Беларусь на законодательном уровне он определен в качестве ведущего подхода в образовании [2]. Как отмечает В. И. Байденко: «Компетентностный подход требует переориентации на студентоцентрированный характер образовательного процесса...» [5, с. 9]. Согласно идее компетентностного подхода обучение математике в техническом университете должно базироваться на следующем: принцип профессиональной направленности; дифференцированный подход; реализация творческого потенциала и индивидуальных особенностей студентов через включение их в продуктивную деятельность.

Реализация компетентного подхода предполагает разработку и внедрение в практику обучения математике компетентно направленных средств обучения, в содержание которых включаются теоретические сведения и примеры решения типовых задач по всем разделам дисциплины, система разноуровневых заданий для формирования практических умений, а также совокупность профессионально ориентированных заданий, отражающих специфику будущей профессии. Изучение теоретических сведений по математике и усвоение приемов по решению типовых задач способствуют формированию у студентов математической компетентности. Система разноуровневых заданий дает возможность каждому студенту построить собственную траекторию развития и обучения согласно имеющемуся у него уровню математической подготовки. Это позволяет на практике реализовать дифференцированный подход. Совокупность профессионально ориентированных задач, содержание которых связано с выбранной профессией будущих инженеров, обеспечивает реализацию принципа профессиональной направленности в обучении математике. Следование этому принципу дает возможность ликвидировать разрыв между математической теорией и производственной практикой.

От выбора технологии обучения математике также зависит качество формирования математической компетентности студентов технических университетов. Любая технология обучения подразумевает выбор определенных методов обучения. Для эффективного формирования математической компетентности будущих инженеров целесообразно выбирать продуктивные методы обучения – «методы, повышающие мотивацию обучаемых и стимулирующие их познавательную деятельность» [6, с. 167]. Они относятся к активным методам обучения, т. е. это такие методы обучения, при которых деятельность обучаемого носит продуктивный, творческий, поисковый характер [7, с. 287]. К продуктивным методам обучения математике относятся: метод проектов; исследовательский; проблемный; эвристический и т. д. Опыт применения перечисленных методов обучения математике представлен в [8]. Использование продуктивных методов обучения математике способствует формированию у студентов не только математической компетентности, но и развитию их творческого потенциала, который имеет важное значение для осуществления профессиональной деятельности в будущем.

От сформированности математической компетентности студентов технического университета зависит сформированность профессиональной компетентности будущих инженеров.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об утверждении Концепции национальной безопасности Республики Беларусь : решение Всебелорус. нар. собр. от 25 апр. 2024 г. № 5 // Нац. правовой Интернет-портал

Респ. Беларусь. – URL: <https://pravo.by/document/?guid=3871&p0=P924v0005> (дата обращения: 10.10.2025).

2. Концепция развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 30 нояб. 2021 г. № 637 // Нац. правовой Интернет-портал Респ. Беларусь. – URL: <https://pravo.by/document/?guid=12551&p0=C22100683> (дата обращения: 20.09.2025).

3. **Кудрявцев, Л. Д.** Современная математика и ее преподавание : учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1985. – 176 с.

4. **Митюхин, А. И.** Модернизация в преподавании и обучении математике в IT-университете / А. И. Митюхин // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 25 окт. 2019 г. – Гомель : Бел. гос. ун-т транспорта, 2019. – С. 22–25.

5. **Байденко, В. И.** Выявление состава компетенций выпускников вузов как необходимый этап проектирования ГОС ВПО нового поколения : метод. пособие / В. И. Байденко. – М. : Исслед. центр проблем качества подготовки специалистов, 2006. – 72 с.

6. **Майсеня, Л. И.** Развитие математического образования студентов технических университетов / Л. И. Майсеня. – Мн. : БГУИР, 2017. – 283 с.

7. Педагогика : учебник / Л. П. Крившенко, М. Е. Вайндорф-Сысоева, Т. Л. Юзсфавичус [и др.] ; под ред. Л. П. Крившенко. – М. : Проспект, 2004. – 429 с.

8. **Филипенко, О. В.** К проблеме реализации продуктивного типа обучения на занятиях по математике / О. В. Филипенко // Матэматыка. – 2016. – № 5. – С. 24–31.

УДК 378.147

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ IT-СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Е. С. ЧЕБ

Белорусский государственный университет  
Минск, Беларусь

В современных условиях важнейшей задачей развития и модернизации образования является разработка и возможности внедрения в учебный процесс разнообразных средств и способов обучения, предполагающих повышение его качества. Рост качества образования напрямую связан с созданием новой образовательной среды, в основе которой лежат современные информационные технологии [1, 2]. Использование информационных технологий не заменяет традиционные методы предоставления материала, а значительно влияет на форму и методы подачи учебного материала, вследствие чего повышает эффективность учебного процесса. Внедрение в учебный процесс электронных средств обучения позволяет преподавателю организовывать процессы усвоения знаний студентами, осуществлять контроль результатов обучения, а студен-

там – приобретать умения и навыки самостоятельной учебной или практической деятельности. Самостоятельная работа требует соответствующего информационно-предметного обеспечения. Наряду с учебниками, учебными пособиями, конспектами лекций целесообразно использовать в самостоятельной работе студентов информационные образовательные ресурсы: электронный учебник, практикум по курсу, рекомендации по решению типовых задач, перечень вопросов к семинарам и экзаменам. Все это позволяет студенту эффективно организовать свою самостоятельную работу с учетом собственных возможностей и потребностей.

Дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» является дисциплиной государственного компонента учебного плана специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» и преподается на факультете прикладной математики и информатики БГУ на протяжении многих лет. Целью изучения данной дисциплины, наряду с освоением основных понятий и методов функционального анализа, является развитие у студентов системного математического мышления и выработки исследовательских навыков анализа прикладных задач. У студентов IT-специальностей (прикладная математика, информатика, кибербезопасность), которым преподается подобный курс, возникают определенные трудности с его усвоением. Поэтому на первый план выступает методическое обеспечение курса, которое, в первую очередь, нацелено помочь студентам освоить основные понятия функционального анализа и получить практические навыки решения задач. За время преподавания дисциплины значительно расширилось ее методическое обеспечение, появился ЭУМК по дисциплине, изданы учебные материалы по курсу [4–6]. В обучении активно используются новые образовательные технологии, обеспечивающие поддержку учебного процесса в среде дистанционного обучения Moodle с применением методов компьютерной математики.

Курс «Функциональный анализ и интегральные уравнения» размещен на образовательном портале ФПМИ <https://edufpmi.bsu.by/>, который поддерживается системой электронного обучения Moodle. В блоке «Общее» размещен электронно-методический комплекс, учебная программа [3], материалы по управляемой самостоятельной работе, материалы к экзамену и результаты текущей аттестации. Далее, в соответствии с учебной программой, размещаются разделы «Банаховы пространства», «Гильбертовы пространства и аппроксимация», «Сопряженные пространства и сопряженные операторы» и «Компактные множества и компактные операторы». В каждом разделе выделяется теоретическая и практическая части. В теоретической части размещен конспект лекций и слайды к каждой лекции. В процессе чтения лекций слайды носят иллюстративный характер. Они позволяют сконцентрировать внимание на этапы доказательства основных теорем, которые представлены на слайдах. В практической части приведены методические указания к решению задач по разделу и темы

практических и лабораторных занятий. В каждой теме приводятся образцы решения задач и задания для самостоятельной работы. Задания разнообразны по своему составу и рассчитаны как на студентов со средней математической подготовкой, так и на студентов, участвующих в олимпиадном движении. Последним предлагаются задачи на доказательство. Именно эти задачи способствуют развитию научно-исследовательских навыков. С учетом специфики специальности студенты на практических и лабораторных занятиях активно используют вычислительную технику. Так, при изучении темы «Аппроксимация в гильбертовых пространствах» студентам предлагается аппроксимировать функцию полиномами Лежандра, Чебышева и тригонометрическими многочленами, используя средства Wolfram Mathematica, результаты аппроксимации проиллюстрировать графически и сравнить погрешности аппроксимации. В теме «Принцип сжимающих отображений» рассматривается решение нелинейных уравнений и уравнений Фредгольма второго рода. Выполнение задания предполагает проведение теоретических исследований и написание программного кода на любом из языков программирования. Студенты, как правило, отдают предпочтение языку Python. Задания прикладного характера выполняются студентами с большим интересом и позволяют посмотреть на функциональный анализ не как абстрактную дисциплину, а как на дисциплину прикладного характера.

Результаты всех выполненных заданий по каждой теме оцениваются от 1 до 9 баллов и размещаются на портале в разделе текущей аттестации. Выполнение заданий на доказательство поощряются дополнительными баллами. На портале имеется тест к курсу, но тестирование используется не так часто. По результатам обучения пишется итоговая контрольная работа, примерный вариант которой имеется в учебной программе. Таким образом, в течение семестра студент может набрать 60 баллов для промежуточной аттестации (экзамена).

В заключении можно отметить, что преподавание довольно сложной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» требует особого методического обеспечения, включающего хорошо подобранную литературу, лекционный курс, методические пособия и указания к решению задач, а также продуманную оценку знаний в течение семестра.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Казаченок, В. В.** Развитие образования XXI века / В. В. Казаченок, П. А. Мандрик // Информатизация образования и методика электронного обучения : материалы II Междунар. науч. конф. : в 2 ч. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. – Ч. 1. – С. 25–32.

2. **Бровка, Н. В.** О структуре методической системы обучения студентов / Н. В. Бровка, Д. Г. Медведев // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы : материалы 42 Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов. – Смоленск : Смолен. ун-т, 2023. – С. 40–43.

3. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика». Рег. № 2762/б. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/334129>.

4. Дайняк, В. В. Метрические пространства : метод. указания к практ. занятиям : в 3 ч. / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. – Мн. : БГУ, 2020. – 52 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/241306>.

5. Дайняк, В. В. Гильбертовы пространства и аппроксимация : метод. указания к практ. занятиям : в 3 ч. / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. – Мн. : БГУ, 2020. – Ч. 1. – 52 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/256668>.

6. Дайняк, В. В. Банаховы пространства : метод. указания к практ. занятиям / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. – Мн. : БГУ, 2021. – 68 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/275205>.

УДК 004.42

## ПРИМЕНЕНИЕ ВАЙБ-КОДИНГА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

А. И. ЯКИМОВ, В. А. ПОМОЗОВ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

С развитием информационных технологий и искусственного интеллекта появляются новые методы программирования. Вайб-кодинг (от англ. *Vibe coding*) – это инновационный подход, при котором пользователь формулирует задачу на естественном языке, а искусственный интеллект (ИИ) генерирует, оптимизирует и отлаживает соответствующий код [1, 2].

В настоящее время ИИ хорошо генерирует шаблонные ответы и решает рутинные задачи, не ориентируясь на контекст большой задачи. Вайб-кодинг хорошо зарекомендовал себя при создании простых программ, решении шаблонных или простых задач. Например, при кодировании несложного алгоритма или небольшого программного модуля, идеален для прототипирования и экспериментирования.

Рассмотрим применение вайб-кодинга в образовательном процессе при изучении алгоритмов в теории графов. Пусть требуется написать программу для алгоритма Дейкстры при нахождении минимального пути от точки А до точки В. Промпт для ИИ может быть представлен так: «Реализовать алгоритм Дейкстры на Python с использованием библиотеки `networkx` и библиотеки для визуализации графа».

ИИ генерирует следующий код на Python (условно сокращена часть кода для визуализации графа):

```

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import heapq

def dijkstra(graph, start, end):
    """Алгоритм Дейкстры для поиска кратчайшего пути."""
    distances = {node: float('inf') for node in graph}
    distances[start] = 0
    previous = {node: None for node in graph}

    queue = [(0, start)]
    while queue:
        current_dist, current = heapq.heappop(queue)
        if current == end:
            break
        if current_dist > distances[current]:
            continue

    for neighbor, weight in graph[current].items():
        new_dist = current_dist + weight
        if new_dist < distances[neighbor]:
            distances[neighbor] = new_dist
            previous[neighbor] = current
            heapq.heappush(queue, (new_dist, neighbor))

    # Восстановление пути
    if distances[end] == float('inf'):
        return None, float('inf')
    path = []
    node = end
    while node:
        path.append(node)
        node = previous[node]
    path.reverse()
    return path, distances[end]

# Пример использования
if name == "main":
    # Ориентированный граф (вершина: {сосед: вес})
    graph = {
        'A': {'B': 4, 'C': 2},
        'B': {'D': 3, 'E': 1},
        'C': {'B': 1, 'D': 5},
        'D': {'E': 2, 'F': 1},
        'E': {'F': 4, 'D': 2},
        'F': {}
    }

```

```

}
start = 'A'
end = 'F'

# Находим кратчайший путь
path, distance = dijkstra(graph, start, end)
if path:
    print(f"Кратчайший путь от {start} до {end}:")
    print(" → ".join(path))
    print(f"Длина пути: {distance}")
    # Визуализируем
    visualize_graph(graph, path)
else:
    print(f"Путь от {start} до {end} не найден")

```

При исполнении кода получена визуализация графа на рис. 1.

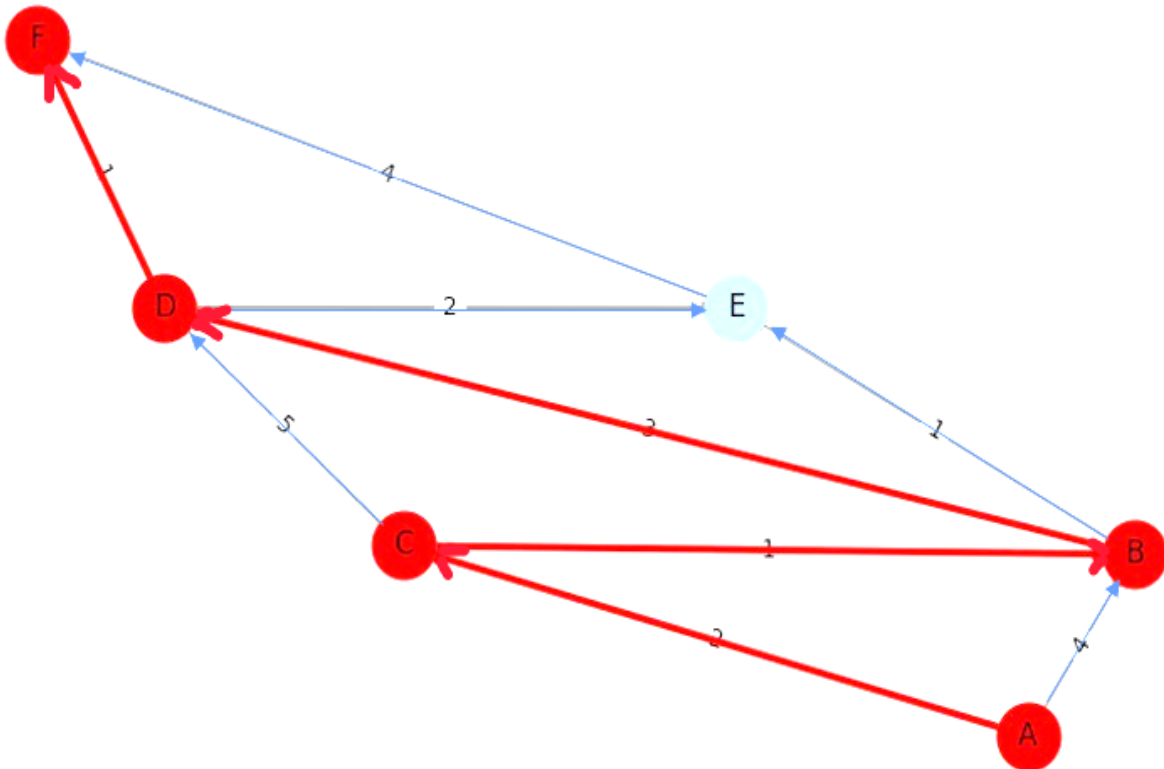


Рис. 1. Граф с кратчайшим путем A–C–B–D–F

Вайб-кодинг делает изучение алгоритмов теории графов увлекательным: студенты создают реальные прототипы (например, визуализаторы графов) за короткое время, усиливая чувство компетентности. Это соответствует теории самодетерминации, удовлетворяя потребности в автономии и релевантности через индивидуальные эксперименты. Вайб-кодинг в образовательном процессе ускоряет освоение алгоритмов, позволяя студентам сосредоточиться на логике

и структуре алгоритмов, а не на сложностях синтаксиса. Это делает процесс обучения более эффективным, открывая перед студентами возможности для творчества и инновационного мышления.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sapkota, R.** Vibe Coding vs. Agentic Coding: Fundamentals and Practical Implications of Agentic AI / R. Sapkota, K. I. Roumeliotis, M. Karkee. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.19443> (date of access: 20.12.2025).
2. **Horvat, M.** What is Vibe coding and when should you use it (or not)? / M. Horvat. – URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16747092> (date of access: 20.12.2025).

УДК 004.42

#### ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ПРИМА В ТЕОРИИ ГРАФОВ

А. И. ЯКИМОВ, К. В. БОГДАШЕВА  
Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Алгоритм Прима в теории графов – это жадный алгоритм для нахождения минимального остовного дерева в неориентированном графе с положительными весами. Он последовательно выбирает ребра, которые ведут к минимальному увеличению стоимости дерева, пока не будет соединена вся компонента связности [1].

В образовательном процессе рассматривают алгоритмическое описание.

Шаг 1. Инициализация.

1.1 Выбирают произвольную вершину графа и добавляют ее в остовное дерево.

1.2 Создают список всех ребер, которые соединяют текущие вершины остовного дерева с вершинами, не входящими в него.

Шаг 2. Выбор ребер.

Пока в остовном дереве не будут все вершины.

2.1 Из списка ребер выбирают ребро с минимальным весом.

2.2 Добавляют выбранное ребро и соответствующую вершину в остовное дерево.

2.3 Обновляют список ребер, добавив ребра, соединяющие новую вершину с остальными, не входящими в остовное дерево вершинами.

Шаг 3. Завершение.

Когда все вершины добавлены в остовное дерево, алгоритм останавливается.

Формальные определения позволяют избежать двусмысленности. Каждый

элемент и операция описываются четко, что облегчает понимание алгоритма. Используя теорию множеств, алгоритм становится более абстрактным и может применяться к различным типам графов и структурам данных. Это позволяет легко адаптировать алгоритм под различные требования. Формальные описания позволяют точно определить временную и пространственную сложность алгоритма, что полезно для оценки его эффективности и сравнения с другими алгоритмами. С помощью формальных методов можно легко проводить математические доказательства корректности алгоритма. Это включает в себя доказательство того, что алгоритм всегда находит минимальное остовное дерево. Формальные описания могут быть использованы для автоматической генерации кода или для верификации существующих алгоритмов с помощью программных инструментов.

Предлагается формальное описание алгоритма с использованием отношения инцидентности. Для этого введем символ отношения инцидентности  $\rightarrow$  (Юникод 22B8, Alt + X; имя Юникода – Multimap). Рассмотрим формальное описание на примере графа с тремя вершинами и нагруженными ребрами (рис. 1):  $V = \{A, B, C\}$  – множество вершин,  $E = \{(A, B), (A, C), (B, C)\}$  – множество ребер,  $p : E \rightarrow \{p(A, B), p(A, C), p(B, C)\}$  – функция, задающая веса ребер.

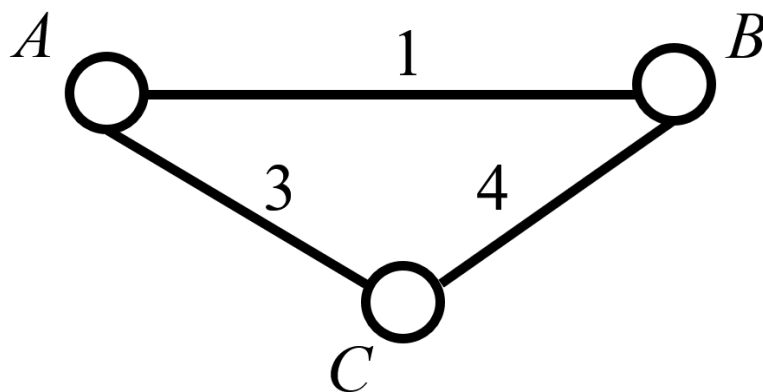


Рис. 1. Граф для реализации алгоритма Прима

Выбираем произвольную вершину  $A$ . Составляем список  $\Gamma \langle i \rightarrow A \rangle$  ребер  $i$ , инцидентных вершине  $A$ :

$$\Gamma(i \rightarrow A) = \{(A, B), (A, C)\}.$$

Определяем ребро с минимальным весом:

$$\min_i p(i \rightarrow A) = \min \langle p(A, B), p(A, C) \rangle = \min \langle 1, 3 \rangle,$$

$$\min_i p(i \rightarrow A) = p(A, B) = 1.$$

Выбираем ребро  $(A, B)$ . Теперь в дереве две вершины  $A, B$ . Доступные ребра  $(A, C)$  и  $(B, C)$ :

$$\Gamma(i \rightarrow A) \cup \Gamma(i \rightarrow B) \setminus \{(A, B)\} = \{(A, C), (B, C)\}.$$

Выбираем ребро  $(A, C)$  с минимальным весом:

$$\min \langle p(A, C), p(B, C) \rangle = \min \langle 3, 4 \rangle = p(A, C) = 3.$$

Дерево построено.

Предлагаемая формализация алгоритма Прима позволяет закрепить компетенции из теории множеств и отношений, может служить хорошей основой для более сложных концепций.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев, В. Е.** Теория графов : учеб. пособие / В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова. – Н. Новгород : Нижегород. гос. ун-т, 2017. – 119 с.

UDC 378.147:51

#### TEACHING GIFTED STUDENTS IN MATHEMATICS AN APPROACH OF WUHAN UNIVERSITY

Z. CHENG, H. FAN, M. WANG

Wuhan University

Wuhan, China

In modern times, the education of gifted students in mathematics has become a significant topic in the development of higher education. After carefully researching domestic and international trends in this field, we report the initiatives undertaken by School of Mathematics and Statistics, Wuhan University in teaching gifted students.

**A Curriculum Reformulation.** First, we have implemented a “14 + 8” curriculum reformulation to build a world-class undergraduate course system. We conducted an in-depth analysis of the current status of our previous undergraduate program, focusing on strengthening the depth and breadth of foundational theory, clarifying the targeted cultivation of gifted students, and identifying existing gaps with world-class universities. Drawing on the advanced experiences of top universities at home and abroad, particularly the undergraduate program standards School of Mathematical Sciences of Peking University, we made necessary adjustments to the 2025 undergraduate curriculum for our school. The main adjustments involve the consolidation of 14 major platform foundational courses and 8 core specialized compulsory courses.

Among these courses, we have consolidated core course teams and deepened our “1+3” course innovation model. In line with the curriculum adjustment requirements, the school actively promotes the innovative construction of the “1+3” course system. Here, “1” refers to major platform foundation courses, while “3” refers to three core courses: Mathematical Analysis, Algebra, and Geometry and Topology. To ensure the high-quality development of the course system, the school has established dedicated core course teaching teams. Team leaders are responsible for developing standardized syllabi and bilingual (Chinese-English) course descriptions. During course delivery, the teaching teams regularly conduct teaching seminars, collective lesson planning, and other activities to continuously optimize teaching content and methods, thereby enhancing the quality and outcomes of core courses.

Beyond core courses, we are implementing the “4+15” specialized course system. Centered on our four undergraduate majors, we systematically promote the construction of these knowledge structures, focusing on 15 core courses to leverage their intelligent and data-driven advantages. Based on the characteristics of each major and adhering to outcome-oriented principles, we have adopted a top-down approach to refine the knowledge graph system for majors such as Mathematics and Applied Mathematics. Aligned with professional development and talent cultivation goals, we have scientifically refined and quantified graduation requirements, designed a core course system that meets the knowledge and competency requirements for graduation, and are gradually building a comprehensive framework for professional knowledge.

Our school places great emphasis on undergraduate teaching and has comprehensively promoted a “4+11” classified teaching model aligned with the objectives of the undergraduate talent cultivation program. The “4” refers to the four departments that form the core of our discipline construction: Applied Mathematics, Information and Computing Science, Probability and Statistics, and Pure Mathematics. The “11” refers to the teaching and research offices established under these departments to refine course management. Through scientific coordination, the four departments ensure the rational and efficient allocation of teaching and research resources across the 11 offices, thereby enhancing the quality of talent cultivation.

**Stratified Teaching Methods.** Our School offers tailored plans for various student profiles, such as the Sino-French Elite Class, Hongyi Class, and Ziqiang Class. Our university has collaborated extensively with over 30 French universities and research institutions in mathematics since the 1980s. We have successively established the Sino-French Mathematics Center, a Sino-French Mathematics Experimental Class, and a Sino-French DEA Doctoral Preparatory Program. In 2024, our School introduced the Sino-French Mathematics Elite Class. As an outstanding example of Sino-French educational cooperation, this class represents a significant milestone in our international collaborations. Through close cooperation between Chinese and French universities and educational committees, this initiative, centered on the joint

cultivation of top talents, has fostered deep integration in talent cultivation systems, course construction, and academic exchanges. Students not only acquire a solid foundation in high-level theoretical mathematics but also significantly improve their French language proficiency and cross-cultural skills, which enhances their international competitiveness. The Elite Class provides strong support for cultivating high-end international mathematical talents and serves as an exemplary model for such educational cooperation.

For instance, the first Ziqiang Class, which graduated in 2025, demonstrated excellent academic performance, with all students achieving GPAs above 3.50. This fully showcases the students' exceptional abilities and the effectiveness of our cultivation model. The vast majority qualified for recommendation for exemption from the postgraduate entrance exam, and many have pursued advanced studies at top institutions abroad.

**“Mathematics+” Interdisciplinary Platform.** For gifted students that are not focusing on pure mathematics, our school actively builds a new “Mathematics+” interdisciplinary platform. Through deep collaboration with related disciplines within the university, such as science and engineering, economics, and medicine, we promote the systematic cultivation of compound, high-level innovative talents. Our school has currently established extensive cooperation with disciplines and platforms including economics, finance, key laboratory of remote sensing, artificial intelligence, the institute of digital intelligence, and the school of computer science, forming a multi-level and diversified interdisciplinary cultivation framework. This mechanism effectively broadens students' disciplinary perspectives, promotes interdisciplinary integration and resource sharing, and provides strong support for cultivating high-quality, comprehensive talents in the new era.

**The Climbing Project For Gifted Students.** For gifted undergraduate students, we have established an undergraduate research platform and launched the “2+11” Climbing Plan to broaden academic horizons, strengthen research training, and promote the high-quality development of undergraduate education. The plan adopts a tiered and systematic approach based on two major directions: pure mathematics and applied mathematics.

In the pure mathematics direction, we have six teaching and research offices: Analysis, Geometry and Topology, Differential Equations, Algebra, Mathematical Physics, and Probability Theory. We focus on students with solid theoretical foundations and an aspiration to delve deeply into the field, providing systematic research training.

In the applied mathematics direction, we leverage resources from five teaching and research offices: Control Science, Complex Systems and Intelligent Optimization, Computational Mathematics, Data Science, and Statistics. We aim to cultivate students' ability to innovate by applying mathematical theories to real-world problems.

Centered on systematically enhancing undergraduates' scientific research and innovation capabilities, the plan aims to lay a solid foundation for outstanding talents pursuing academic careers and technological innovation.

УДК 51.0, 004.8

ОБ ОПЫТЕ ПРОВЕДЕНИЯ В МГУ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ОТБОРОЧНЫХ ЭТАПОВ ОЛИМПИАД ПО МАТЕМАТИКЕ  
В УСЛОВИЯХ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧАСТНИКАМИ  
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

И. В. АСТАШОВА<sup>1,2</sup>, Е. А. АСТАШОВ<sup>1</sup>, Е. В. КОРОБКО<sup>1,2</sup>,  
О. Д. ПРОКОПЕНКО<sup>1,2</sup>, В. В. РОГАЧЕВ<sup>1,3</sup>, М. А. СТЕПАНОВА<sup>1</sup>,  
Э. Е. ТУСУПБЕКОВА<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова

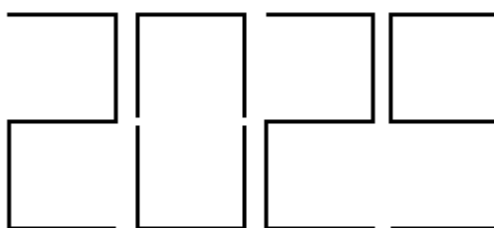
<sup>3</sup>Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
Москва, Россия

### Введение

С появлением, развитием и все более широким распространением AI-технологий появляется сложность в проведении олимпиад, особенно олимпиад, в которых требуется предварительный онлайн-тур. К обычным требованиям к олимпиадной задаче добавляется новое – нужно, чтобы задача не решалась простым запросом к ИИ. Поэтому приходится придумывать такие задачи, которые нынешний искусственный интеллект решить не в состоянии. В основном речь идет о моделях, находящихся в открытом доступе (GigaChat, Alice AI, ChatGPT).

**Анализ задач и их решений.** Проанализируем задачи, предложенные на отборочном туре олимпиады «Ломоносов» в 2025 г.

**Задача 1** (5–6 класс, № 1). Из спичек выложено число



Какое наибольшее четырехзначное число можно получить, переложив три спички? Цифры спичками пишутся так:



Сложность этой задачи для решения путем применения ИИ-технологий, заключается в правильном прочтении рисунка, который является непосредственно частью условия. Попытка решить задачу тремя предложенными чат-ботами дает следующий результат (табл. 1).

Табл. 1. Сравнение результатов задачи 1 для разных AI-моделей

Нейросеть	GigaChat (Sber)	Alice AI (Yandex)	ChatGPT
Ресурс	<a href="https://giga.chat">https://giga.chat</a>	<a href="https://alice.yandex.ru">https://alice.yandex.ru</a>	<a href="https://chatgpt.org/chat">https://chatgpt.org/chat</a>
Входящий запрос	Решите задачу. Из спичек выложено число 2025. Какое наибольшее четырехзначное число можно получить, переложив три спички?		
Ответ	5825	9999	Конечного ответа нет

**GigaChat (Sber).** Задачу со спичками распознал. Составил анализ каждой цифры (из каких состоит) и попытался посмотреть какие операции возможны для преобразования каждой из цифр.

**Возможные операции с цифрами.**

*Преобразовать 2 в 8, добавив одну спичку сверху (невозможно).*

*Преобразовать 2 в 3, убрав одну вертикальную линию слева ( $2 \rightarrow 3$ , минус одна спичка).*

*Преобразовать 2 в 5, поменяв положение одной горизонтальной линии внизу ( $2 \rightarrow 5$ , минус одна спичка).*

*Преобразовать 0 в 8, добавив две спички вертикально внутрь нуля ( $0 \rightarrow 8$ , плюс две спички).*

*Преобразовать 0 в 6, добавив одну спичку внутри снизу справа ( $0 \rightarrow 6$ , плюс одна спичка).*

*Преобразовать 5 в 6, добавив одну спичку сверху ( $5 \rightarrow 6$ , плюс одна спичка).*

*Преобразовать 5 в 9, добавив одну спичку внутрь верхней части ( $5 \rightarrow 9$ , плюс одна спичка).*

*Мы можем попробовать изменить первую цифру (2) на большую цифру, сохраняя остальные максимальными.*

При этом перебор делается, очевидно, не полный и на основе этого перебора предлагается следующая схема решения.

### **Переложение трех спичек.**

1. Попробуем преобразовать вторую цифру 0 в 8: добавляем две спички, получаем 2825. Оставшуюся спичку используем, чтобы превратить последнюю пятёрку в девятку (добавляем спичку): получается 2829.

Однако мы хотим сделать наибольшее число. Тогда попробуем ещё сильнее увеличить первые цифры.

2. Преобразуем первую двойку в тройку, убрав одну спичку слева ( $2 \rightarrow 3$ ), получим 3025. Затем превратим ноль в восьмёрку (+2 спички), получим 3825.

Но поскольку наша цель – максимальное число, попробуем дальше увеличивать.

3. Перевод первой двойки в пятёрку ( $2 \rightarrow 5$ ) путём изменения нижней горизонтали, что сэкономит нам одну спичку. Получаем 5025. Теперь переведём второй ноль в восьмёрку (+2 спички). Это даст нам 5825.

Теперь посмотрим, сможем ли мы получить больше, перемещая оставшиеся спички. Например, последняя цифра 5 может стать 9. Но тогда придется убрать и добавить дополнительную спичку, что приведет к перерасходу.

Итак, наиболее выгодный вариант, позволяющий сохранить четыре цифры и достичь максимального значения путем минимальных изменений, – перевести первое число 2 в 5, второе 0 в 8, оставив остальные неизменными.

Получается оптимальное решение: 5825.

Таким образом, наибольшее четырехзначное число, которое можно составить, переложив ровно три спички из исходного числа 2025, равно 5825.

Результат, т. е. ответ к задаче 1, GigaChat (Sber) дает, но он оказывается неверным.

**Alice AI (Yandex).** Аналогично, что и GigaChat, подходит к решению этой задачи: анализирует сколько спичек располагается в каждой из цифр. Делает вывод, что поскольку самое большое четырехзначное число – 9999, надо к нему стремиться, и пытается предложить путь, по которому можно это число достичь (не сразу, но путем «оптимизации»).

Разберем каждую цифру.

«5»  $\rightarrow$  «9»: добавить 1 спичку снизу ( $5 \rightarrow 6$  спичек) + 1 перемещение.

«6»  $\rightarrow$  «9»: убрать 1 спичку сверху ( $6 \rightarrow 5$  спичек), затем добавить ее снизу. Итого: 1 перемещение (перестановка).

«1»  $\rightarrow$  «9»: «1» состоит из 2 вертикальных спичек. Чтобы сделать «9», нужно добавить 4 спички (верхний и нижний контуры, правая вертикальная). Это требует 4 новых спичек, что невозможно, т. к. у нас только 3 перемещения.

Вывод: прямое превращение «1» в «9» невозможно за 3 перемещения. Значит, «9999» недостижимо.

Ищем альтернативу: заменим «1» на максимально возможную цифру за оставшиеся перемещения.

«1» → «7»: добавить 2 спички (верхний и нижний контуры) + 2 перемещения. Итого: 5 → 9 (1 перемещение), 6 → 9 (1 перемещение), 1 → 7 (2 перемещения) – уже 4 перемещения, что превышает лимит.

Оптимизируем:

5 → 9 (1 перемещение);

6 → 9 (1 перемещение);

8 → 9 (1 перемещение: убрать верхнюю горизонтальную спичку из «8» и поставить ее снизу, превращая в «9»).

Получаем: 9 9 9 9 – за 3 перемещения.

Ответ, который получается при использовании этого чат-бота, также оказывается неверным. Но и рассуждения, которые здесь приводятся, постепенно начинают решать другую задачу, получая неверный вывод.

**ChatGPT (GPT-5 mini).** Данный чат-бот, в отличие от предыдущих, задал вопрос пользователю, как именно составляются числа из спичек, и для продолжения общения с ним и поиска решений пришлось принять предположение, что имеется стандартная схема. При этом, аналогично Alice AI, он пытается стремиться к числу 9999 как к самому большому четырехзначному числу.

Классические методы показывают, что из цифр 2, 0, 2, 5 перемещение трех спичек позволяет получить число 9999 или максимально близкое, но для достижения 4 цифр требуется наличие нужных исходных и целевых цифр. В реальных конфигурациях переложить 3 спички из числа 2025 можно так, чтобы получить 9529, 9039 и подобные варианты; однако без конкретной схемы разметки цифр на спичках точно указать единственно верный максимум сложно.

Если хотите, могу:

1) уточнить принятую в задаче разметку цифр на спичках (7-сегментная или другая версия);

2) или предложить конкретные варианты переложенных спичек и выписать все полученные четырехзначные числа с их порядковыми максимумами.

Какой вариант предпочитаете: стандартная 7-сегментная разметка или другая схема?...

Далее происходили достаточно длинные рассуждения при решении этой задачи, и получился неединственный ответ. Среди предложенных вариантов, безусловно, можно вручную выбрать какой из них является максимальным, но, к сожалению, ни один из трех предложенных ответов не является верным в задаче. Продолжение дискуссии с данным чат-ботом все равно к успеху не привело.

На практике для стандартной 7-сегментной схемы ряд оптимальных вариантов дает такие примеры (последовательности исходных цифр справа в виде 4 цифр, после перемещений):

1) 2025 → 9529;

2)  $2025 \rightarrow 9039$ ;

3)  $2025 \rightarrow 9925$  и т. д., где первая цифра достигает 9, далее стараются максимизировать следующую и т. д.

Однако точный единственный максимум зависит от конкретной конфигурации перемещенных спичек и того, какие именно сегменты задействованы в каждой цифре после перемещения. Без визуального чертежа схематично привести один «единственный» ответ рискованно.

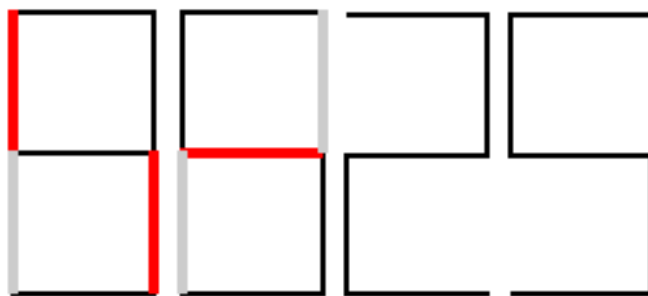
Если хотите, могу:

1) показать конкретный набор шагов (какие 3 спички переместить из каких цифр в какие позиции) и выписать все получаемые 4-значные числа, затем выбрать максимальное;

2) или нарисовать трассировки для цифр 2, 0, 2, 5 в стиле 7-сегментной схемы и привести точный максимальный результат.

Предложим одну из возможных схем рассуждения для решения этой задачи.

В действительности, можно следить за тем, как изменяется каждая из цифр, причем мы должны потратить не более, чем 3 действия. Поскольку мы стремимся к максимальному четырехзначному числу, то по очереди, начиная справа налево, будем изменять цифры. Чтобы из первой цифры сделать 9, необходимо удалить одну из палочек и дорисовать 2 (часть этих действий можно совместить). Итого, можно минимум за 2 действия и использования 1 палочки извне получить цифру 9. То есть одну палочку нужно будет извлечь из другой цифры и не более чем за 2 оставшихся действия придется сделать «читаемую» цифру. Продолжив эти рассуждения, можно прийти к следующему ответу: 9525, причем схема изменения спичек следующая:



Эта задача предлагается для решения школьникам 5–6 классов, и, поскольку она предложена на заочный тур олимпиады «Ломоносов» по математике, где требуется найти только ответ, от школьника не требуется обоснование максимальности такого числа. Также наличие онлайн-тура всегда предполагает возможность создать равнозначные по сложности и идее варианты одной и той же задачи. В случае с задачей 1 в разных вариантах было предложено рассмотреть еще числа 2020 и 2099.

Продолжая идею обязательного включения в условие задачи картинки, школьникам 5–6 классов также была предложена следующая задача. Бесплатные AI-модели часто ограничены в возможности добавлять картинку к условию задачи. Посмотрим на условие.

**Задача 2** (5–6 класс, № 4). На башне из кубиков стоит Щелкунчик (рис. 1). У подножия башни верный слуга-солдатик хочет передать ему саблю, чтобы тот одолел Мышиного короля. На каждом ярусе башни стоят игрушечные солдатики, которые могут передавать саблю друг другу снизу вверх (только при условии, что они стоят друг под другом), могут перемещаться по своему уровню строго горизонтально и не могут прыгать с уровня на уровень (Щелкунчик тоже может ходить только по своему уровню). Переместиться по своему уровню на 1 клетку игрушка может за 1 секунду, переместить саблю на 1 уровень – тоже ровно за 1 секунду. За какое наименьшее время можно передать саблю Щелкунчику? Ведь Мышиный король близко. (Вдоль своего уровня можно перемещаться на нецелое число клеток. Длина стороны у всех кубиков одинакова.) Красная точка – это слуга-солдатик со шпагойй.

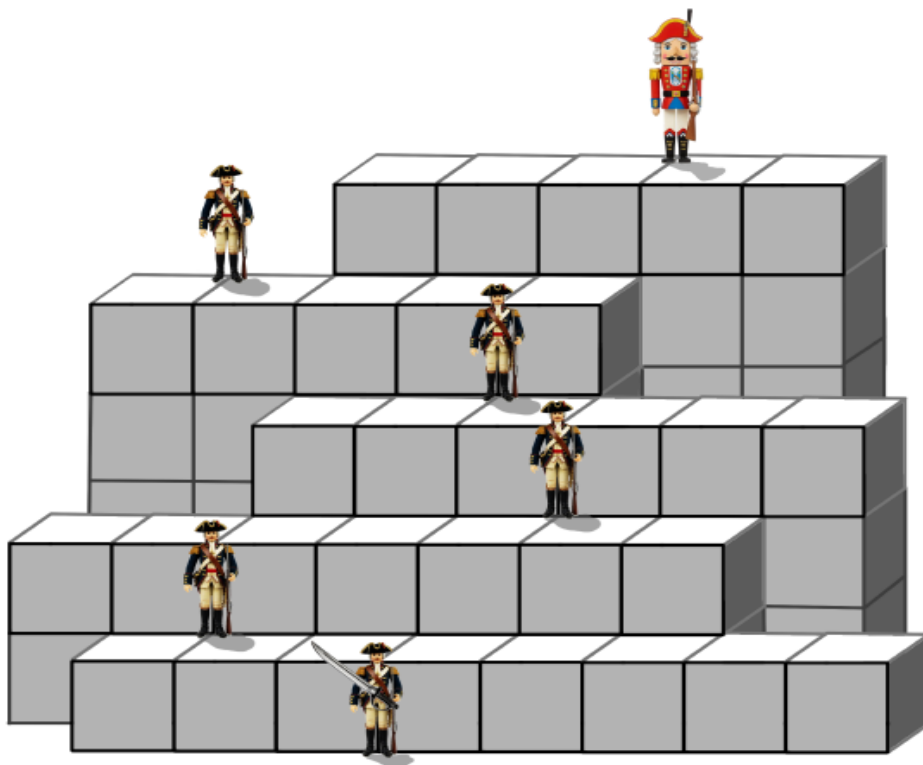


Рис. 1

Эту задачу было предложено решить двум популярным ресурсам (которые в бесплатной версии позволяют загружать картинки): Alice AI (Yandex, <https://alice.yandex.ru>) и GigaChat (Sber, telegram-бот @gigachat\_bot). Основная сложность, с которой столкнулись оба ресурса, – это правильно истолковать

картинку. К сожалению, ни один из предложенных ресурсов не смог обработать эту картинку верно (понять, сколько уровней и где стоят солдаты). Соответственно, решить правильно задачу у них не получилось.

#### Интерпретация условия **Alice AI**.

*Уровень 0 (основание): слуга-солдатык с саблей находится примерно над 3-м кубиком слева (позиция  $X = 3$ ).*

*Уровень 1: три солдата. Их  $X$ -позиции: примерно 2, 4 и 6 (слева направо).*

*Уровень 2: два солдата. Их  $X$ -позиции: примерно 3 и 5.*

*Уровень 3 (вершина): Щелкунчик. Его  $X$ -позиция: примерно 5.*

Решение задачи Alice AI.

*Общее минимальное время:*

*2 (этап 1) + 2 (этап 2) + 1 (этап 3) = 5 секунд.*

*Ответ: 5 секунд.*

#### Интерпретация и решение задачи **GigaChat (Sber)**.

*Для решения задачи нам нужно определить минимальное время, за которое слуга-солдат может передать саблю от Щелкунчика к Мышиному королю.*

*1. Определение количества клеток, которые нужно пройти.*

*Щелкунчик находится на вершине башни, а Мышиный король – у подножия.*

*Башня состоит из кубиков и на каждом уровне количество кубиков уменьшается на один.*

*Таким образом, чтобы добраться от вершины до подножия, слуга-солдат должен пройти через все уровни башни.*

*2. Расчет времени.*

*Время, за которое слуга-солдат может переместиться по своему уровню, составляет 1 секунду.*

*Время, за которое слуга-солдат может переместить саблю на 1 уровень вниз, также составляет 1 секунду.*

*Поскольку слуга-солдат должен пройти через все уровни башни, общее время будет равно количеству уровней башни.*

*3. Определение количества уровней.*

*На изображении видно, что башня состоит из 4 уровней.*

*Таким образом, минимальное время, за которое слуга-солдат может передать саблю от Щелкунчика к Мышиному королю, составляет 4 секунды.*

Однако, если упростить иллюстрацию, возможность правильной интерпретации увеличивается. Теперь в качестве входящего запроса обоим моделям была задана следующая картинка (рис. 2).

GigaChat, в отличие от Alice AI, смог правильно интерпретировать условие задачи, но при решении он отдельно рассматривает каждый уровень и не учитывает, что движение солдатиков может происходить одновременно. Ответы же будут следующие: **Alice AI** (все еще считает, что только четыре уровня, и не понимает, где какой солдатик располагается) –  $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$  секунд,

у **GigaChat** интерпретация условия лучше, но ответ неверный –  $3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 = 15$  секунд.

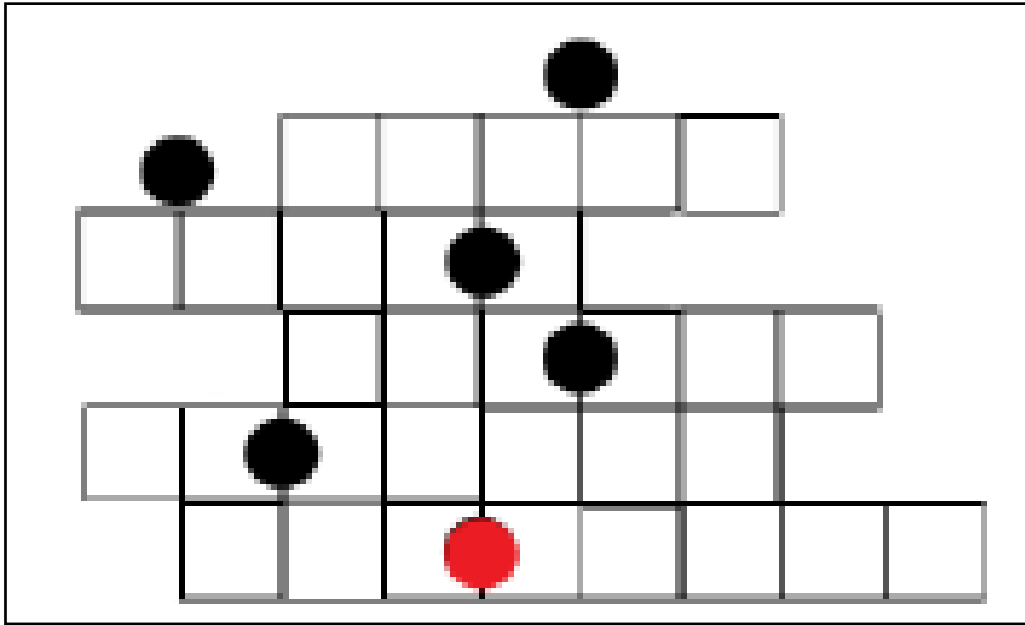


Рис. 2

Мы же предлагаем следующее решение.

Заметим, что задача солдатиков на соседних уровнях – встретиться как можно быстрее, т. е. сделать так, чтобы расстояние между ними сократилось как можно быстрее. Причем сокращать расстояние они могут, пока товарищи на нижних уровнях перемещаются и пока передают саблю на уровень выше. Поднять саблю с 1-го на 6-й уровень можно не менее чем за 5 секунд. Также солдатики на 1-м и 2-м уровне могут встретиться самое раннее через 1 секунду. Поэтому саблю можно передать Щелкунчику не менее чем за 6 секунд. Пример, как это можно сделать за 6 секунд, приведены на рис. 3 (солдатык – черный кружок, солдатик с саблей – красный кружок): саблю поднимают на 2-й уровень за 2 секунды, а далее со 2-го уровня на 6-й солдатики передают ее за 4 секунды.

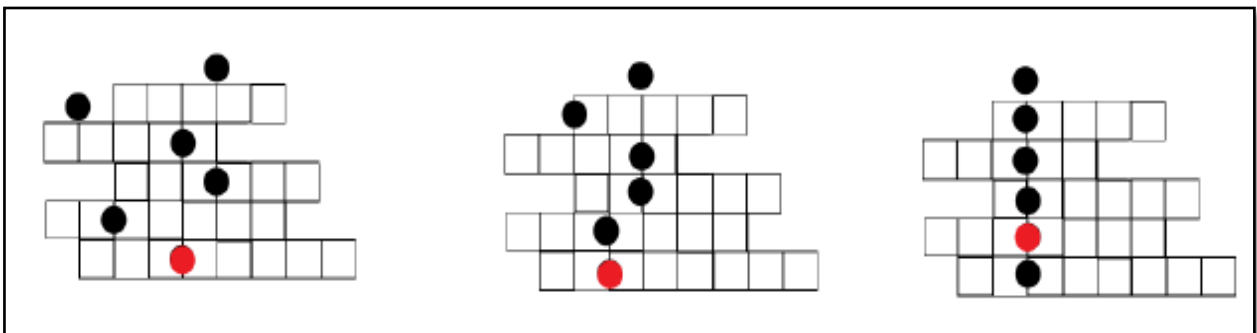


Рис. 3

**Задача 3** (7–8 класс, № 1). На стене висят в ряд трое часов с маятниками. Мышка хочет перебраться по маятникам с левого шкафа на правый. Пересесть с маятника на маятник или с маятника на шкаф можно только тогда, когда они соприкасаются. Первоначально маятники расположены как на рис. 4. Первый маятник делает 3 колебания в минуту, второй – 4, третий – 4. Через сколько секунд мышка окажется на правом шкафу?



Рис. 4

**GigaChat** получил 60 секунд, **Alice AI** – 75 секунд. Найти правильный ответ (45 секунд) у моделей не получилось.

Все модели избрали схожий путь решения: используя НОК, нашли либо НОК всех трех периодов маятников, либо попарно двух. Мы не будем приводить отдельно рассуждения каждой из моделей, отметим лишь, что они пришли к совершенно разному ответу, несмотря на схожие этапы решения.

**Авторское решение** следующее.

*Мышка сразу забирается на первый маятник. Когда первый соприкоснется со вторым? В такое время  $T_1$ , за которое первый маятник сделает ровно  $n$  с половиной колебаний, а второй –  $m$  колебаний ( $n, m$  – целые числа). То есть*

$$3T_1 = n + 0,5; \quad 4T_1 = m; \quad \frac{n + 0,5}{3} = \frac{m}{4}; \quad 4n + 2 = 3m,$$

$$n = 1, \quad m = 2, \quad T_1 = \frac{1}{2}.$$

*Теперь посмотрим, сколько времени займет пересадка со второго маятника на третий. В момент  $T_1 = 0,5$  центральный маятник отклонен влево, а правый маятник сделает за 0,5 мин 2 колебания, т. е. он будет отклонен направо.*

*Значит, теперь надо подождать  $T_2$  секунд, пока второй маятник не сделает  $i$  с половиной колебаний, а третий –  $j$  с половиной ( $i, j$  – тоже целые).*

$$4T_2 = i + 0,5; \quad 4T_2 = j + 0,5; \quad \frac{i + 0,5}{4} = \frac{j + 0,5}{4},$$

$$i = 0, \quad j = 0, \quad T_2 = \frac{1}{8}.$$

После этого останется подождать, пока третий маятник совершит половину колебания (вернется к шкафу) – это  $T_3 = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8}$ .

Всего получается  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$  минуты, т. е. 45 секунд.

Таким образом, у современных ИИ-моделей остаются трудности в решении нестандартных задач.

Еще одна предложенная школьникам задача.

**Задача 4** (5–6 класс, № 6; 7–8 класс, № 6). На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (рис. 5). Окна отмечены квадратами, двери – кругами. Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) – будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

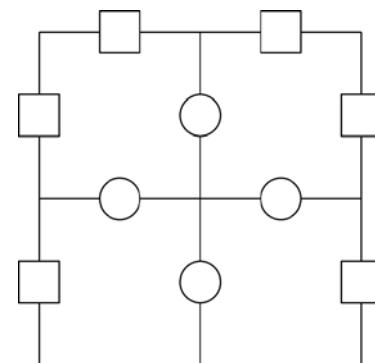


Рис. 5

Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?

В целом, у всех трех моделей не замечено проблем с интерпретацией условия задачи (чтобы получить возможность загружать в ChatGPT картинки, пришлось воспользоваться другой версией сайта <https://chatgpt.com/>).

Задача предполагает в качестве решения провести некий адекватный и оптимальный полный перебор для подсчета количества способов, и ИИ-модели пытаются его провести.

Начнем с ИИ-модели, которая в этой задаче справилась хуже всего – **GigaChat**.

На рисунке изображены четыре комнаты, три двери и шесть окон. Каждая дверь и каждое окно могут быть либо открыты, либо закрыты.

Для того чтобы не было сквозняка, необходимо убедиться, что между любыми двумя открытыми дверями или окнами нет прямого пути.

Рассмотрим возможные варианты.

1. Открыть все двери и окна. В этом случае будет сквозняк, т. к. между любыми двумя открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

2. Открыть только одну дверь или окно. В этом случае не будет сквозняка, т. к. нет прямого пути между открытыми дверями или окнами.

3. Открыть две двери или окна. В этом случае может быть сквозняк, если между открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

4. Открыть три двери или окна. В этом случае может быть сквозняк, если между открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

5. Открыть четыре двери или окна. В этом случае может быть сквозняк, если между открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

6. Открыть пять дверей или окон. В этом случае может быть сквозняк, если между открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

7. Открыть шесть дверей или окон. В этом случае будет сквозняк, т. к. между любыми двумя открытыми дверями или окнами есть прямой путь.

Таким образом, чтобы не было сквозняка, необходимо открыть только одну дверь или окно.

Как можно видеть, несмотря на верную интерпретацию условия задачи, получить хоть сколько-то близкий к требуемому ответ у AI-модели не получилось.

**Alice AI (Yandex)** предлагает достаточно длинные рассуждения с полным перебором, разбив этот перебор на подзадачи.

*Разбиение подсчета на случаи.*

*Случай 1: ни одного открытого окна (0 открытых окон).*

*Случай 2: ровно одно открытое окно (1 открытое окно).*

*Случай 3: два и более открытых окон, но при этом двери расположены так, что открытые окна оказываются в несвязанных частях здания.*

Несмотря на верную идею, реализовать ее с верным ответом модель оказалась не в состоянии, предоставив следующий вывод.

*Итоговый подсчет.*

*Случай 1: 8 способов.*

*Случай 2: 48 способов.*

*Модифицированный случай 3: 11 способов.*

*Общее количество способов:  $8 + 48 + 11 = 67$ .*

*Ответ: 67.*

Теперь обратимся к **ChatGPT**. Он предложил интересную интерпретацию данной задачи с помощью графов.

*Графовая интерпретация.*

*Каждая комната – вершина графа.*

*Открытая дверь – ребро между соответствующими комнатами.*

*Открытое окно – связь комнаты с «внешним миром».*

*Сквозняк возникает тогда и только тогда, когда две разные комнаты, в которых есть открытые окна, лежат в одной связной компоненте по открытым дверям.*

Но итоговый подсчет все равно сделан неверно. Модель так же, как и Alice AI, рассматривает перебор трех случаев и, не раскрывая подробнее внутренний перебор, делает ошибочные подсчеты.

Итоговый подсчет: складываем все допустимые случаи:  $36 + 48 + 16 + 7 = 107$ .

Ответ: существует 107 способов открыть и закрыть двери так, чтобы не было сквозняка.

Сравните с **оригинальным решением задачи.**

*Решение*

В зависимости от того, как раскрыты двери, на этаже образуется несколько изолированных друг от друга «отсеков». Внутри каждого отсека получается какое-то количество окон  $k$ , и сквозняк внутри отсека будет, если там открыто два или более окна. Следовательно, безопасных вариантов на отсек будет  $k + 1$  – один вариант «все окна закрыты» плюс  $k$  вариантов «открыто только одно из окон». Числа безопасных вариантов на каждый отсек нужно перемножить между собой. Распишем возможные случаи (на рис. 6 будут показаны отсеки и число окон в них).

В сумме получится следующий ответ:  $36 + 24 + 24 + 27 + 15 + 15 + + 16 + 7 = 164$ .

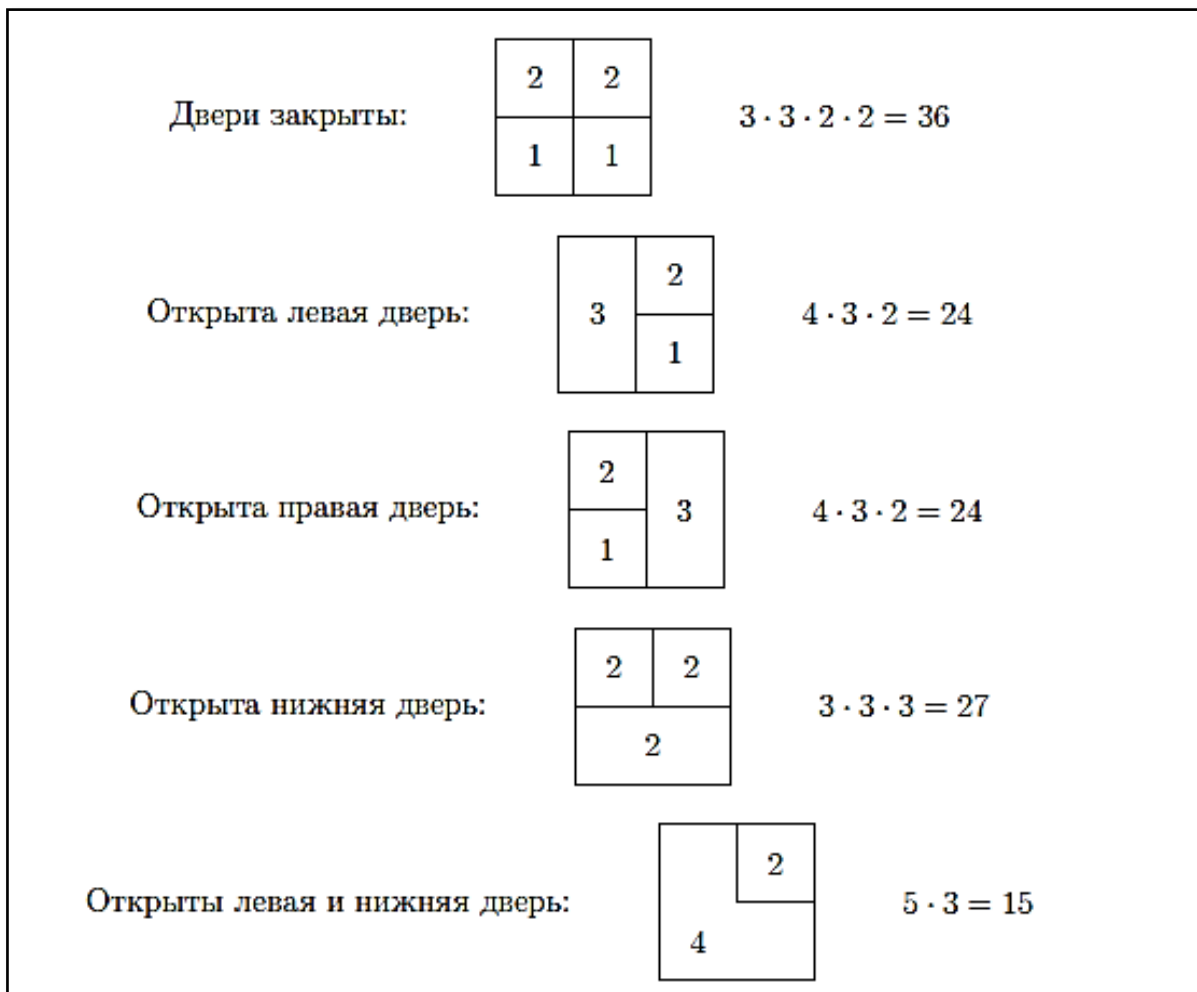
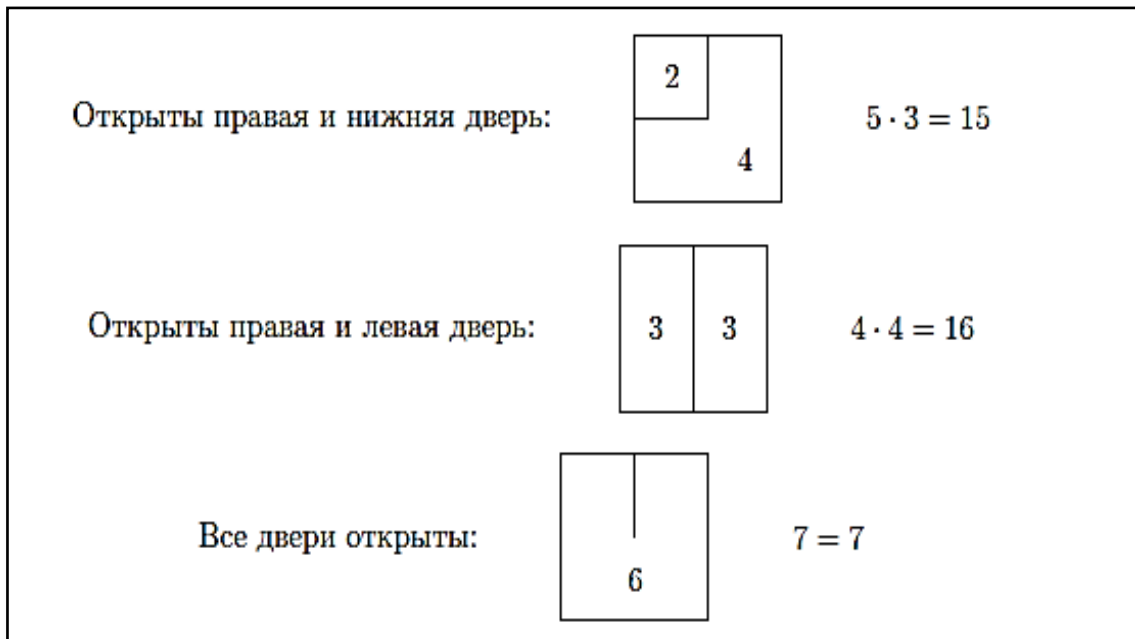


Рис. 6



Окончание рис. 6

Приведем еще несколько примеров.

**Задача 5** (11 класс, № 4). Пятиугольная звезда носит штаны (рис. 7). Во сколько раз площадь звезды больше площади штанов?

Звезда правильная, т. е. она строится из пяти отрезков, соединяющих несоседние вершины правильного пятиугольника.

Несмотря на то, что нейросети без вопросов приняли слово «штаны» в формулировке и действительно сопоставили его с синим пятном, сколько-нибудь адекватно воспринять геометрическую реальность задачи они не смогли.

**GigaChat** просто запутался в собственных выкладках – он раз за разом получал нулевое отношение, поправлял себя и снова повторял ту же ошибку.

*Площадь звезды. Площадь правильной пятиугольной звезды можно вычислить как разность площади описанного вокруг нее правильного пятиугольника и пяти равнобедренных треугольников, которые образуются при вырезании из пятиугольника звезды.*

*Площадь правильного пятиугольника со стороной  $a$  равна:*

$$S_{\text{пятиугольник}} = \frac{5}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{5}.$$

*Площадь одного равнобедренного треугольника, который вырезается из пятиугольника, равна:*



Рис. 7

$$S_{\text{треугольник}} = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Таким образом, площадь звезды равна:

$$S_{\text{звезда}} = S_{\text{пятиугольник}} - 5S_{\text{треугольник}} = \frac{5}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{5} - \frac{5}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Площадь штанов. Штаны представляют собой два равнобедренных треугольника, каждый из которых имеет площадь:

$$S_{\text{штаны}} = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{5} = a^2 \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Отношение площадей. Отношение площади звезды к площади штанов равно:

$$\frac{S_{\text{звезда}}}{S_{\text{штаны}}} = \frac{\frac{5}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{5} - \frac{5}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{5}}{a^2 \sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{4} \frac{\cot \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} - \frac{5}{2}.$$

Используя известные тригонометрические тождества, можно упростить это выражение. Известно, что  $\cot \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5}}$  и  $\sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$ . Подставляя эти значения, получаем

$$\frac{S_{\text{звезда}}}{S_{\text{штаны}}} = \frac{5}{4} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5} 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}} - \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} - \frac{5}{2}.$$

После упрощения и использования значений тригонометрических функций получаем

$$\frac{S_{\text{звезда}}}{S_{\text{штаны}}} = \frac{5}{8} \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

Это выражение неверно, т. к. мы допустили ошибку в упрощении. Правильное выражение для отношения площадей звезды и штанов:

$$\frac{S_{\text{звезда}}}{S_{\text{штаны}}} = \frac{5}{4} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5} 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}} - \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} - \frac{5}{2}.$$

После упрощения и использования значений тригонометрических функций получаем

$$\frac{S_{\text{звезда}}}{S_{\text{штаны}}} = \frac{5}{8} \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

Это выражение неверно, т. к. мы допустили ошибку в упрощении. Правильное выражение для отношения площадей звезды и штанов: ... .

**Alice AI** показала себя уверенней – ее рассуждения хотя бы добрались до ответа (впрочем, неверного).

*Чтобы решить задачу, нужно сравнить площади двух фигур: всей правильной пятиугольной звезды (пентаграммы) и ее «штанов» (нижней части, закрашенной синим на рисунке).*

*Шаг 1. Площадь правильной пятиугольной звезды (пентаграммы).*

*Правильная пентаграмма состоит из:*

- центрального правильного пятиугольника;
- 5 одинаковых равнобедренных треугольников, примыкающих к сторонам пятиугольника.

*Площадь пентаграммы ( $S_S$ ) можно выразить как сумму площади центрального пятиугольника ( $S_5$ ) и площадей 5 треугольников ( $S_\Delta$ ):  $S_S = S_5 + 5 S_\Delta$ .*

*Шаг 2. Площадь «штанов» (нижней части звезды).*

*«Штаны» представляют собой один из равнобедренных треугольников ( $S_\Delta$ ), составляющих звезду, плюс часть центрального пятиугольника, которая попадает под этот треугольник.*

*Если внимательно рассмотреть симметрию пентаграммы:*

*1) «штаны» занимают ровно 1/5 часть всей звезды по вертикали (т. к. звезда симметрична и делится на 5 равных секторов);*

*2) следовательно, площадь «штанов» ( $S_{Ш}$ ) равна площади одного такого сектора:  $S_{Ш} = (S_S) / 5$ .*

*Шаг 3. Нахождение отношения площадей.*

*Нам нужно найти, во сколько раз площадь звезды больше площади «штанов»:  $\text{Отношение} = S_S / S_{Ш}$ .*

*Подставляем  $S_{Ш} = S_S / 5$ .  $\text{Отношение} = S_S / (S_S / 5) = 5$ .*

*Ответ: площадь звезды в 5 раз больше площади «штанов».*

*Обоснование: симметрия правильной пентаграммы делит ее на 5 равных по площади секторов, один из которых соответствует «штанам».*

Красным помечены ее очевидные ошибки, из которых следует неправильный ответ (правильный ответ равен  $5 - \sqrt{5}$ ).

Создатели нейросетей, конечно, не считают этичным решать олимпиадные задачи с помощью нейросети. Их декларируемое применение – «... самообразование. Нейросети могут помогать в изучении математики и других дисциплин, предлагая пошаговые решения задач, объясняя методы решения, генерируя дополнительные примеры для практики ...».

Но по допущенным ошибкам видно, как опасно использовать нейросеть даже в качестве помощника в учебе. Стоит задаче хоть немного отойти от типовой формулировки – и нейросеть теряется, но с уверенным тоном делает неправильные заявления, только по форме похожие на математические рассуждения. Причем эти рассуждения могут соседствовать с правильными наблюдениями,

и только с опытом и терпением (которых у ученика, скорее всего, нет) получится отделить правду от неправды.

Не обязательно ставить геометрическую задачу, или снабжать задачу иллюстрацией, чтобы поставить нейросеть в тупик.

**Задача 6** (11 класс, № 8). В школьном гардеробе имеется 12 пронумерованных вешалок. Два гардеробщика решили сыграть в такую игру. Первый из них вешает номерок с числом 1 на произвольную вешалку. А второй последовательно развешивает оставшиеся номерки с числами от 2 до 12 на свободные вешалки по следующему правилу: если вешалка с номером, совпадающим с числом на номерке, свободна, то номерок вешают на эту вешалку. В противном случае номерок вешают на любую свободную вешалку. Сколько существует способов развесить номерки так, чтобы номерок с числом 12 оказался на 12-й вешалке?

**Правильное авторское решение.**

*Докажем индукцией по количеству  $N > 1$  вешалок в гардеробе, что возможных способов имеется  $2^{N-2}$ .*

*База индукции:  $N = 2$ . Число способов равно единице.*

*Шаг индукции: предположим, что для  $(N - 1)$  вешалок ответ верен, докажем для  $N$  вешалок.*

*Если 1-й номерок повесить на 1-е или  $N$ -е место, то остальные номерки размещаются однозначно. При этом ясно, что из этих двух размещений нам подходит только такое, при котором 1-й номерок висит на 1-й вешалке.*

*Далее, заметим, что если 1-й номерок оказался на  $(N - j)$ -й вешалке, то число нужных расстановок такое же, как и для  $(j + 1)$  вешалок (т. к. номерки со 2-го по  $(N - j - 1)$  развешиваются однозначно. Поэтому для  $N$  вешалок имеем  $1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{N-3}) = 2^{N-2}$ . Для 12 вешалок ответ равен 1024.*

**ChatGPT** и **Alice AI** сошлись во мнении, что ответ на эту задачу равен  $11! = 39916800$ . Ответ больше настоящего примерно в 40 тыс. раз. Обе нейросети в сущности пропустили правила игры, превратив задачу в типовую – «Сколькими способами можно развесить 12 номерков по 12 крючкам так, чтобы 12-й оказался на своем месте?» – и типовую задачу решили правильно. **GigaChat** не смог даже этого – он отвлекся на нюансы правил игры и полностью в них запутался. В сокращенном виде его рассуждения такие: «Первый номерок может висеть 12 способами, а номерки со 2-го по 11-й каждый висят либо на своем месте, либо не на своем (два варианта для каждого), поэтому ответ равен  $12 * 2^10 = 12 * 1024$ ». Благодаря этим ошибкам, впрочем, названное число отличается от настоящего ответа всего-то на порядок.

**Задача 7** (10 класс, № 5). Есть правильный шестиугольник (рис. 8). Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции 1:1. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем еще и еще, пока операция не будет проведена 6 раз. Какая пропорция между площадью внутреннего шестиугольника и площадью синей области?

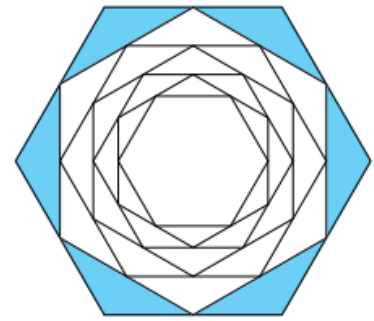


Рис. 8

Решение **GigaChat** начинается так.

*Для решения задачи рассмотрим процесс построения шестиугольников и вычислим площадь каждого из них.*

*Первый шестиугольник. Пусть площадь первого шестиугольника равна  $S_1$ .*

*Второй шестиугольник. Вершины второго шестиугольника делят стороны первого в пропорции 1:1. Это означает, что второй шестиугольник вписан в первый таким образом, что его стороны параллельны сторонам первого шестиугольника и вдвое короче. Площадь второго шестиугольника  $S_2$  будет равна 0,25 площади первого шестиугольника, т. к. площадь правильного шестиугольника пропорциональна квадрату длины его стороны ...*

**Alice AI** ошибается также. Она тоже считает, что с каждой итерацией площадь уменьшается в 4 раза.

Также обе нейросети говорят, что «голубая область» – это разница между первым и шестым шестиугольником (на самом деле между первым и вторым). Несмотря на такое сходство заблуждений, ответы у нейросетей разные. Одна получила 1/1023, другая – 1/4095.

Очевидно, стороны второго шестиугольника меньше сторон первого, но не в 2 раза. Если рассмотреть голубой треугольник и использовать теорему синусов, можно найти отношение сторон шестиугольников, равное  $\sqrt{3}/2$ . Увидеть треугольник, сопоставить стороны треугольника со сторонами шестиугольников нейросети не смогли. Однако слова «так далее» истолкованы верно, и обе нейросети используют геометрическую прогрессию.

**Задача 8** (9 класс, № 8; 10 класс, № 6). Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковер размером  $300 \times 150$  прямоугольной шваброй размером  $40 \times 30$ . Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории – ковер нужно протереть одним движением, причем швабра должна закончить свое движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной сво-

ей точкой задевает ковер – скорость движения становится равна 4. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковер целиком.

**Правильный ответ:** 261.

Основная идея решения в том, что швабру надо расположить под углом так, чтобы ее диагональ была параллельна стороне ковра, т. к. диагональ – самое широкое сечение швабры. Догадаться до этого ни одна из опробованных нейросетей не смогла – все они, так или иначе, действовали в предположении, что стороны швабры параллельны сторонам ковра.

**ChatGPT** получил сравнительно правдоподобное в таком предположении число 300. Однако даже если бы в условии было требование «стороны швабры параллельны сторонам ковра», это был бы ошибочный ответ (правильный ответ с таким предположением был бы равен 330). Нейросеть правильно выделила четыре полосы длиной 300, по которым проходит швабра, и не ошиблась в арифметике, но не учла дополнительное время, за которое швабра сходит с ковра, ничего при этом не протирая. Эта поправка удлиняет длину каждой полосы на длину швабры, на 30.

**Alice AI** и **GigaChat** получили заведомо неправильные ответы: 132,5 и 75.

**Alice AI** попыталась учесть собственную длину швабры (правда, учла ее дважды), но запуталась и в действительности будто бы протерла половину периметра ковра – прошла один раз вдоль, один раз поперек, но не заполнила всю площадь.

*Шаг 1. Определение траектории.*

*Пусть швабра движется вдоль длинной стороны ковра (300), а ее короткая сторона (30) параллельна короткой стороне ковра (150).*

*Тогда швабра должна пройти вдоль всей длины ковра (300) + запас для покрытия краев (по 40 с каждой стороны, т. к. ширина швабры 40).*

*Общий путь по длине:  $300 + 40 + 40 = 380$ .*

*По ширине ковра (150) швабра должна «шагать» с шагом 30 (ее ширина), чтобы покрыть всю ширину. Количество таких «шагов»:  $150 / 30 = 5$ .*

*Шаг 2. Расчет времени движения по ковра.*

*Движение по длине (380) со скоростью 4: время =  $380 / 4 = 95$ .*

*Движение по ширине (5 «шагов», каждый – 30): время для одного «шага» =  $30 / 4 = 7,5$ . Общее время для 5 шагов:  $7,5 \times 5 = 37,5$ .*

*Общее время на ковре:  $95 + 37,5 = 132,5$ .*

*Шаг 3. Учет движения вне ковра (ускоренное).*

*Швабра начинает и заканчивает движение на паркете (вне ковра) с «бесконечной» скоростью, поэтому это время можно считать нулевым. Главное – обеспечить корректное начало и конец траектории...*

**GigaChat** вовсе забыл про ширину ковра.

*Оптимальный путь для швабры – это движение вдоль одной из сторон ковра. Например, если швабра движется вдоль длинной стороны ковра (300),*

то она должна пройти расстояние 300. Поскольку ширина швабры 30, она сможет покрыть всю ширину ковра за один проход.

Время: время, необходимое для протирания ковра, равно длине пути, деленной на скорость. В данном случае длина пути равна 300, а скорость – 4. Таким образом, время  $t = 300/4 = 75$ .

Однако нельзя сказать, что геометрия нейросетям полностью неподвластна, что показывает следующая задача.

**Задача 9.1** (10 класс, № 8; 9 класс, № 4). На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером  $55 \times 100$ . Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

**Правильный ответ:** 6050, используются два квадрата со сторонами 55.

С такой задачей **Alice AI** справилась.

Решим задачу пошагово: нужно накрыть прямоугольное пятно  $55 \times 100$  тремя (или меньше) квадратными ковриками так, чтобы суммарная площадь квадратов была минимальной. Стороны квадратов должны быть параллельны сторонам прямоугольника.

*Шаг 1. Понимание ограничений и цели.*

*Разрешено использовать не более 3 квадратов.*

*Квадраты можно накладывать друг на друга и «вылезать» за границы пятна.*

*Цель: минимизировать сумму площадей квадратов, полностью покрывающих прямоугольник  $55 \times 100$ .*

*Шаг 2. Базовые соображения.*

*Один квадрат должен быть не меньше максимальной стороны прямоугольника, т. е.  $\geq 100$  (иначе не накроет длину 100). Площадь такого квадрата:  $100^2 = 10\,000$ .*

*Но можно попробовать два или три меньших квадрата, чья суммарная площадь будет меньше 10 000.*

*Шаг 3. Оптимальная стратегия для двух квадратов.*

*Попробуем покрыть прямоугольник двумя квадратами.*

*Идея: первый квадрат накрывает левую часть прямоугольника; второй квадрат накрывает правую часть.*

*Их перекрытие обеспечивает полное покрытие по высоте (55).*

*Как подобрать стороны квадратов?*

Пусть оба квадрата имеют сторону  $L$ . Чтобы они вместе накрыли длину 100, должно выполняться:  $L + L - \text{перекрытие} \geq 100$ .

Минимальное перекрытие – когда края квадратов чуть заходят друг на друга. В худшем случае (без перекрытия) нужно  $2L \geq 100$ , т. е.  $L \geq 50$ . Но тогда по высоте 55 они не накроют прямоугольник ( $50 < 55$ ). Значит,  $L$  должно быть  $\geq 55$ .

Оптимальный вариант: возьмем  $L = 55$  (минимально возможное, чтобы накрыть высоту).

Тогда два квадрата  $55 \times 55$  могут накрыть прямоугольник  $55 \times 100$ , если их сдвинуть так, чтобы их объединение по длине дало 100.

Проверка.

Первый квадрат: от  $x = 0$  до  $x = 55$ .

Второй квадрат: от  $x = 45$  до  $x = 100$  (сдвиг на 45 вправо).

Объединение: от  $x = 0$  до  $x = 100$  – как раз длина 100.

По высоте оба квадрата дают 55 – хватает.

Суммарная площадь двух квадратов:  $2 \times 55^2 = 2 \times 3025 = 6050$ .

Шаг 4. Проверим, можно ли лучше с тремя квадратами.

Попробуем уменьшить суммарную площадь, используя три квадрата.

Идея: взять три квадрата со стороной  $S < 55$ , но так, чтобы их объединение накрыло  $55 \times 100$ .

Однако по высоте (55) каждый квадрат должен иметь  $S \geq 55$ , иначе он не накроет высоту. Значит,  $S$  не может быть меньше 55.

Вывод: три квадрата со стороной  $< 55$  не подойдут. Если брать  $S \geq 55$ , то суммарная площадь будет  $3 \times 55^2 = 3 \times 3025 = 9075$ .

Это больше, чем 6050 (для двух квадратов). Значит, три квадрата не дают выигрыша.

Шаг 5. Проверим другие варианты с двумя квадратами

Можно ли взять квадраты разных размеров и получить сумму площадей  $< 6050$ ?

Попробуем.

Первый квадрат:  $a \times a$ .

Второй квадрат:  $b \times b$ .

Чтобы накрыть высоту 55:  $a \geq 55$ ,  $b \geq 55$ .

Чтобы накрыть длину 100:  $a + b - \text{перекрытие} \geq 100$ .

Минимальное перекрытие – 0 (квадраты касаются). Тогда  $a + b \geq 100$ .

При этом  $a \geq 55$ ,  $b \geq 55$ . Минимальная сумма площадей достигается, когда  $a = b = 55$  (иначе один из квадратов будет больше и сумма площадей вырастет).

Пример:

$a = 55$ ,  $b = 55 \rightarrow$  сумма площадей = 6050;

$a = 60$ ,  $b = 40 \rightarrow$  не подходит ( $b < 55$ , не накроет высоту);

$a = 70, b = 30 \rightarrow$  не подходит ( $b < 55$ ).

*Вывод:* вариант с двумя квадратами  $55 \times 55$  дает минимальную возможную сумму площадей при соблюдении условий.

*Шаг 6.* Проверим вариант с одним квадратом.

Один квадрат должен быть  $\geq 100 \times 100$  (чтобы накрыть длину 100). Его площадь:  $100^2 = 10\,000$ .

Это больше, чем 6050. Значит, один квадрат хуже, чем два.

*Итоговый вывод:* наименьшая суммарная площадь достигается при использовании двух квадратов  $55 \times 55$ . Их суммарная площадь:  $2 \times 55^2 = 6050$ .

*Ответ:* 6050.

Правда, решение этой задачи качественно очень сильно зависит от соотношения сторон пятна. Тут можно сказать, нейросети повезло. Вариант этой же задачи с другим соотношением сторон оказался ей не по силам.

**Задача 9.2.** На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером  $62 \times 99$ . Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

**Правильный ответ:** 6534, используются квадраты со сторонами 66, 33, 33.

**Ответ Alice AI.**

*Решим задачу пошагово.*

*1. Условия и цель.*

*Нужно накрыть прямоугольник  $62 \times 99$  не более чем 3 квадратными ковриками.*

*Стороны квадратов – параллельны/перпендикулярны сторонам прямоугольника.*

*Квадраты можно накладывать друг на друга и «вылезать» за границы пятна.*

*Цель: минимизировать суммарную площадь квадратов.*

*2. Оценка минимального размера одного квадрата.*

*Чтобы накрыть высоту 62, сторона квадрата должна быть  $\geq 62$ .*

*Чтобы накрыть длину 99, сторона квадрата должна быть  $\geq 99$ .*

*Один квадрат со стороной 99 имеет площадь  $99^2 = 9\,801$  – это «базовый» вариант (но, возможно, два или три меньших квадрата дадут меньшую суммарную площадь).*

*3. Попробуем покрыть двумя квадратами.*

*Идея: два квадрата со стороной 62 могут накрыть прямоугольник, если их правильно сдвинуть по длине.*

*Как расположить?*

*Первый квадрат: покрывает полосу  $0 \leq x \leq 62$ ,  $0 \leq y \leq 62$ .*

*Второй квадрат: покрывает полосу  $37 \leq x \leq 99$ ,  $0 \leq y \leq 62$  (сдвиг на 37 вправо).*

*Проверка покрытия.*

*По длине: объединение  $[0; 62]$  и  $[37; 99]$  дает  $[0; 99]$  (есть перекрытие от 37 до 62).*

*По высоте: оба квадрата имеют высоту 62 – хватает.*

*Суммарная площадь двух квадратов:  $2 \times 62^2 = 2 \times 3\,844 = 7\,688$ .*

*4. Проверим, можно ли лучше с тремя квадратами.*

*Попробуем использовать три квадрата со стороной  $< 62$ . Но чтобы накрыть высоту 62, каждый квадрат должен иметь сторону  $\geq 62$  (иначе не закроет вертикаль).*

*Значит, три квадрата со стороной  $\geq 62$  дадут суммарную площадь:  $3 \times 62^2 = 3 \times 3\,844 = 11\,532$ .*

*Это больше, чем 7 688 (для двух квадратов).*

*Вывод: три квадрата не дают выигрыша.*

*5. Проверим другие варианты с двумя квадратами.*

*Можно ли взять квадраты разных размеров и получить сумму площадей  $< 7\,688$ ?*

*Условия.*

*Оба квадрата должны иметь сторону  $\geq 62$  (чтобы накрыть высоту).*

*Их суммарная длина по горизонтали должна быть  $\geq 99$  (с учетом перекрытия).*

*Пример.*

*Квадрат 1:  $62 \times 62 \rightarrow$  площадь 3 844.*

*Квадрат 2:  $62 \times 62 \rightarrow$  площадь 3 844.*

*Сумма: 7 688.*

*Если взять один квадрат больше (например,  $70 \times 70$ ), то его площадь вырастет (4 900), а второй все равно должен быть  $\geq 62$  (иначе не накроет высоту). Сумма площадей будет больше 7 688.*

*Вывод: вариант с двумя квадратами  $62 \times 62$  дает минимальную сумму площадей при соблюдении условий.*

*6. Проверим вариант с одним квадратом.*

*Один квадрат должен быть  $\geq 99 \times 99$  (чтобы накрыть длину 99). Его площадь:  $99^2 = 9\,801$ .*

*Это больше, чем 7 688. Значит, один квадрат хуже, чем два.*

*Итоговый вывод: наименьшая суммарная площадь достигается при использовании двух квадратов  $62 \times 62$ . Их суммарная площадь:  $2 \times 62^2 = 7\,688$ .*

Красным помечена основная ошибка – Alice AI не догадалась, что квадраты можно расположить один над другим. А в правильном расположении два квадрата со сторонами 33 лежат на стороне квадрата со стороной 66, вместе образуя прямоугольник с отношением сторон 2 к 3, внутри которого помещается пятно.

**GigaChat** же, похоже, не особо отличает площадь от периметра. Вот так он решает задачу 9.1.

*Для решения задачи рассмотрим процесс накрытия прямоугольного пятна квадратными ковриками и определим минимальную суммарную площадь ковров.*

*1. Размеры пятна. Прямоугольное пятно имеет размеры  $55 \times 100$ .*

*2. Коврики. Нам нужно накрыть пятно тремя (или менее) квадратными ковриками. Стороны квадратов должны быть параллельны сторонам прямоугольника.*

*3. Оптимальное решение. Чтобы минимизировать суммарную площадь ковров, нужно выбрать такие размеры ковров, чтобы они максимально эффективно покрывали пятно.*

*4. Первый коврик. Самый большой коврик должен иметь сторону, равную большей стороне пятна, т. е. 100. Это позволит покрыть большую часть пятна.*

*5. Второй коврик. Второй коврик должен иметь сторону, равную меньшей стороне пятна, т. е. 55. Это позволит покрыть оставшуюся часть пятна.*

*6. Третий коврик. Третий коврик не нужен, т. к. первые два коврика уже покрывают все пятно.*

*7. Суммарная площадь. Площадь первого коврика равна  $100^2 = 10\,000$ , а площадь второго коврика равна  $55^2 = 3\,025$ . Таким образом, суммарная площадь ковров равна:  $10\,000 + 3\,025 = 13\,025$ .*

Он превысил даже грубую оценку в 10 000 (когда пятно накрывается всего одним квадратом). Он не заметил, что второй коврик, как и третий, тоже не нужен.

## Заключение

По своей природе LLM (языковые модели) опираются на язык и только на него. У них нет пространственного мышления и бытового опыта, а текстовые задачи они решают настолько хорошо, насколько хорошо данная задача разобрана в учебниках и пособиях. Стоит отойти от стандартных формулировок – и у опробованных нейросетей сразу начинаются затруднения. Идея «написать классическую программу и получить ответ перебором в лоб» (а именно так составитель проверял задачу про спички) нейросетям, по всей видимости, тоже не приходит, несмотря на наличие вычислительных мощностей и сравнительные успехи искусственного интеллекта в программировании по запросу.

С другой стороны, арифметические операции и преобразования формул (в сущности, действия над символами по определенным правилам) искусственному интеллекту вполне доступны. Скажем, Alice AI безошибочно берет типовые комплексные интегралы с использованием вычетов.

Для олимпиад стоит предпочитать нешаблонные, образные, геометрические задачи, опирающиеся на примеры из жизни. А вот используя задачи на громоздкое преобразование переусложненных формул, составитель олимпиады рискует получить правильное решение, к которому не прикасалась человеческая рука.

Приведем здесь статистику по проценту верных ответов, данных участниками отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» 2025/26 учебного года на задачи, которые обсуждались выше (табл. 2).

Табл. 2

Задача	Процент участников, давших верный ответ
5–6 класс, № 1	34,1 %
5–6 класс, № 4	24,6 %
7–8 класс, № 1	23,1 %
5–6 класс, № 6	6,2 % (5–6 класс)
7–8 класс, № 6	19,9 % (7–8 класс)
11 класс, № 4	32,8 %
11 класс, № 8	54,2 %
10 класс, № 5	38,9 %
9 класс, № 8	0,2 % (9 класс)
10 класс, № 6	4,4 % (10 класс)

Таким образом, используя нестандартные формулировки и геометрические объекты в условиях задач, на данном этапе удалось избежать их тотально правильного решения участниками олимпиады. Тем не менее, понимая, что искусственный интеллект – самообучающаяся и обучаемая система, возможно, следует задуматься о новых формах контроля знаний и проведения отборочных этапов олимпиад, без которых невозможно обойтись, т. к. они дают возможность проверить свои знания огромному контингенту школьников, оставаясь дома. Искусственный интеллект при правильном его использовании должен помогать обучению и, в идеале, упрощать контроль знаний, делая его более объективным; надеемся, что эти вопросы удастся решить в ближайшем будущем.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Условия задач, решения и критерии оценок отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике 2025/26. – URL: <https://olymp.msu.ru/rus/event/10015/page/4868>.
2. URL: <https://giga.chat>.
3. URL: <https://alice.yandex.ru>.
4. URL: <https://chatgpt.org/chat>.

УДК 004.8:517:37.016

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ  
БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ  
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И. В. АСТАШОВА<sup>1,2</sup>, А. А. КИПКЕЕВ<sup>2</sup>, Р. Р. МАСНАВИЕВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова  
Москва, Россия

### Введение

**Актуальность исследования** обусловлена стремительным развитием технологий искусственного интеллекта (ИИ), в частности больших языковых моделей (LLM), которые становятся одним из главных трендов и катализаторов изменений в образовательной сфере (EdTech) [5]. Так, мировой рынок LLM с 2023 г. по 2025 г. показал рост с 4,5 до 8 млрд долл. США (77 %) [10].

Применение ИИ в обучении открывает новые возможности как для студентов, так и для преподавателей, выступая в роли интеллектуального ассистента в различных направлениях.

1. Для преподавателей ИИ-инструменты являются критически важным ресурсом для экономии времени и снижения профессиональной нагрузки [6]. Внедрение ИИ помогает автоматизировать рутинные задачи, такие как проверка работ, подготовка планов занятий или заполнение документации [5]. Высвобожденное время может быть перенаправлено на более глубокое взаимодействие со студентами.

2. Для студентов ключевое преимущество ИИ заключается в персонализации обучения [3]. Искусственный интеллект способен анализировать индивидуальные способности и темп усвоения материала, составляя на их основе персонализированные ответы, предоставляя мгновенную обратную связь.

В данной работе исследуются возможности ИИ для помощи студентам, а именно ИИ для ассистирования в вопросах математического анализа. Мате-

математический анализ играет фундаментальную роль в образовательном процессе студентов ИТ-направлений, а также математических, физических, экономических, инженерных и ряда других специальностей, является обязательной дисциплиной, на основе которой строятся многие последующие курсы.

Несмотря на широкий потенциал ИИ в образовании, его реалистичность и точность в решении специфических академических задач, требующих высокой строгости и математической логики (таких как задачи математического анализа), остаются предметом дискуссий. Настоящая работа посвящена оценке возможностей ИИ в решении задач математического анализа и выбору лучшей общедоступной LLM для эффективного использования в учебном процессе.

Сравнительное исследование языковых моделей для решения задач математического анализа позволит оценить их потенциал и определить возможности применения в образовательной практике. Кроме того, результаты исследования покажут, насколько модели отечественной разработки отличаются от международных аналогов по качеству решения задач.

**Целью** исследования является сравнительный анализ возможностей современных больших языковых моделей при решении задач математического анализа для оценки их потенциала в образовательной практике и выявления различий между отечественными и международными разработками.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. Определить критерии оценки качества решений задач математического анализа, получаемых от языковых моделей.
2. Сформировать репрезентативный набор задач по математическому анализу, охватывающий основные типы заданий.
3. Провести тестирование выбранных языковых моделей на сформированном наборе задач.
4. Сравнить качество ответов моделей.
5. Проанализировать сильные и слабые стороны рассматриваемых языковых моделей.
6. Сделать вывод о целесообразности применения языковых моделей в учебном процессе и определить, насколько отечественные модели отличаются от международных аналогов по качеству решений.

**Объектом** исследования являются общедоступные популярные большие языковые модели (LLM) общего назначения.

**Предметом** исследования является качество решения задач математического анализа современными языковыми моделями.

Для достижения целей исследования и решения поставленных задач использовались следующие **методы**.

1. Экспериментальный метод – проведение тестирования выбранных языковых моделей на специально подготовленном наборе задач.

2. Сравнительный анализ – сопоставление результатов решений разных нейросетей с целью выявления сильных и слабых сторон каждой модели.

3. Качественный анализ ответов – оценка полноты, корректности и структуры решений.

4. Опросы и анкетирование – сбор мнений студентов о восприятии результатов нейросетей и их потенциальной полезности в учебном процессе.

5. Статистическая обработка данных – количественный анализ результатов тестирования для выявления закономерностей и отличий между моделями.

Применение комплексного подхода, включающего как количественные, так и качественные методы, позволяет объективно оценить потенциал языковых моделей и их возможности использования в образовательной практике.

**Структура работы.** В первом разделе рассматриваются теоретические основы больших языковых моделей и их применения в образовательной и научной деятельности. Дается обзор современных исследований в области искусственного интеллекта, а также описываются принципы функционирования языковых моделей и их роль в решении учебных задач.

Во втором разделе анализируется математический анализ как учебная дисциплина, рассматриваются типы задач, которые будут использоваться в экспериментальной части исследования, и обосновывается выбор тестового набора заданий. Также описываются критерии оценки решений, используемых нейросетями, и формулируются цели и задачи экспериментального исследования.

В третьем разделе приводится описание проведенного эксперимента, в том числе методики тестирования выбранных моделей (ChatGPT, Gemini, DeepSeek, YandexGPT и GigaChat), анализ полученных решений и их сравнение по различным параметрам. Рассматриваются результаты опросов студентов и преподавателей относительно восприятия работы нейросетей и их потенциального применения в учебном процессе.

В заключении подводятся итоги проведенного исследования, формулируются основные выводы о качестве работы отечественных и иностранных моделей при решении задач математического анализа, а также отмечаются выявленные различия между ними.

## **Теоретические основы**

**Выбор больших языковых моделей для сравнительного исследования.** Для проведения оценки потенциала больших языковых моделей (LLM) в решении задач математического анализа был сформирован набор моделей, включающий как ведущие мировые разработки, так и ключевые отечественные аналоги. Критериями отбора являлись: *возможность бесплатного пользования, широкая публичная доступность и популярность* (для оценки применимости в образовательной практике для студентов). Выбранные модели разделены на две

группы: мировые лидеры, задающие стандарты производительности, и крупнейшие отечественные разработки (табл. 1).

Табл. 1. Сравнение выбранных LLM

Модель	Разработчик	Ежемесячное количество активных пользователей (MAU), млн чел.
ChatGPT (GPT-4o)	OpenAI	500–800 [7]
Gemini (2.5 Flash)	Google	400 [9]
DeepSeek (V3.2)	Shēndù Qiúsuǒ	96,88 [8]
GigaChat (2.0)	Sber	19 [4]
YandexGPT (Alice AI*)	Yandex	43 [1]
<p><i>Примечание</i> – * – динамически подбирается оптимальный инструмент из семейства Alice AI в зависимости от характера вопроса и требуемого формата ответа (т. е. используется не фиксированная модель)</p>		

Выбранный пул из пяти моделей обеспечивает сбалансированное покрытие: от глобальных лидеров, устанавливающих мировые стандарты производительности (ChatGPT, Gemini), до конкурентоспособной высокопроизводительной модели (DeepSeek) и ключевых российских разработок (GigaChat, YandexGPT), что позволяет провести комплексный и релевантный сравнительный анализ.

**Выбор задач для проведения исследования.** В качестве источника задач был выбран сборник задач по курсу математического анализа Г. Н. Бермана [2]. Бралось по одной задаче из каждой главы.

1. Функции.
2. Предел. Непрерывность.
3. Производная и дифференциал. Дифференциальное исчисление.
4. Исследование функций и их графиков.
5. Определенный интеграл.
6. Неопределенный интеграл. Интегральное исчисление.
7. Способы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы.
8. Применения интеграла.
9. Ряды.
10. Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление.
11. Применения дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

12. Многомерные интегралы и кратное интегрирование.

13. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности.

Получился набор из 13 задач легкой и средней сложности (табл. 2) по разным темам математического анализа.

Табл. 2. Список задач

Номер задачи	Номер задачи в [2]	Условие задачи	Ответ
1	26	$F(x) = x^2 + 6$ ; $\varphi(x) = 5x$ . Найти все корни уравнения $F(X) =  \varphi(x) $	$x_1 = -3$ ; $x_2 = -2$ ; $x_3 = 2$ ; $x_4 = 3$
2	250	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$	0
3	476	Продифференцировать функцию $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad+bc}{(cx+d)^2}$
4	1250	Груз весом $P$ , лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой $F$ . Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен $k$ . Под каким углом $\varphi$ к горизонту надо приложить силу $F$ , чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы	$F_{\text{наим}} = kP / \sqrt{1+k^2}$ при $\varphi = \arctg k$
5	1661	Найти производную от функции $y = \int_x^5 \sqrt{1+x^2} dx$ при $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}$	-1; -5/4
6	1743	Найти интегралы, воспользовавшись теоремой об инвариантности формул интегрирования: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + a^2} dx$	$\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + a^2) + C$
7	2281	Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx$	$5/16 \pi$ . Полагая $x = 2z$ , преобразуем данный интеграл в $2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 z dz$

Окончание табл. 2

Номер задачи	Номер задачи в [2]	Условие задачи	Ответ
8	2566	Лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая при этом получается	$\frac{\pi a^3}{4} \left[ \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right]$
9	2803	Определить области сходимости рядов $\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots$	$1/e < x < e$
10	3037	Найти частные производные функции по каждой из независимых переменных: $z = x^3 y - y^3 x$	$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3,$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2 x$
11	3242	$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$ ; разложить функцию $f(x+h; y+k)$ по степеням $h$ и $k$	$x^3 + 2y^3 - xy +$ $+ h(3x^2 - y) + k(6y^2 - x) +$ $+ 3xh^2 - hk + 6yk^2 + h^3 + 2k^3$
12	3522	Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$ , где $\Omega$ – область, ограниченная плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$	$\frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right)$
13	3770	Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{ds}{x-y}$ , где $L$ – отрезок прямой $y = 1/2x - 2$ , заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$	$\sqrt{5} \ln 2$
Дополнительная задача		Икосаэдр – один из пяти правильных выпуклых многогранников. Дан икосаэдр, каждая из 20 граней которого есть правильный треугольник со стороной $\sqrt{63}$ . Пусть $A$ и $B$ – две наиболее удаленные друг от друга в пространстве вершины данного икосаэдра. Минимальная длина пути по поверхности икосаэдра, соединяющего $A$ и $B$ , равна ...	21

В качестве дополнительной была рассмотрена задача из другой области математики – стереометрии.

**Математическая модель оценки и ранжирования нейросетей.** Для выполнения данного исследования необходимо строго определить его методологическую базу, обозначить критерии и шкалу оценивания решений задач. Составим математическую модель.

Пусть существует множество рассматриваемых нейросетей:

$$N = \{N_j \mid j = 1, 2, \dots, m\},$$

где  $m$  – количество нейросетей.

Каждая нейросеть оценивается по множеству параметров качества решения:

$$A = \{A_i \mid i = 1, 2, \dots, k_p\},$$

где  $A_i$  – параметр качества решения;  $k_p$  – количество таких параметров.

В рамках данной работы определяются три параметра качества решения:

$$A = \{A_1, A_2, A_3\} = \{C, S, M\},$$

где  $C$  – полнота решения;  $S$  – структурированность и читаемость;  $M$  – обоснованность методов.

Каждому параметру  $A_i$  ставится в соответствие вес  $\alpha_i$ , образуется вектор весов

$$\alpha = \{\alpha_i \mid i = 1, 2, \dots, k_p\},$$

где  $\alpha_i$  – параметр качества решения;  $k_p$  – количество таких параметров.

В рамках данной работы определяются веса для трех параметров качества решения:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left\{ \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right\}.$$

Значения оценок модели  $N_j$  по параметрам  $A$  от респондентов могут принимать целочисленное значение от 1 до 3:

$$A_j = \{C_j, S_j, M_j\}; \quad C_j, S_j, M_j \in \{1, 2, 3\},$$

где 1 – низкий уровень удовлетворенности; 2 – средний уровень удовлетворенности; 3 – высокий уровень удовлетворенности.

Вводится множитель корректности решения  $t_{ij} \in \{0, 1\}$ , который отражает правильность ответа  $j$ -й нейросети для  $i$ -й задачи:  $t_{ij} = 1$ , если ответ правильный,  $t_{ij} = 0$ , если ответ неверный.

Показатель пригодности  $P_j$   $j$ -й нейросети для решения задач курса математического анализа уровня бакалавриата определяется как взвешенная сумма значений параметров  $\sum_{i=1}^{k_p} \alpha_i A_i$  с учетом корректности  $t_i$ :

$$P_j = \sum_{q=1}^{k_t} \left[ t_{jq} \sum_{i=1}^{k_p} \alpha_i A_{jq_i} \right],$$

где  $k_t$  – количество задач.

Задача ранжирования заключается в упорядочении нейросетей по убыванию показателя  $P$ .

## Практическая часть

**Процедура сбора эмпирических данных.** Эмпирический этап исследования был реализован посредством систематического тестирования пяти больших языковых моделей (LLM) на стандартизированном наборе из 13 типовых задач по математическому анализу. Задачи преимущественно относились к начальному и среднему уровням сложности и были выбраны из первых 13 глав классического задачника по математическому анализу. Дополнительная задача взята из банка Открытой международной интернет-олимпиады 2025/26 учебного года (1 тур).

Каждая задача отправлялась модели в отдельном контекстном окне в неизменном текстовом виде, без указания дополнительных пояснений или контекста. За окончательный результат принимался первый сгенерированный **ответ**, без последующего уточнения запроса или корректировки решения. Это обеспечивало объективную оценку способности моделей к автономному решению академических задач.

В рамках тестирования было получено 65 решений, каждое из которых проходило независимую экспертную оценку. В качестве экспертов выступили четыре студента 4-го курса направления ВШКМиС РЭУ им. Г. В. Плеханова группы 15.27Д-МО11/22б с высокой академической успеваемостью.

Респондент 1 – Куклина Анастасия Игоревна.

Респондент 2 – Мацкевич Софья Сергеевна.

Респондент 3 – Евгеньев Лев Эдуардович.

Респондент 4 – Ваганов Артем Владимирович.

Дополнительная задача рассматривалась отдельно; результаты оценки не учитывались в расчетах показателя пригодности.

**Система оценки и валидация результатов.** Эксперты оценивали каждое решение по трем ключевым критериям.

1. Корректность результата (С) – правильность итогового ответа.
2. Обоснованность метода (М) – логическая и методическая корректность хода решения.
3. Структурированность и читаемость (S) – полнота, ясность представления.

Каждый критерий оценивался по трехбалльной шкале (1–3 балла), что обеспечивало умеренно дискретную, но достаточную для анализа дифференциацию качества решений.

Экспертные оценки были агрегированы в матрицу данных, на основании которой для каждой модели вычислялись средние баллы по критериям и итоговый интегральный показатель в соответствии с математической моделью.

### Результаты опроса

По столбцам расположены оценки для нейросетей в порядке: ChatGPT, DeepSeek, Gemini, YandexGPT, GigaChat.

<i>Задача 1</i>						
<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	3	3	2
	Обоснованность методов (M)	1	2	3	2	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (M)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	1	3	2	1
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	3	2	2
	Обоснованность методов (M)	3	1	3	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	2
	Обоснованность методов (M)	3	3	3	3	3
	Правильность решения	1	1	1	1	1

<i>Задача 2</i>						
<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	3	2	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	2	2	3
	Обоснованность методов (М)	1	2	2	1	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	3	2
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	1	2	2
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	1
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	1
	Правильность решения	1	1	1	1	0

<i>Задача 3</i>						
<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	2	3	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	1	2	3	2	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	1	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	2	1	2	2

	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
	Правильность решения	1	1	1	1	1

**Задача 4**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	1	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	3	2	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	1	3	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	1	1	2	2
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	2	2
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	3	2	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
	Правильность решения	1	1	1	1	0

**Задача 5**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	3	1	2

<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	2	1
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	2	2	1
	Обоснованность методов (М)	2	2	2	2	1
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	2	3	3
	Правильность решения	1	1	1	1	0

**Задача 6**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	3	2	3
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	1	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	2	3	3
	Обоснованность методов (М)	1	3	3	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	1	3	3	3	3

	Обоснованность методов (М)	2	3	3	2	2
	Правильность решения	1	1	1	0	1

*Задача 7*

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	3	2	3
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	3	3	2	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	1	3	2
	Обоснованность методов (М)	3	3	1	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	3	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	1	3	3	2	2
	Правильность решения	1	1	1	1	1

*Задача 8*

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	2	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3			3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3			3	3
	Обоснованность методов (М)	3			3	3

<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	1	1	2	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	2	2	2
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3			3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3			3	3
	Обоснованность методов (М)	3			2	3
	Правильность решения	0	0	0	0	0

**Задача 9**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	2	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	3	1	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	2	2	2
	Обоснованность методов (М)	3	3	1	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	2	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	2	2	3
	Правильность решения	1	1	1	1	1

<i>Задача 10</i>						
<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	3	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	2	3	2
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	1	2	3	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	2	3	2
	Обоснованность методов (М)	1	3	1	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	2	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	2	2	3	2
	Правильность решения	1	1	1	1	1

<i>Задача 11</i>						
<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	2	3	3
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	1	2
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	2	2	3

	Обоснованность методов (М)	3	3	3	1	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	2	3	2	3
	Правильность решения	1	1	1	1	1

**Задача 12**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	3	3	2	3
<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	3	
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	3	3	1	1
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	2	3	1
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	1	1
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	3	3	3	2	2
	Правильность решения	1	1	1	0	0

**Задача 13**

<b>Респондент 1</b>	Полнота решения (С)	3	2	3	2	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (М)	2	2	3	2	3

<b>Респондент 2</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	3	3	3	3
	Обоснованность методов (M)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 3</b>	Полнота решения (С)	2	2	3	2	2
	Структурированность и читаемость (S)	2	3	2	3	2
	Обоснованность методов (M)	3	3	3	3	3
<b>Респондент 4</b>	Полнота решения (С)	3	3	3	3	3
	Структурированность и читаемость (S)	3	2	3	3	3
	Обоснованность методов (M)	3	3	3	2	3
	Правильность решения	1	1	1	1	1

**Аналитическая обработка результатов опроса.** В результате обработки данных были получены три ключевых артефакта.

1. Критериальная оценка качества математических решений нейросетями (сравнение по параметрам С, S и M).

2. Сравнение среднего итогового балла международных и отечественных моделей.

3. Тепловая карта качества решений по тематическим блокам математического анализа (выявление сильных и слабых сторон каждой нейросети).

### **Анализ результатов**

В ходе исследования были получены результаты, позволяющие оценить пригодность нейросетей для решения задач математического анализа, ответы нейросетей по задачам из разных тем и сравнить заграничные и отечественные нейросети в рамках проводимого исследования.

По итогам исследования был составлен ранжированный список нейросетей по убыванию значения показателя пригодности Р (табл. 3):

- 1) Gemini;
- 2) DeepSeek;
- 3) ChatGPT;
- 4) YandexGPT;
- 5) GigaChat.

Табл. 3. Оценка качества решений нейросетей по критериям

Критерий	Нейросеть				
	ChatGPT	DeepSeek	Gemini	YandexGPT	GigaChat
Полнота решения (С)	51,11	56,44	60,89	44,44	36,00
Структурированность и читаемость (S)	59,11	60,00	56,44	49,33	39,11
Обоснованность методов (M)	52,00	57,33	58,22	45,33	39,56
<b>Итог</b>	<b>162,22</b>	<b>173,78</b>	<b>175,56</b>	<b>139,11</b>	<b>114,67</b>

Для оценки эффективности различных нейросетевых моделей при решении задач математического анализа был проведен сравнительный анализ пяти систем: ChatGPT, DeepSeek, Gemini, YandexGPT и GigaChat. Оценка осуществлялась по трем критериям: полнота решения (С), структурированность и читаемость (S) и обоснованность методов (M). Итоговый показатель пригодности определялся как сумма взвешенных значений по каждому из критериев. Полученные данные представлены в табл. 3 и визуализированы на рис. 1.

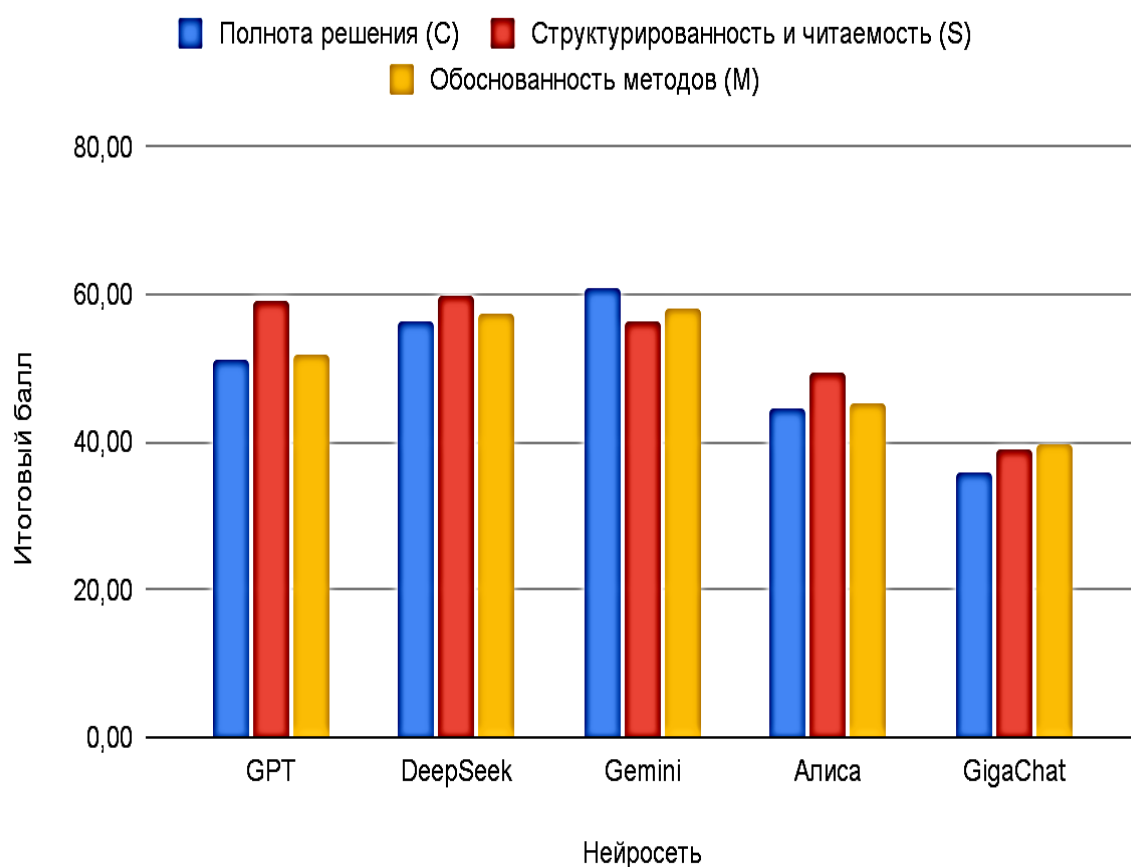


Рис. 1. Критерияльная оценка качества математических решений нейросетями

Согласно представленным результатам, наивысшее значение суммарного показателя наблюдается у нейросети Gemini (175,56), что указывает на ее лидерство в исследуемой группе. Несколько ниже результат у DeepSeek (173,78), который практически не уступает лидеру. Третье место занимает ChatGPT (162,22), демонстрируя устойчивые показатели по всем критериям. Существенно меньшие значения отмечены у моделей YandexGPT (139,11) и GigaChat (114,67).

Рассмотрение распределения значений по отдельным критериям позволяет выявить специфику сильных сторон каждой модели.

По критерию «Полнота решения (С)» наилучшие результаты продемонстрировала нейросеть Gemini (60,89), что отражает ее способность полно и всесторонне раскрывать содержание задач. Далее следуют DeepSeek (56,44) и ChatGPT (51,11). После них идут отечественные разработки: YandexGPT (44,44) и GigaChat (36,00).

По показателю «Структурированность и читаемость (S)» лидером является DeepSeek (60,00), что свидетельствует о высокой степени логической упорядоченности и понятности решений. Немного отстают ChatGPT (59,11) и Gemini (56,44). После них идут отечественные разработки: YandexGPT (49,33) и GigaChat (39,11).

Критерий «Обоснованность методов (M)» вновь возглавляет Gemini (58,22), подтверждая ее способность к корректному выбору и применению математических подходов. Близкие результаты показывает DeepSeek (57,33), в то время как ChatGPT (52,00) занимает промежуточную позицию. После них идут отечественные разработки: YandexGPT (45,33) и GigaChat (39,56).

Визуальный анализ данных, представленных на рис. 1, позволяет отметить, что для моделей Gemini и DeepSeek характерна высокая сбалансированность по всем трем критериям – значения показателей расположены на примерно одинаковом уровне. В то же время у ChatGPT наблюдается умеренный перекося в сторону критерия структурированности, что может свидетельствовать о приоритете логичности изложения над глубиной анализа.

Модели YandexGPT и GigaChat демонстрируют сравнительно низкие и близкие по величине показатели по всем критериям, что указывает на ограниченную способность к выполнению аналитических задач математики.

Таким образом, как по критериям полноты, обоснованности и структурированности решений, так и по тематическому охвату, наилучшими моделями для решения задач математического анализа являются Gemini и DeepSeek, обладающие сбалансированными и устойчивыми характеристиками качества.

Представленная в табл. 4 информация отражает количественную оценку производительности пяти нейросетевых моделей при решении задач по 13 разделам математического анализа. Оценка, варьирующаяся от 0,00 (полное отсут-

ствие или неверное решение) до 3,00 (максимально корректный результат), выявила существенную неоднородность в их способностях.

Табл. 4. Тепловая карта качества решений по тематическим блокам математического анализа

Задача	Нейросеть				
	ChatGPT	DeepSeek	Gemini	YandexGPT	GigaChat
Функции	2,44	2,36	3,00	2,64	2,42
Предел. Непрерывность	2,36	2,81	2,64	2,50	0,00
Производная и дифференциал. Дифференциальное исчисление	2,39	2,64	2,78	2,75	2,64
Исследование функций и их гра- фиков	2,44	2,81	2,89	2,28	0,00
Определенный интеграл	2,61	2,72	2,78	2,47	0,00
Неопределенный интеграл. Инте- гральное исчисление	1,86	2,58	2,94	0,00	2,69
Способы вычисления определен- ных интегралов. Несобственные интегралы	2,47	2,69	2,61	2,83	2,75
Применение интеграла	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Ряды	2,50	3,00	2,42	2,44	2,64
Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление	2,53	2,44	2,39	2,89	2,44
Применения дифференциального исчисления функций нескольких переменных	2,92	2,72	2,86	2,36	2,89
Многомерные интегралы и крат- ное интегрирование	2,64	2,94	2,94	0,00	0,00
Криволинейные интегралы и ин- тегралы по поверхности	2,75	2,64	2,94	2,61	2,83

Модель Gemini демонстрирует наиболее высокие и стабильные результаты, достигая максимального балла (3,00) в разделе «Функции» и показывая стабильно высокие оценки (2,78–2,94) в большинстве других разделов, включая «Неопределенный интеграл» и «Многомерные интегралы», что позиционирует ее как наиболее универсальный инструмент. Модель DeepSeek также показывает высокую компетентность, получив максимальный балл (3,00) за «Ряды» и высокие оценки (2,81) за «Предел. Непрерывность» и «Исследование функций».

GigaChat и YandexGPT демонстрируют крайне поляризованные результа- ты. Они достигают высоких баллов в отдельных сложных темах (напри-

мер, 2,89 у GigaChat в «Применениях дифференциального исчисления функций нескольких переменных» и 2,89 у YandexGPT в «Функциях нескольких переменных»), однако обе модели показывают нулевую производительность в нескольких других разделах.

ChatGPT занимает промежуточное положение, показывая наиболее усредненную производительность с оценками преимущественно в среднем диапазоне (2,36–2,64), за исключением заметно низкого балла (1,86) по теме «Неопределенный интеграл».

Выделяются общие закономерности:

- 1) Gemini отличается наиболее высокой универсальностью и стабильностью результатов, превосходя другие модели по большинству тем;
- 2) DeepSeek демонстрирует близкие показатели, особенно в областях, связанных с рядами и исследованием функций;
- 3) ChatGPT занимает промежуточное положение и показывает хорошие результаты в задачах, требующих применения производных и интегралов;
- 4) YandexGPT и GigaChat демонстрируют ограниченную применимость, показывая высокие результаты не по всем направлениям.

Анализ успеваемости по конкретным разделам выявляет системные проблемы. Наиболее показательным результатом является раздел «Применение интеграла», по которому все пять исследуемых моделей получили оценку 0,00. Стоит также отметить, что дополнительная задача из другой области математики – стереометрии, была решена корректно только двумя нейросетями – ChatGPT и YandexGPT. Это указывает на фундаментальный пробел в способности систем к концептуальному применению математических инструментов. Другие разделы, такие как «Многомерные интегралы» и «Неопределенный интеграл», также выявили критические пробелы у отдельных моделей (GigaChat, YandexGPT), в то время как наиболее успешно всеми моделями были решены задачи из разделов «Производная и дифференциал». В целом, проведенный анализ свидетельствует, что, несмотря на впечатляющие успехи в отдельных областях, достижение последовательной и надежной производительности в высшей математике остается для современных нейросетевых моделей открытой задачей.

Одной из задач исследования являлось сопоставление эффективности международных (ChatGPT, DeepSeek и Gemini) и отечественных (YandexGPT и GigaChat) LLM при решении задач математического анализа.

Сравнительный анализ показал существенное различие между двумя группами. Средний итоговый показатель для международных моделей составил 170,52, тогда как для отечественных – 126,89 (рис. 2). Разница в 43,63 балла отражает выраженное преимущество международных систем по совокупности оценочных критериев.

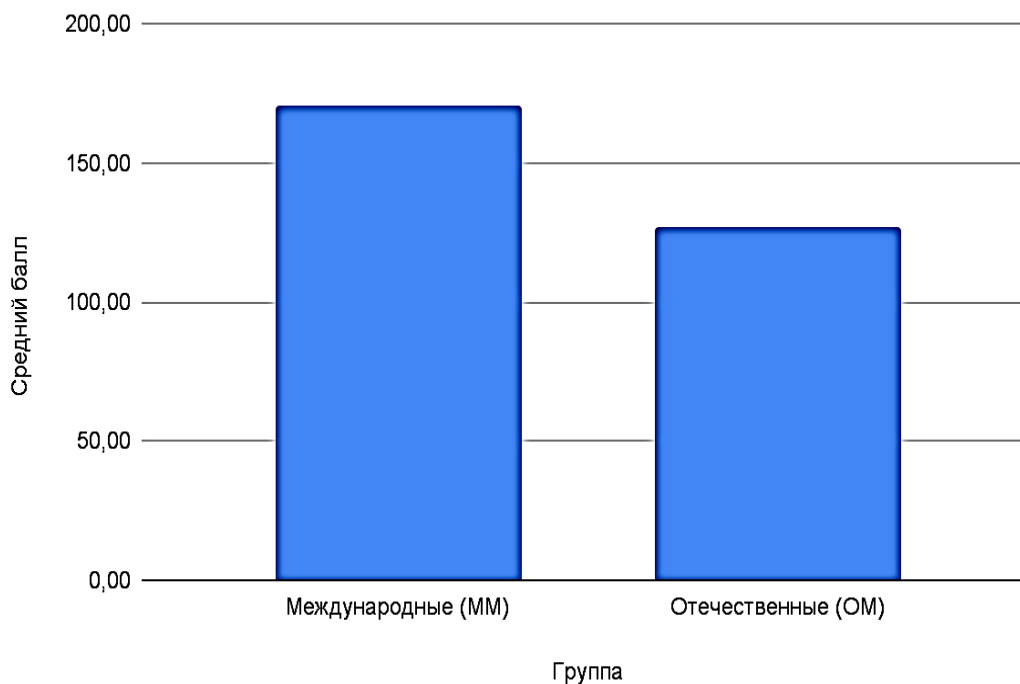


Рис. 2. Сравнение среднего итогового балла международных и отечественных моделей

Анализ указывает на то, что международные модели демонстрируют более высокий уровень точности, полноты и структурной согласованности при решении задач математического анализа. Отечественные системы характеризуются большей разрозненностью показателей и менее стабильным качеством решений при переходе между различными тематическими разделами.

### Заключение

На основе представленного исследования, посвященного оценке и сравнительному анализу эффективности современных больших языковых моделей (LLM) в решении задач, можно сформулировать следующие общие выводы.

Актуальность работы подтверждается стремительным развитием технологий искусственного интеллекта и их активным внедрением в образовательную сферу. Однако, несмотря на потенциал ИИ в качестве ассистента для студентов, его надежность в решении задач, требующих строгой математической логики, оставалась предметом дискуссий.

Целью работы являлся сравнительный анализ пяти ведущих LLM (ChatGPT, Gemini, DeepSeek, YandexGPT и GigaChat) для оценки их потенциала в образовательной практике и выявления различий между отечественными и международными разработками.

Для достижения цели была разработана комплексная методология, включающая формирование репрезентативного набора из 13 задач по различным разделам математического анализа и создание математической модели оценки,

основанной на трех критериях: полнота решения (С), структурированность и читаемость (S) и обоснованность методов (M).

### **Ключевые результаты анализа.**

1. *Ранжирование моделей.* По итогам тестирования и экспертной оценки был составлен ранжированный список нейросетей по убыванию показателя пригодности. Лидирующие позиции заняли международные модели: Gemini (175,56 балла) и DeepSeek (173,78 балла), продемонстрировавшие наиболее высокие и сбалансированные результаты. Модель ChatGPT (162,22) заняла третье место. Отечественные модели YandexGPT (139,11) и GigaChat (114,67) показали более низкие совокупные результаты.

2. *Сравнение отечественных и международных моделей.* Исследование выявило существенный разрыв между двумя группами. Средний итоговый показатель для международных моделей составил 170,52, в то время как для отечественных – 126,89. Международные системы продемонстрировали более высокий уровень точности, полноты и структурной согласованности решений. Отечественные модели характеризовались большей нестабильностью и поляризованными результатами, показывая высокую компетентность в одних разделах и нулевую в других.

3. *Выявление фундаментальных пробелов.* Наиболее важным результатом стало обнаружение системных недостатков, присущих *всем* исследуемым моделям. В разделе «Применение интеграла» все пять нейросетей получили оценку 0,00. Это указывает на фундаментальный пробел в способности ИИ к концептуальному применению математических инструментов, а не только к выполнению алгоритмических расчетов.

Проведенный анализ показал, что современные большие языковые модели, в особенности Gemini и DeepSeek, демонстрируют значительный потенциал для использования в образовательном процессе по математическому анализу.

Тем не менее их текущая применимость ограничена. Выявленные фундаментальные пробелы, особенно в задачах на концептуальное применение знаний, свидетельствуют о том, что достижение последовательной и надежной производительности, сопоставимой с человеческим уровнем математического мышления, остается открытой задачей для современных LLM.

Таким образом, на данном этапе развития ИИ может рассматриваться исключительно как вспомогательный инструмент, требующий дополнительной верификации.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аудитория «Алисы» уже более 43 млн человек // IT Speaker : [сайт]. – 2025. – URL: <https://itspeaker.ru/news/auditoriya-alisy-uzhe-bolee-43-mln-chelovek/> (дата обращения: 25.11.2025).

2. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – 22-е изд. – М. : Наука, 1985. – 448 с.
3. Дайджест EduTech. Как изменится EdTech в России и мире. Искусственный интеллект, виртуальная реальность и видеообучение // СберУниверситет: [сайт]. – М. : СберУниверситет, 2023. – Вып. 24. – 46 с. – URL: <https://sberuversity.ru> (дата обращения: 25.11.2025).
4. Топ-менеджер Сбера назвал ежемесячное количество пользователей GigaChat // Lenta.ru : [сайт]. – 2025. – 20 нояб. – URL: <https://lenta.ru/news/2025/11/20/top-menedzher-sbera-nazval-ezhemesyachnoe-kolichestvo-polzovateley-gigachat/> (дата обращения: 25.11.2025).
5. AI in Edtech: Top Use Cases You Need To Know // SmartDev : [website]. – URL: <https://smartdev.com/ai-use-cases-in-edtech/> (date of access: 06.10.2025).
6. How artificial intelligence will impact K-12 teachers / J. Bryant, C. Heitz, S. Sanghvi, D. Wagle // McKinsey & Company. Public Sector Practice & Social Sector Practice. – 2020. – P. 7.
7. ChatGPT Statistics: User, Growth, Revenue & Facts // NerdyNav : [website]. – URL: <https://nerdynav.com/chatgpt-statistics/> (date of access: 25.11.2025).
8. DeepSeek Stats: User Count & Growth Stats // Backlinko : [website]. – URL: <https://backlinko.com/deepseek-stats> (date of access: 25.11.2025).
9. Gemini Stats Overview: User Count & Trends // Thunderbit : [website]. – URL: <https://thunderbit.com/blog/gemini-stats-overview> (date of access: 25.11.2025).
10. LLM statistics 2025: Comprehensive insights into market trends and integration // Hostinger : [website]. – URL: <https://www.hostinger.com/tutorials/llm-statistics#:~:text=The%20global%20LLM%20market%20was,33.7%25%20over%20the%20forecast%20period> (date of access: 25.11.2025).

УДК 378

## ПРИОРИТЕТ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Т. М. УМАРОВА

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова  
в г. Душанбе  
Душанбе, Таджикистан

Науки делятся на естественные, неестественные и противоестественные.

*Л. Д. Ландау*

Естественные науки формируют первоэлемент мировоззрения, осуществляя познавательную миссию, выстраивают когнитивный стиль мышления; поэтому основная задача высшей школы состоит в совершенствовании уровня естественнонаучного образования. Рассуждения о будущем естественнонаучного образования схожи с пересечением противоречивых мнений об образовательных целях, о роли науки в целом.

Прогресс науки настолько стремителен, что содержание и методы образования, учебные программы должны постоянно совершенствоваться. Программы по естественным наукам, казалось бы, равнозначные на бумаге, могут на практике отвечать совершенно разным установкам. Важность самой научной деятельности в общей цепи образовательного процесса переоценить сложно. Это путь к открытиям, интеллектуальная честность, системное исследование, анализ экспериментальных данных, значимость творческого подхода.

Развитие любой страны неразрывно связано с приобретением нового знания, которое дают только фундаментальные естественные науки, поскольку лишь результаты естественно-научных исследований гарантируют высокий темп развития научно-технического прогресса. Благодаря естественно-научному знанию, инновационным разработкам в области естественных наук большие результаты получены по многим направлениям – прикладной физике, современным информационным технологиям, микробиологии и др. Налицо все большее значение междисциплинарных наук. Так, например, от прогресса современного материаловедения, в основе которого физическая химия, зависят самолето- и ракетостроение, новейшая военная техника, цифровая техника, современные методы диагностики в медицине, новые материалы для солнечной энергетики, спутниковой связи и т. д. Поэтому совершенно оправданно наличие большого количества часов по дисциплине НИР в учебном плане направления подготовки бакалавриата и специалитета материаловедов. Так, дисциплине НИР студентов данного направления (с учетом часов научно-исследовательской практики) отводится 25 з. е. (900 ч), реализуемых на протяжении трех лет обучения. Это обязывает кадровый потенциал университета к творческому, новаторскому подходу приобщения студента к науке.

Научный прогресс настолько быстротечен, что содержание и методы образования, включая учебные программы, должны быть адаптированы. За последние годы сфера образования естественно-научного профиля в значительной степени привлекла большое внимание, особенно в отношении разработки учебных программ и использования цифровых ресурсов. Сегодня никого не удивишь наличием компьютерных классов, во многих университетах имеется и виртуальный лабораторный практикум по естественным наукам, что важно в учебном процессе. Это помогало, особенно в годы пандемии, при проведении занятий в режиме онлайн. Кроме того, в определенной степени, в отсутствие желаемого оборудования, моделирование лабораторных работ является хорошим подспорьем. Однако «живой» эксперимент в освоении естественно-научного предмета цифровая лаборатория не заменит. Систематическое наблюдение за самим процессом эксперимента, непосредственное участие в нем, осмысление задач проводимого эксперимента способствует приобретению навыков самостоятельной экспериментальной работы, первых шагов в науку.

В вопросе получения научно-технического образования важным фактором является актуальность университетских учебных программ. Программы по естественным наукам, казалось бы, идентичны, но в действительности они могут отвечать совершенно разным установкам и реалиям на практике. Как правило, вузы изолированы от производства, отсюда и отсутствие навыков формирования способности к разработке новых, реконструкции и модернизации существующих технологий. Другим моментом является недостаточная передача имеющихся знаний, навыков для их практического применения и, к сожалению, зачастую налицо отсутствие стремления к творчеству и инновациям.

Дело в том, что общее (классическое) образование не ориентировано конкретно на профессиональную подготовку. Период времени, отведенный на научно-исследовательскую работу, по сути, является индивидуальной работой педагога-наставника (его методика и стиль). При этом важным фактором в данном отношении становится роль экспериментальной практики, выполняемой самим студентом. Цивилизованные страны понимают приоритет фундаментальных естественно-научных исследований, являющихся важной движущей силой научно-технического прогресса, гарантом устойчивого развития общества.

Будущее, по мнению выдающихся ученых (С. П. Капица, Ж. И. Алфёров, В. А. Садовничий, В. В. Лунин и др.), зависит от решения целого ряда задач:

- оснащение исследовательских лабораторий современным научным оборудованием с целью обеспечения высокого уровня эксперимента;
- поддержка научных проектов, ориентированных на исследования в области естественных наук;
- проведение анализа перспективности исследований, новых разработок в сравнении с зарубежными;
- активизация естественно-научной направленности в системе школьного образования;
- популяризация естественных наук в средних и высших учебных заведениях средствами массовой информации.

Принимая во внимание вышесказанное, понятно, что данный подход повысит требования к выпускникам, обладающим профессиональными компетенциями, навыками и умениями. В целом, такие выпускники в значительной мере будут способствовать повышению продуктивности развития инновационных отраслей. Не случайно многие страны, такие как Китай, Корея, Япония, США, сделали свой выбор в пользу развития естественно-научного образования, где на государственном уровне приняты программы, ориентированные на образование в области высоких технологий.

Трудности, с которыми сталкиваются преподаватели вуза, – это слабая базовая подготовка в школе, особенно по предметам естественных наук. В современных реалиях школа, как живой организм, должна непрерывно развиваться,

совершенствоваться. Стивен Хокинг как-то сказал: *«Школьная наука часто преподается в сухой и неинтересной форме. Дети учатся механически запоминать, чтобы сдать экзамен, и не видят связи науки с окружающим миром»* [1]. Данную нетождественность можно объяснить недостаточно высокой степенью компетентности учителей по естественным предметам. Отсюда вопросы в первую очередь к педагогическим вузам – что нужно изменить, чтобы вуз на выходе получал успешного абитуриента с вложенными усилиями не репетитора, а учителя школы? Курс к преобразованию системы высшего образования подтверждает стремление сделать его более релевантным и целенаправленным в соответствии с временем.

Необходимо отметить, что, несмотря на данные статистики, по результатам проведенного анализа (10 лет назад) Международного мониторингового исследования качества школьного математического и естественно-научного образования TIMSS, **Япония, Южная Корея и Гонконг** вошли в пятерку лидеров по математике и естественнонаучным предметам, а в лидерах в обеих категориях (1-е место по математике и естествознанию) оказался **Сингапур**. Качество образования в Сингапуре является стабильно высоким благодаря отличной программе финансирования [2]. Рассматривая в качестве примера образование в **Индии**, в [3] автор отмечает: *«парадоксально, что при низком качестве школьного образования и сохранении высокого уровня неграмотности, вузы Индии выпускают большое число квалифицированных кадров, востребованных не только в своей стране, но и, в целом, в мире, успешно наращивая свой экономический потенциал. Вопрос – как ей это удастся?»*. Заслуживающим внимание является подход в **Катаре**. Высший совет по образованию Катара разработал комплексную стратегию, охватывающую проекты, дающие возможность использовать ИКТ на всех этапах образования – с детского возраста до университета [4]. В **США** с самого начала XXI в. официально провозгласили приоритетным развитие образования в сфере высоких технологий. STEM-образование (Science, Technology, Engineering, Mathematics) становится государственным приоритетом, цель которого – развитие навыков самостоятельного суждения, подготовка обучающихся к современным технологическим вызовам. Сегодня STEM-подход подхвачен многими странами мира в университетах Англии, Канады, Австралии, Франции, Китая и др. Данное направление становится приоритетным в их национальной политике. Уместно напомнить, что впервые STEM-образование (обучение науке, технологии и математики) зародилось после запуска советского спутника (1957 г.). Это был яркий пример превосходства Советского Союза в области космической и ракетной технологий. Именно это событие, так называемый «спутниковый кризис», вызвало резонанс в американском обществе [5], что послужило основанием начала активных действий для улучшения образования в области фундаментальных наук.

Необходимо отметить, что STEM-образование не состоит лишь в изучении отдельных дисциплин, а заключается во взаимодействии и использовании знаний на практике. В России активное развитие STEM-образования позволило сформировать новое поколение специалистов в области естествознания, способных эффективно работать в современном технологическом мире, что, в целом, стимулирует прогресс национальной экономики, увеличивает конкурентоспособность страны на мировой арене [5]. Так, например, активное развитие в России получило направление робототехники: проводятся различные мероприятия, выставки, исследовательские конкурсы, олимпиады, конференции различного уровня, на которых представляются новые научные достижения. Ярким примером может служить открытие образовательного центра «Сириус», техноклубов, кванториумов, FabLab при университетах. Важным звеном в данном вопросе является открытие все большего числа профильных лицеев, гимназий, школ с функциональным профильным обучением. Например, известная всем школа-интернат имени А. Н. Колмогорова на базе физико-математической школы № 18 при МГУ, в которой созданы физический, инженерный и компьютерно-информационный классы; Первый университетский лицей имени Н. И. Лобачевского – филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Усть-Лабинске; инженерный лицей КНИТУ – Казанского авиационного института (КАИ); IT-лицей КФУ и т. д.

**Таджикистан**, находясь в едином образовательном пространстве с Россией, стремится придать мощный импульс развитию науки и образования, внедрению современных методик и технологий. В стране инициированы масштабные проекты и программы, среди которых период 2020–2040 гг. объявлен Двадцатилетием образования и развития естественных, точных и математических наук. Данная инициатива является знаменательным этапом на пути к совершенствованию технического мышления в высших учебных заведениях и академических институтах Таджикистана.

В одном из своих выступлений Президент Республики Таджикистан, уважаемый Эмомали Рахмон, отметил: *«Вопрос подготовки учителей по естественнонаучным, точным и математическим дисциплинам является одной из важных задач в системе образования страны. ...Поэтому нам необходимо в будущем готовить высококвалифицированных преподавателей и исследователей по естественно-научным, точным и математическим направлениям, а также укреплять процесс реализации Двадцатилетней программы по обучению и развитию этих дисциплин в сфере науки и образования»* [6]. Сегодня в Таджикистане функционируют образовательные учреждения с естественнонаучным уклоном как в столице, так и в отдаленных городах. Это таджикско-русский лицей-интернат «Хотам и П. В.» (математический уклон) в городах Душанбе, Гиссар и Вахдат; российско-таджикская средняя общеобразовательная школа имени Дмитрия Менделеева (г. Турсунзаде); лицей филиала

МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе, лицей № 1 с физико-математическим уклоном в г. Душанбе, колледж информатики и компьютерной техники г. Душанбе, горный колледж имени С. Юсуповой г. Душанбе, технический колледж Таджикского технического университета имени академика М. С. Осими, технологический колледж г. Душанбе, лицей имени Тимура Собирова (математический уклон, г. Вахдат), гимназия им. А. Балъами (г. Вахдат), Инновационный колледж Худжанда, Международная школа программирования Cuddy School в Худжанде, политехнический колледж района Зафаробод, технологический колледж имени А. Каххорова г. Канибадам, технолого-инновационный колледж в г. Пенджикент и в районе Пяндж, энергетический колледж района Д. Балхи, металлургический колледж г. Турсунзаде, инженерно-технический колледж в районе Нуробод и в г. Нурек и др. Открытие учреждений точных наук активно продолжается. Так, 7 июня 2025 г. в г. Хороге открыт Центр развития искусственного интеллекта.

Еще одним ярким примером развития инженерного образования и упрочнения партнерства в области образования между **Россией** и **Таджикистаном** является старт 12 ноября 2025 г. в Таджикистане Дней робототехники, инновационных образовательных технологий и информатики, организованных Россотрудничеством и Астраханским государственным университетом имени В. Н. Татищева [7]. Данное мероприятие запланировано еще в трех городах Таджикистана. Важно, что в рамках данного мероприятия преподаватели информатики, математики и физики (с русским языком обучения) имеют возможность пройти курсы повышения квалификации.

Другой масштабной программой является проведение Республиканского конкурса «Илм – фурӯғи маърифат» («Наука – светоч просвещения»). Согласно распоряжению Президента Республики Таджикистан, конкурс организован с целью популяризации науки, вовлечения все большего числа обучающихся, молодежи к постижению естественных наук, поиска новых талантов, заинтересованных в точных науках, что, в целом, способствует подготовке высококвалифицированных инженерно-технических кадров, отвечающих требованиям современного прогресса. Данный конкурс стал востребованным среди школьников, студентов и магистрантов. В 2025 г. была добавлена новая номинация: «Искусственный интеллект и программирование». Если еще год назад для его проведения было выделено 4 млн 85 тыс. сомони, то в 2025 г. размер призового фонда для победителей конкурса из Резервного фонда Президента Республики Таджикистан был увеличен вдвое и составил 9 млн 220 тыс. сомони. Каждому наставнику, ученик которого получит призовое место или Гран-при, выдается премия в размере 20 тыс. сомони.

Наука оказывает значимое влияние на образование. Это отчетливо отражается на уровне подготовки студентов, особенно естественно-научного направления, имеющих прямой доступ к научно-исследовательским лабораториям и

обретающих навыки самостоятельного выполнения эксперимента, возможность участия в обсуждении поставленных задач и их результатов с научным руководителем на профессиональном уровне.

Являясь неотъемлемой частью Московского университета, Филиал в г. Душанбе придерживается сложившихся традиций *Alma Mater*, активно участвуя практически во всех научных мероприятиях МГУ – олимпиадах, научных конференциях, фестивалях и конкурсах. Филиал МГУ в г. Душанбе наравне с другими филиалами принимает активное участие в Московском фестивале «Наука 0+», поддерживаемом всеми филиалами МГУ, как одном из самых масштабных в мире социальных проектов в области популяризации науки.

Ежегодно в Филиале МГУ в г. Душанбе проводится международная научно-практическая конференция «Ломоносовские чтения», ставшая надежной площадкой для обсуждения научных результатов, обмена опытом ученых, преподавателей, молодых специалистов Таджикистана, России, Узбекистана, Беларуси и других стран при активном участии студентов и аспирантов.

Стало доброй традицией в Филиале проведение открытых научных семинаров с приглашением известных ученых, среди которых: д-р физ.-мат. наук, проф. В. Н. Чубариков; д-р хим. наук, проф. А. В. Кнотько, д-р хим. наук, проф., чл.-кор. РАН Н. Н. Еремин; руководитель Геофизической службы НАН Таджикистана, д-р техн. наук, акад. С. Х. Негматуллаев; д-р физ.-мат. наук, проф. С. Ф. Абдуллаев и многие другие.

Особенно хотелось бы подчеркнуть значение созданного в Филиале и регулярно проводимого **TechDay**. Это площадка, которую Филиал предоставляет начинающим и уже состоявшимся программистам для приобретения знаний и обмена опытом в области современных IT-технологий. Среди участников – специалисты IT-сферы из университетов, министерств, международных организаций, компаний «МегаФон Таджикистан», «Ориен банк», «Алиф банк», «Хумо» и др. Данная деятельность осуществляется на основании договора с Центрально-Азиатским IT-сообществом CASOUG (Central Asia Oracle User Group). Отрадно отметить, что среди спикеров TechDay можно увидеть выпускников Филиала. На встречах активно рассматриваются вопросы Web-разработки, DevOps, администрирования баз данных, продуктового дизайна и аналитики, возможности стажировок и т. д. Спонсором данного мероприятия традиционно выступает компания «Кока-Кола».

Таким образом, вызовы современности сегодня обязывают учитывать многие аспекты, в том числе необходимость внедрения современных технологий и тенденций к устойчивому развитию, а также инновационные подходы в естественнонаучном образовании. Вероятнее всего, необходимо делать акцент на следующие шаги: интеграцию ИК и цифровых технологий, обновление учеб-

ных программ, приобретение студентами научно-исследовательских и междисциплинарных навыков.

Реализация инновационных подходов в университетской среде естественнонаучного профиля обуславливает готовность выпускника к вызовам современности и, как следствие, его высокую профессиональную подготовку.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цитаты о науке. – URL: <https://ru.citatu.net/tsitatu-o-nauke/> (дата обращения: 01.11.2025).
2. Сингапурская система образования // Планета образования. – URL: [www.planetaedu.ru](http://www.planetaedu.ru) (дата обращения: 24.10.2025).
3. **Данилова, Л. Н.** Образовательный феномен Индии / Л. Н. Данилова // Симбирский научный вестник. – 2017. – № 4 (30). – С. 26–31.
4. Science Education in the State of Qatar / R. Huang, B. Xin, A. Tlili [et al.] // Science Education in Countries Along the Belt & Road. – 2022. – P. 527.
5. **Корецкий, М. Г.** Развитие STEM-подхода в России и мире / М. Г. Корецкий, Л. Р. Тукаева // Педагогика. Гуманитарные и социальные науки. – 2022. – Т. 93, № 4. – С. 148–153.
6. Выступление Президента Республики Таджикистан Эмомали Рахмона в честь Дня знаний и Урока мира 30 августа 2025 г. в г. Душанбе. – URL: <https://khovar.tj/> (дата обращения: 01.11.2025).
7. Пресс-релиз Россотрудничества. В Таджикистане стартовали Дни робототехники, инновационных образовательных технологий и информатики. – URL: <https://asiaplustj.info/ru/news/tajikistan/> (дата обращения: 12.11.2025).

Научное издание

**Преподавание математики в высшей школе  
и работа с одаренными студентами  
в современных условиях**

**Teaching mathematics in higher education  
and working with gifted  
students in contemporary context**

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 19 февраля 2026 года)

**Печатается в авторской редакции**

Редактор *А. А. Подошевка*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать 12.02.2026. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,91. Уч.-изд. л. 8,50. Тираж 10 экз. Заказ № 111.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.