МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 20 февраля 2025 года)

Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2025

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1
П72

П72 **Преподавание** математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 20 февр. 2025 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2025. – 84 с.: ил.
ISBN 978-985-492-311-6.

В сборнике представлены материалы научно-практического семинара, традиционно проводимого в Белорусско-Российском университете.

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1

ISBN 978-985-492-311-6

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 51-8

РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ СТУДЕНТА. ИГРОВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАЛЕЙДОСКОП»

Е. А. АКИМОВА, Г. Д. ЛЁВШИНА
Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
Москва, Россия

Умение находить решения в проблемных ситуациях, применить свои знания на практике – основное в подготовке будущих инженеров. Однако часто студенты технических вузов не готовы творчески воспринимать научные идеи, т. к. привыкли действовать строго по алгоритму, математику они воспринимают как набор рецептов. Поэтому во многих вузах, в том числе и в НИТУ МИСИС, встает задача организации дополнительных занятий и мероприятий для интересующихся математикой студентов.

В НИТУ МИСИС в начале 2018 г. был создан математический кружок, впоследствии переименованный в Математический клуб. Кроме того, проводятся мероприятия для привлечения интересующихся математикой студентов: внутренние олимпиады в конце каждого семестра, состоящие из восьми задач, отдельно для 1-го курса и старших курсов, математические бои совместно со студентами НИЯУ МИФИ, Математический калейдоскоп. В целях повышения интереса к предмету иногда мы включаем в олимпиадные соревнования элементы игры, задаем вопросы из истории математики или просто вопросы на сообразительность в форме викторины. Студентам предлагается решить не только чисто математические задачи, но и задачи с техническим или экономическим содержанием.

В этой статье мы хотим поделиться методической разработкой игровой технологии обучения «Математический калейдоскоп», не только позволяющей мотивировать студентов, но и обогащающей их социальный опыт, развивающей такие качества, как контроль над своим поведением, умение выстраивать командную работу.

Для проведения мероприятия понадобится интерактивная таблица для заполнения результатов, презентация с вопросами для викторины и комплект из десяти задач: семь задач на 5 баллов и три задачи на 10 баллов.

Команды студентов, состоящие из четырех человек и подавшие заявку на участие в мероприятии, собираются в лекционной аудитории и рассаживаются так, чтобы между ними было достаточно пространства и одна команда не слышала обсуждение другой.

Для каждой команды приготовлен конверт с комплектом задач. По команде все капитаны команд тянут вслепую карточку с задачей из конверта. Однако капитаны могут решить, на сколько баллов задачу они тянут.

На карточке с задачей команда должна написать решение. Когда команда решит задачу или придет к выводу, что не может с задачей справиться, капитан сдает карточку и получает право вытянуть следующую.

Время игры ограничено одним академическим часом.

По истечении времени команды сдают последнюю карточку. Организаторы переходят в другую аудиторию, проверяют решения и проставляют баллы за задачи в таблицу. Поскольку задачи у разных команд одинаковые, на подведение итогов уходит около тридцати минут. В эти полчаса команды участвуют в викторине. Результаты викторины заполняются в таблицу сразу.

Подведение итогов и поздравление победителей занимает ещё около пятнадцати минут.

При составлении задач учитывается программа подготовки студентов и ограниченное время проведения игры. Хорошим подспорьем могут служить сборники [1, 2]. Если в калейдоскопе участвуют студенты разных направлений подготовки, изучающие высшую математику по разным программам, то необходимо в соответствии с этим приготовить несколько комплектов задач. Так, например, можно подводить отдельно итоги для команд в «Технической лиге» и для команд в «Специальной лиге».

Практика применения разрабатываемых нами методов показывает, что использование дифференциации в обучении, элементов соревнования и поощрения студентов способствуют повышению интереса студентов к математике и дают ощутимый эффект в их дальнейшей научной деятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Винников, Е. В.** Математика: задачи студенческих олимпиад: сборник задач / Е. В. Винников, Г. Д. Лёвшина, Е. Л. Плужникова. – М.: МИСиС, 2018.

2. **Кожухов, И. Б.** Московские городские студенческие олимпиады по математике за 1996–2009 гг. / И. Б. Кожухов, В. А. Свентковский, Т. В. Соколова. – М.: Техполиграфцентр, 2010.

3. **Лёвшина, Г. Д.** Опыт проведения студенческих олимпиад в техническом университете / Г. Д. Лёвшина // 5 Междунар. конф.: тез. докл. – М. : РУДН, 2018.

УДК 629.027

ВОВЛЕЧЕНИЕ В НАУЧНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАК МЕТОД РАЗВИТИЯ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Э. Ф. МУРЗИНА, Е. Н. ДИК
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

Организация и участие в научно-практических конференциях является одной из форм представления результатов научной деятельности. Участие в подобных мероприятиях способствует изучению опыта работы других исследователей, является формой взаимосвязи с учеными других организаций, позволяет организовать непосредственное общение и обсуждение хода и итогов научно-исследовательской работы.

Одной из задач преподавания дисциплины «Математика» на 1-м и 2-м курсах университета является вовлечение обучающихся в научно-исследовательскую деятельность. Этому способствует достаточно большое количество научно-практических конференций, проводимых как в ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, так и конференций сторонних организаций, которые приглашают к участию преподавателей и обучающихся нашего вуза.

Когда мы говорим о способностях обучающихся, то имеем ввиду не только способности к изучению определенного учебного предмета, но и организаторские способности, умение оригинально оформить материал и др.

С целью развития этих качеств в первом семестре обучения привлекаем обучающихся к проведению мероприятий по темам дисциплины «Математика». К примеру, изучая раздел «Аналитическая геометрия», учащиеся выполняют расчетно-графическую работу, где не только решают задачи, но и представляют свои результаты в виде графиков. Основным программным обеспечением является Mathcad 14, в котором достаточно возможностей для построения графиков как в двухмерном, так и в трехмерном пространстве, а также в различных системах координат. Кроме того, обучающимся предлагается выполнить эти же чертежи в других программах и графических редакторах. Необходимо представить свою работу красочной и запоминающейся, т. е. сделать презентабельной. Затем проводится конкурс расчетно-графических работ, в котором оценивается выполнение заданий и представление их оформления. В обсуждении обучающиеся сравнивают возможности различных программ для выполнения какого-либо задания.

По мере приобретения опыта решения задач обучающимся предлагается подготовить реферативные доклады по тематике занятий. Эта работа включает изучение литературы, обзор различных научных взглядов и теорий, изучение различных методов решения задачи. Далее проходит обсуждение преимуществ и недостатков изученных методов решения. Также формируется умение грамотно оформить библиографический список.

Следующий этап состоит в том, что ребята на основе разобранных задач составляют новые задания. Это может быть постановка обратной задачи, решение задачи при новых начальных условиях, перенос метода для изучения иного процесса и т. д. Обучающимся необходимо обосновать предложенное решение и пояснить, что нового внесено в решение или постановку условия.

Затем обучающиеся готовят выступления по проделанной работе. Им необходимо составить доклад, подготовить выступление и презентацию. Предстоит учесть ограниченное время доклада, составить информативную презентацию, дополняющую выступление. Оформить тезисы и статью.

Обучающиеся ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ постоянно принимают участие в ежегодной конференции «Научная сессия обучающихся». Так, на конференции, проведенной весной 2024 г., было заслушано 49 докладов студентов 1-го и 2-го курсов факультета механики и цифрового инжиниринга и энергетического факультета.

Проводимая преподавателями работа безусловно способствует формированию навыков исследовательской работы, умению обобщать, анализировать, делать выводы. Навыки, полученные обучающимися на 1-м и 2-м курсах, обуславливают успешное выполнение и защиту выпускной квалификационной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Багаутдинова, И. И.** Применение прикладных программ в моделировании / И. И. Багаутдинова, Р. Р. Габитов, Д. Д. Калашников // Студент и аграрная наука: материалы XVI Всерос. студенч. науч. конф. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2022. – С. 244–247.

2. **Багаутдинова, И. И.** Приложение математической теории в инженерной графике / И. И. Багаутдинова, Р. Р. Батршина // Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании: избр. тр. II Всерос. молодеж. школы-конф., посвящ. 80-летию со дня рождения д-ра физ.-мат. наук, проф. Р. С. Сингатуллина. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2023. – С. 8–10.

3. **Багаутдинова, И. И.** Примеры статистических исследований промышленных процессов / И. И. Багаутдинова, Р. И. Зайруллин // Наука молодых – инновационному развитию АПК: материалы XV Нац. науч.-практ. конф. молодых ученых. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2022. – С. 171–177.

УДК 372.851:512.644

СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ В КУРСЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В. В. БАРДУШКИН, А. М. РЕВЯКИН
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
Москва, Зеленоград, Россия

Многие задачи, связанные с измерениями, приводят к системам вида $Ax = b$, где число m уравнений больше, чем число неизвестных n. Здесь m – число измерений. Интуитивно ясно, что увеличение m позволяет точнее найти значения величин, интересующих исследователя, проводящего эти измерения. Однако, поскольку измерения проводятся приблизительно, то система $Ax = b$, как правило, несовместна.

Например, пусть известно, что $y = x_1 + x_2 t$ и для нахождения параметров x_1 и x_2 $(n = 2)$ проведено m измерений (t_i, y_i), где $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда для определения x_1 и x_2 имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 t_1 = y_1, \\ x_1 + x_2 t_2 = y_2, \\ \ldots \\ x_1 + x_2 t_m = y_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Любые два из этих уравнений имеют решения, а при $m > 2$ система, как правило, несовместна.

Пусть A – матрица коэффициентов системы $Ax = b$, а b – ее вектор-столбец свободных членов. Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ вектор $\delta = Ax - b$ называется вектором невязки.

Под псевдорешением системы $Ax = b$ понимают любой вектор $\tilde{x}$, для которого норма вектора невязки $\|Ax - b\|$ достигает наименьшего значения. Метод наименьших квадратов основывается на использовании евклидовой нормы для вычисления длины вектора невязки $\delta = Ax - b$, т. е. минимизирует $\|\delta\| = \sqrt{\delta^T \delta}$.

Псевдорешение $\tilde{x}$ системы $Ax = b$ методом наименьших квадратов находится как решение системы нормальных уравнений $A^T A\tilde{x} = A^T b$ [1–3]. Если ранг матрицы A равен n, то нормальное псевдорешение является обычным решением квадратной системы нормальных уравнений, т. е. $\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Для изучения студентами способов решения систем нормальных уравнений авторами разработан банк матриц и вектор-столбцов свободных членов, полученных при решении задач регрессионного анализа, прогнозирования временных рядов и аппроксимации функций степенными рядами [2, 4, 5]. Число обусловленности каждой из матриц больше 100, а вектор-столбцы заданы с точностью до 10^{-4}. Далее студентам предлагается вначале округлить значения коэффициентов столбца свободных членов до 10^{-2}, затем просто «обрезать» значения коэффициентов этого же столбца, оставив только первые две значащие цифры после запятой в десятичной записи этих коэффициентов, получив две системы уравнений с разной правой частью. После этого предлагается решить две полученные системы нормальных уравнений любым известным способом (методом Гаусса, по правилу Крамера, обращением матрицы или итерационным методом). Далее для найденных псевдорешений вычислить нормы векторов невязки. Результаты всегда вызывают живой интерес и желание разобраться в существе проблемы.

Отметим, что метод наименьших квадратов часто приводит к плохо обусловленным матрицам. Если матрица A не является плохо обусловленной, можно устранить большую чувствительность решений к малым возмущениям при решении систем нормальных уравнений. Большая погрешность при решении систем нормальных уравнений $A^T A\tilde{x} = A^T b$ часто связана с тем, что число обусловленности $c(A^TA)$ матрицы A^TA равняется $c^2(A)$, где $c(A)$ – число обусловленности матрицы A. Матрица A^TA – симметрическая и неотрицательно определенная. Поэтому уменьшить погрешности при решении $A^T A\tilde{x} = A^T b$ можно двумя способами, воспользовавшись предварительными разложениями либо матрицы A в произведение ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R, либо матрицы A^TA в произведение $R_1^T R_1$ (разложение Холецкого), где R_1 – верхняя треугольная матрица [1–3]. Оба способа эффективны, поскольку $c(A) = c(R) = c(R_1) = c(R_1^T)$ и $c(Q) = 1$.

QR-разложение матрицы A с линейно независимыми столбцами получается без каких-либо дополнительных вычислений в процессе ортогонализации вектор-столбцов матрицы A (аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы о том, что во всяком n-мерном евклидовом пространстве имеются ортонормированные базисы [1–3, 6]).

Пусть $A = A_{m\times n} = Q_{m\times n}\cdot R_{n\times n}$, где $Q_{m\times n} = (q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n)$, где q_i – нормированные и попарно ортогональные вектор-столбцы. Заметим, что матрица $Q_{m\times n}$ уже не является ортогональной (она даже не квадратная), но обладает свойством, что $Q_{m\times n}^T \cdot Q_{m\times n} = E_{n\times n}$. Тогда

$$A^T A\tilde{x} = A^T b \quad \Leftrightarrow \quad R_{n\times n}\tilde{x} = Q_{m\times n}^T b.$$

Погрешность решения $\tilde{x}$, полученного из системы $R_{n\times n}\tilde{x} = Q_{m\times n}^T b$, определяется условием $c(A) = c(R_{n\times n})$. Привлекательность QR-разложения объясняется тем, что умножение матрицы A или вектора b на ортогональную матрицу Q не увеличивает ошибок округления или неопределенностей. Следовательно, для нахождения решения $\tilde{x}$ требуется лишь найти произведение $Q^T b$ и выполнить «обратный» ход метода Гаусса в системе с треугольной матрицей R. Предварительно выполненное разложение матрицы A избавляет от необходимости строить матрицу $A^T A$ и решать систему нормальных уравнений, тем самым не ухудшается обусловленность системы [1–3].

Удивительно, но факт, что довольно часто норма вектора невязки решения, полученного таким способом, меньше нормы вектора невязки решения, полученного с помошью встроенной процедуры пакета MATLAB [7].

Далее, пусть имеется разложение Холецкого $A^T A = R_1^T R_1$, где R_1 – квадратная верхняя треугольная матрица порядка n с ненулевыми элементами на главной диагонали [2, 3]. Отсюда

$$A^T A\tilde{x} = A^T b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R^T y = A^T b, \\ R\tilde{x} = y. \end{cases}$$

Решив две системы с треугольными матрицами, получим псевдорешение точнее, чем при решении системы нормальных уравнений.

Разложение Холецкого для симметрической положительно определенной матрицы легко получить методом неопределенных коэффициентов. Рекомендуем давать его, как один из критериев положительной определенности симметрической матрицы [2, 3].

Сранивая нормы векторов невязки псевдорешений систем $A^T A\tilde{x} = A^T b$, $R_{n\times n}\tilde{x} = Q_{m\times n}^T b$ и $\begin{cases} R^T y = A^T b, \\ R\tilde{x} = y, \end{cases}$ студенты сами делают выводы, как им в дальнейшем решать системы нормальных уравнений. Опыт авторов показывает, что лучше пользоваться QR-разложением, но проще (с небольшой потерей точности) разложением Холецкого.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стренг, Г.** Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 456 с.

2. **Ревякин, А. М.** Высшая алгебра : учеб. пособие для экон. специальностей / А. М. Ревякин. – М. : МИЭТ, 2007. – 504 с.

3. **Бардушкин, В. В.** Линейная алгебра для экономистов : учеб. пособие / В. В. Бардушкин, А. М. Ревякин. – М. : МИЭТ, 2019. – 252 с.

4. **Бардушкина, И. В.** Сборник заданий для самостоятельной работы студентов по линейной алгебре и математическому анализу / И. В. Бардушкина, А. М. Ревякин. – М. : МИЭТ, 2021. – 200 с.

5. **Ревякин, А. М.** Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 2: Математическая статистика / А. М. Ревякин, В. В. Бардушкин, И. В. Бардушкина. – М. : МИЭТ, 2017. – 224 с.

6. **Бардушкин, В. В.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / В. В. Бардушкин, С. Г. Кальней, А. М. Ревякин. – М. : МИЭТ, 2018. – 268 с.

7. **Ревякин, А. М.** MATLAB для изучения вычислительных методов линейной алгебры / А. М. Ревякин // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB : материалы V Междунар. науч. конф., Харьков, 11–13 мая 2011 г. – Харьков : БЭТ, 2011. – С. 546–607.

УДК 372.8

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ НАПИСАНИЯ КУРСОВЫХ РАБОТ

А. М. БУТОМА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Научно-исследовательская деятельность студентов является неотъемлемой частью их обучения в вузе, позволяя в полной мере использовать творческий и интеллектуальный потенциал учащихся, помогая в приобретении методологии научного познания и исследовательского опыта.

Как правило, к основным видам научно-исследовательской деятельности студентов относят учебную, т. е. деятельность, включенную в учебный процесс в соответствии с учебными планами [2], и вне учебную, например, деятельность, связанную с участием студентов в олимпиадах или конференциях [3].

Учебная научно-исследовательская деятельность студентов, включенная в учебный процесс, в частности, при изучении математики, предполагает выполнение лабораторных работ и решение индивидуальных заданий, написание курсовых и дипломных работ, выполнение заданий научно-исследовательского характера в период прохождения практики. Все это способствует углублению теоретических и практических знаний, развивает исследовательские навыки, вырабатывает ответственность и самостоятельность в принятии решений.

Рассмотрим это на примере написания курсовых работ по математике, в частности, по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Так как содержание курсовой работы по указанной дисциплине включает как теоретическую часть (обзор научной литературы по теме исследования, постановку задачи, обоснование метода исследования, описание метода), так и практическую часть (решение поставленной задачи с использованием метода исследования, содержащее необходимые пояснения), то при работе над курсовой работой развиваются различные исследовательские умения студентов. Прежде всего, такие умения, как умение видеть проблемы, выдвигать и проверять гипотезы, работать с текстом, классифицировать и структурировать изучаемый материал, делать выводы.

В процессе выполнения курсовой работы происходит совершенствование математической культуры студентов. Математическая культура обозначает творческое начало, широкую математическую эрудицию, понимание различных подходов к построению конкретных математических моделей экономических, физических, химических явлений и процессов. А так как, изучая математически различные явления и процессы, нельзя подгонять их под имеющиеся представления и средства исследования, то при создании математической модели необходимо настойчиво искать такую форму и способ математического описания, которые соответствовали бы реальной природе рассматриваемых явлений, что возможно лишь при высоком уровне математической культуры [1].

При написании курсовой работы по дифференциальным уравнениям студенты устанавливают взаимосвязи между различными понятиями, применяя физические, экономические, химические формулы, находят точки соприкосновения между отдельными разделами математики, физики, химии, экономики. В процессе практического решения задач прикладного характера происходит математическая формулировка задачи (построение математической модели), затем выбирается метод исследования (решения) математической задачи, проводится непосредственно математическое исследование, анализируется полученный результат.

Таким образом, развивается критическое мышление студентов, что означает развитие способностей к анализу информации и поиску оптимального решения поставленной задачи, принятию продуманных и теоретически подтвержденных выводов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Булдык, Г. М.** Формирование математической культуры студентов экономических специальностей / Г. М. Булдык. – Минск: БИП–С, 2002. – 315 с.

2. **Бутома, А. М.** Научно-педагогическая деятельность студентов как составляющая обучения будущих профессионалов / А. М. Бутома // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 16–17.

3. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.

УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОИСКА ИДЕИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

«Идея – это особая психологическая структура, с помощью которой мы организуем, понимаем и придаем значение внешней информации и впечатлениям».

Мэтью Фредерик, архитектор

Некоторые сведения, необходимые для понимания дальнейшего.

Настоящая статья является продолжением исследований из [1–3]. *Идеей* мы будем называть мыслеформу (т. е. оформившуюся, сформировавшуюся мысль), возникшую в результате изучения условия задачи. Она должна содержать указание (план) возможной дальнейшей деятельности, т. е. предположительно отвечать на вопрос «Что делать?». Характерная особенность феномена под названием «идея» заключается в том, что идея – это нечто новое в данной конкретной ситуации.

Пусть информационное поле (для нас – это математика) содержит некоторый элемент с неполной информацией. Назовем этот элемент *задачей*, если требуется восстановить отсутствующую информацию [1, с. 4]. *Информационной базой задачи* (*ИБЗ*) будем называть ту часть информационного поля, которая необходима для решения данной задачи.

Относительно конкретной задачи используемые идеи можно классифицировать так (рис. 1).

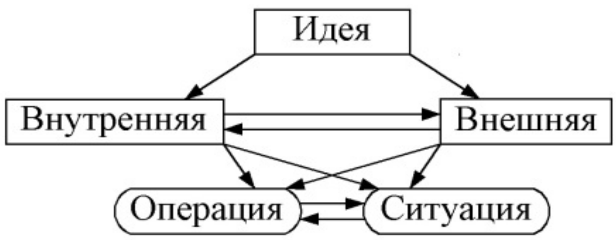


Рис. 1

Примечание – По поводу того, что первично, т. е. было раньше на уровне идеи «Ситуация или Операция», см. оргцикл [1, с. 66–67].

Демонстрация конкретных способов поиска идеи на примерах задач.

Задача 1. В ΔABC проведены медиана AM, биссектриса AD и высота AH. Доказать, что т. D лежит между т. M и т. H, если стороны AB и AC не равны.

Решение

Пусть $AB > AC$.

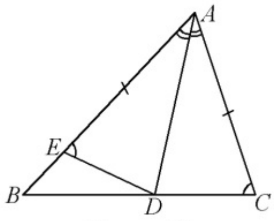


Рис. 2

Этап 1. В ΔABC проведем биссектрису $\angle A$ до пересечения с основанием BC в т. D и на стороне AB отложим отрезок AE, равный AC (рис. 2). Тогда имеем $\Delta ADE = \Delta ADC$. Следовательно, $\angle AED = \angle ACD = \angle C$. Очевидно, $\angle B + \angle BDE = \angle C \Rightarrow \angle BDE = \angle C - \angle B$.

Этап 2. В условиях этапа 1 покажем, что $\angle ADB > \angle ADC$. Действительно, $\angle ADB = \angle ADE + \angle BDE = \angle ADC + \angle BDE = \angle ADC + (\angle C - \angle B)$. Значит, $\angle ADB > \angle ADC$.

Следствие 1. Покажем, что $BD > DC$. Действительно, $\angle BED + \angle AED = 180^{\circ}$ (смежные углы). $\angle AED = \angle C$. Значит, $\angle BED = 180^{\circ} - \angle C = \angle A + \angle B$. Следовательно, $\angle BED > \angle B$. Но против большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Поэтому $BD > DE = DC$.

Замечание. Последнее утверждение можно получить значительно проще, если воспользоваться известным свойством биссектрисы:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} > 1 \Rightarrow BD > DC .$$

Но это доказательство основано на отношении подобия треугольников, а предыдущее использует лишь простейший инструментарий.

Этап 3. Согласно этапу 2 имеем $BD > DC \Rightarrow BD + BD > BD + DC \Rightarrow 2BD > BC \Rightarrow BD > BC/2$. Значит, т. D лежит дальше от т. B, чем т. M, которая является основанием медианы. Согласно этапу 2 $\angle ADB > \angle ADC \Rightarrow \angle ADB + \angle ADB > \angle ADC + \angle ADB = 180^{\circ} \Rightarrow \angle ADB > 90^{\circ}$, т. е. $\angle ADB$ – тупой и, следовательно, т. D ближе к т. B, чем т. H, которая является основанием высоты (в противном случае тупой угол оказался бы внутренним углом прямоугольного треугольника). Ч. т. д.

Следствие 2. В условиях задачи 1 биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

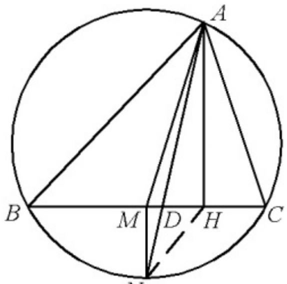


Рис. 3

Замечание. Приведенное доказательство следствия 1 основано на внутренней операции-идее, а именно: создание нового объекта ΔADE. Приведем более простое доказательство, основанное на внешней операции-идее, а именно: построение связной пары «треугольник – описанная окружность» (рис. 3). Для этого опишем около ΔABC окружность и пусть AM, AD и AH соответственно медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины A. Далее, пусть N – точка пересечения биссектрисы с окружностью. Поскольку $\angle BAN = \angle CAN$, то дуги BN и CN равны. Соединим т. N и т. M отрезком прямой. Прямая NM делит как дугу BC, так и стягивающую ее хорду пополам. Следовательно, $NM \perp BC$.

Проекции *M* и *H* концов отрезка *AN* на прямую *BC* будут находиться по разные стороны от т. *D*, ибо т. *D* есть ни что иное, как точка пересечения диагоналей трапеции *AMNH*.

Задача 2. Определить углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

Решение

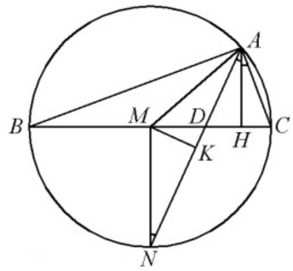


Рис. 4

Сохраняя обозначения рис. 3, докажем, что M – центр окружности, описанной около ΔABC (рис. 4). Рассмотрим ΔAMN. По ранее доказанному $NM \perp BC$, но и $AH \perp BC$. Следовательно, $NM \parallel AH \Rightarrow \angle MNA = \angle NAH$. По условию $\angle MAN = \angle NAH \Rightarrow \angle MNA = \angle MAN$. Значит, ΔAMN – равнобедренный. Проведем в ΔAMN высоту MK. Очевидно, что она будет срединным перпендикуляром к хорде AN. Учитывая теперь, что MN – срединный перпендикуляр к хорде BC, заключаем, что т. M – центр окружности, описанной около четырехугольника $ABNC$, а значит, и около ΔABC. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle BAM = 90^\circ/4 = 22{,}5^\circ$, $\angle ACB = 67{,}5^\circ$.

Замечание. В решении задачи 2 используются две ситуации-идеи: треугольник-описанная окружность (внешняя идея) и равнобедренный ΔAMN (внутренняя идея).

Заключительные замечания.

1. Существует множество попыток ответить на вопрос «Что такое идея?». В дополнение к нашему собственному определению скажем, что идея – это гипотеза (предположение), содержащая указание (план), что делать, чтобы решить данную задачу.

2. По-видимому, поиск идеи всегда предшествует началу деятельности, т. е. сначала идея, затем ее реализация (осуществление).

3. Подтверждением правильности разбиения множества идей на два класса: операции и ситуации могут служить следующие соображения. В [1, с. 52] приведена следующая иерархия видов деятельности (рис. 5).

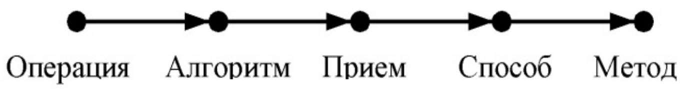


Рис. 5

Теперь предположим, что на рис. 1 термин «операция» заменен на термин «метод» (рис. 6). Уверен, что в таком виде ни в ком не возникнут сомнения, что это разные подходы к решению проблемы.

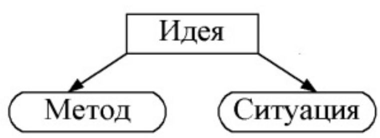


Рис. 6

4. В [4, с. 15] приведена концепция «веера возможностей», т. е. веера возможных дальнейших шагов в конкретном узле процесса конструирования решения (см. также [1, с. 35]). Очевидно, веер возможностей и есть источник наших идей.

5. При решении задач 1 и 2 мы использовали вспомогательную окружность. Аналогичный прием используется при выводе формулы, выражающей биссектрису треугольника через его стороны [1, с. 48–51].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: новый взгляд на старые истины: брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

2. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач как идеология принятия решений в условиях структурно-информационной неопределенности в математике / Л. Л. Великович // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2024. – С. 20–24.

3. **Великович, Л. Л.** Некоторые новые категории и результаты теории решения задач / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 18 апр. 2024 г. – Гомель: БелГУТ, 2024. – С. 76–80.

4. **Великович, Л. Л.** Подготовка к экзаменам по математике: учеб. пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 кл.: в 2 ч. / Л. Л. Великович. – М.: Народное образование, 2006. – Ч. 1. – 610 с.

УДК 378.147

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Настоящим прорывом в компьютерной математике (СКМ) следует считать возможность оперировать не только с традиционными численными, но и символьными вычислениями. Под символьными вычислениями подразумевают широкий спектр преобразований с разнообразными математическими объектами: алгебраические преобразования выражений, формальное дифференцирование и интегрирование, разложение функций в степенные ряды, матричные вычисления и т. д. В последнем случае элементами матриц могут служить символы различной природы. Символьные вычисления могут проводиться и с числами: разложение на множители, разворачивание произведений. Исторически пионером применения символьных вычислений следует считать, видимо, СКМ Maxima [1], а наиболее ярко их возможности проявляются в СКМ Mathcad. СКМ Smath

Studio [2], придерживаясь стиля СКМ Mathcad, является при этом доступной для пользователя [3].

Поддержка символьных вычислений значительно упрощает работу пользователя, позволяя создавать своеобразные шаблоны – математические модели решения задачи. Загружая в такую модель конкретные числовые данные, на выходе имеем не только ответ, но и важнейшие промежуточные контрольные точки решения. Рассмотрим математическую модель приведения к каноническому виду общего уравнения кривой 2-го порядка.

Рассмотрим кривую $F(x;y)=7\cdot x^2-6\sqrt{3}x\cdot y+13\cdot y^2-4\sqrt{3}x-4y-60$. Будем подбирать ортогональное преобразование, которое диагонализирует матрицу квадратичной формы: $Q=\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$. Матрица линейной формы $L=\begin{pmatrix}-4\sqrt{3}\\ -4\end{pmatrix}$ также будет использована позже. В отличие от СКМ Mathcad, программа Smath Studio в настоящее время не предлагает встроенных функций для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы напрямую. Поэтому воспользуемся имеющимися возможностями и некоторыми расширениями, которые могут быть подключены при желании (меню – сервис – дополнения – галерея онлайн – выбор нужного расширения). Из предложенного списка подключим расширение Maple Tools, основанное на движке из СКМ Maple. Рассчитаем (рис. 1) собственные числа матрицы Q квадратичной формы символьно:

$$\lambda:=\mathrm{maple}\left(solve\left(\left|Q-\lambda\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0\right)\right)\qquad \lambda=\begin{bmatrix}16\\ 4\end{bmatrix}$$

собственные числа

Рис. 1. Расчет собственных чисел матрицы в СКМ SMath Studio

Для нахождения собственных векторов матрицы и их дальнейшего нормирования воспользуемся следующей процедурой (рис. 2 и 3).

$$v1(x):=\begin{bmatrix}x\\ \mathrm{maple}\left(\mathrm{solve}\left(\left(\left(Q-\lambda_1\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)_1=0;\ y\right)\right)\end{bmatrix}\qquad v1(x)=\begin{bmatrix}x\\ -x\cdot\sqrt{3}\end{bmatrix}\qquad v\_1:=\frac{\mathrm{maple}\left(v1\left(-\sqrt{3}\right)\right)}{\mathrm{norme}\left(v1\left(-\sqrt{3}\right)\right)}$$

$$v\_1=\begin{bmatrix}-0{,}5\\ 0{,}866\end{bmatrix}$$

Рис. 2. Расчет и нормировка 1-го собственного вектора

$$v2(x) := \left[\text{maple}\left(\text{solve}\left(\left(\left(Q - \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)_2 = 0; y \right) \right)^x \right] \quad v2(x) = \begin{bmatrix} x \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad v\_2 := \frac{v2(\sqrt{3})}{\text{norme}(v2(\sqrt{3}))}$$

$$v\_2 = \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Расчет и нормировка 2-го собственного вектора

Из координат рассчитанных векторов формируем (рис. 4) матрицу ортогонального преобразования координат, диагонализирующую матрицу квадратичной формы. Здесь же непосредственной проверкой (матричным пересчетом коэффициентов квадратичной и линейной части уравнения) убедимся в правильности расчётов и получим коэффициенты при новых переменных (см. рис. 4).

$$T\_ := \text{augment}(v\_2; v\_1) \qquad T\_ = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$T\_^{T} \cdot Q \cdot T\_ = \begin{bmatrix} 4 & 1{,}923 \cdot 10^{-16} \\ 7{,}6919 \cdot 10^{-16} & 16 \end{bmatrix} \qquad T\_^{T} \cdot L = \begin{bmatrix} -8 \\ -3{,}8459 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Рис. 4. Матрица ортогонального преобразования и проверка

В случае формы с двумя переменными правильность решения задачи можно оценить и визуально, переходя к графикам. Для этого удобно подключить расширение X-Y Plot Region, позволяющее строить графики неявно заданных функций. Угол поворота системы координат оценим по матрице ортогонального преобразования координат (рис. 5).

$$\alpha := \frac{1 \cdot \text{arctg}\left(\dfrac{2 \cdot Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}} \right)}{2} \qquad \alpha = \frac{\text{arctg}(\sqrt{3})}{2} \quad \alpha = 0{,}5236 \qquad \alpha \cdot \frac{180}{\pi} = 30$$

Рис. 5. Угол поворота системы координат

Составим матрицу поворота системы координат на рассчитанный угол и сравним её с рассчитанной матрицей ортогонального преобразования (рис. 6).

$$povorot := \begin{bmatrix} \cos\left(\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi}\,°\right) & -\sin\left(\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi}\,°\right) \\ \sin\left(\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi}\,°\right) & \cos\left(\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi}\,°\right) \end{bmatrix} \quad povorot = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \quad T\_ = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

Рис. 6. Контроль вычислений

Построим (рис. 7) в одной системе координат графики, связанные с двумя уравнениями кривых – исходным и полученным.

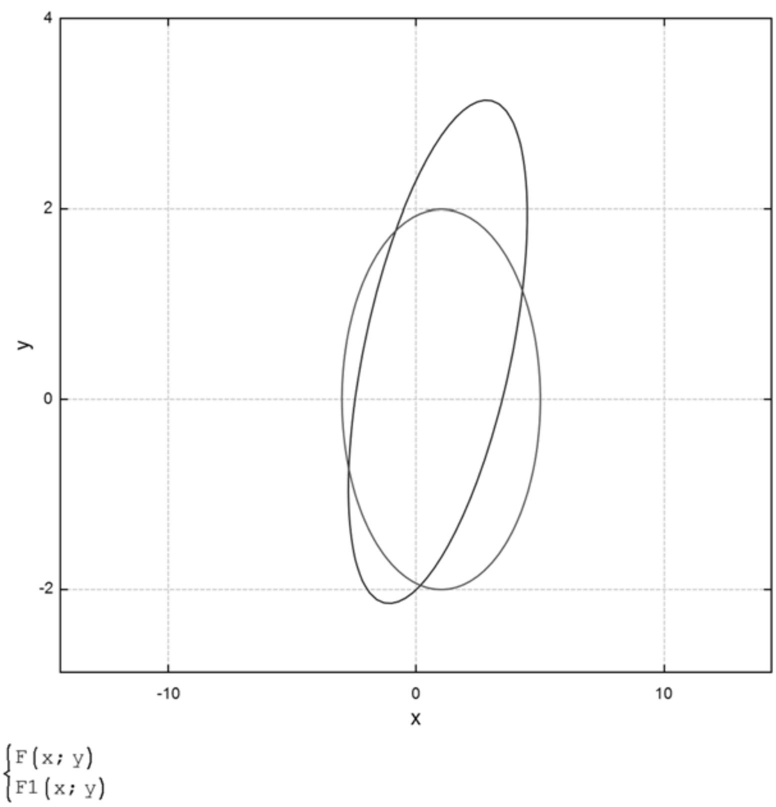


Рис. 7. Визуализация решения задачи

Приведенный пример демонстрирует как аппаратные возможности самой программы SMath Studio, так и область применения. Очевидно, построенный шаблон есть одновременно и интерактивный справочник для рассматриваемой задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт программы Maxima. – URL: https://maxima.sourceforge.io/ru/.
2. Официальный сайт программы SMath Studio. – URL: https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме.

3. **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февр. 2021 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 35–37.

УДК 519.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПОЛИКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ЦИФРОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Е. Н. ДИК, С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Э. Ф. МУРЗИНА
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

В статье рассматривается построение математической модели эксплуатационного процесса работы двигателя, а именно: определяется связь смазочного материала и мощности двигателя на основе методов теории корреляции и регрессионного анализа. Известно, эти методы математически формализуют связи переменных количественных признаков, далее изучаются свойства модели и степень адекватности построенной корреляционной модели. Приводится лабораторный пример построения линейной модели о связи расхода моторного масла в зависимости от мощности двигателя автомобиля.

Техническое обеспечение современного производства в АПК подтверждает многопрофильную подготовку кадров инженерной специализации в высшем учебном заведении. Инженер-исследователь, он же генератор идей, осваивает функции проектирования, моделирования, конструирования. Инженер-производственник эксплуатирует, внедряет технические комплексы в производственную сферу. В целом, будущий инженер должен овладеть общепрофессиональными компетенциями – инженерным ядром.

В статье рассматривается роль инженера-исследователя, способного построить, адаптировать модель технического процесса и прогнозировать изменения модели под конкретные условия. В частности, создана математическая модель линейной корреляции для несгруппированных данных, проверена достоверность и надежность на соответствие реальным данным.

Следующая задача освещает тему исследования. Имеются данные, приведенные в табл. 1, нормы расхода моторных масел на угар и замену Y л/100 л. т. в зависимости от максимальной мощности двигателя автомобиля X л. с.

Выбор факторного признака определил X – максимальную мощность двигателя автомобиля, результативный признак принадлежит переменной Y – расходу моторных масел на угар и замену.

Табл. 1

X	39	42	53	70	75	90	110	115	150	170
Y	1,3	1,3	0,9	2,2	2,2	2,2	2,8	2,4	2,5	2,6

Предполагаем, что зависимость расхода моторного масла от мощности двигателя автомобиля носит линейный характер. Поэтому математическая модель, представляющая уравнение регрессии, построена методом наименьших квадратов.

Для расчета вспомогательных статистик $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y, r потребуются данные табл. 2.

Табл. 2

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	x^2	xy
39	-52,4	2745,76	1,3	-0,74	0,5476	1521	50,7
42	-49,4	2440,36	1,3	-0,74	0,5476	1764	54,6
53	-38,4	1474,56	0,9	-1,14	1,2996	2809	47,7
70	-21,4	457,96	2,2	0,16	0,0256	4900	154
75	-16,4	268,96	2,2	0,16	0,0256	5625	165
90	-1,4	1,96	2,2	0,16	0,0256	8100	198
110	18,6	345,96	2,8	0,76	0,5776	12100	308
115	23,6	556,96	2,4	0,36	0,1296	13225	276
150	58,6	3433,96	2,5	0,46	0,2116	22500	375
170	78,6	6177,96	2,6	0,56	0,3136	28900	442
914		17904,4	20,4		3,704	101444	2071

Рассчитаем выборочные средние квадратические отклонения, среднее произведений исследуемых признаков и коэффициент корреляции:

$$S_x = \sqrt{{S_x}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot 17904{,}4} = 44{,}6;$$

$$S_y = \sqrt{{S_y}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 3{,}704} = 0{,}64;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{10} \cdot 2071 = 207{,}1;$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{207{,}1 - 91{,}4 \cdot 2{,}04}{44{,}6 \cdot 0{,}64} = 0{,}72.$$

Расчетный коэффициент по опытным данным позволяет оценить коэффициент корреляции

$$t_p = \frac{|r| \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}72 \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}72^2}} = 2{,}93.$$

Значение теоретического коэффициента выбираем из таблицы критических точек распределения Стьюдента. Сравним t_p и t_T: $t_p = 2{,}93$; $t_T = 2{,}31$. Если $t_p > t_T$, т. е. $2{,}93 > 2{,}31$, то корреляция X и Y значима, существует линейная связь этих признаков.

Рассчитаем доверительный интервал r с надежностью 0,95 и объемом выборки $n = 10 < 50$:

$$r - t_\gamma \cdot \sigma_r \leq \hat{r} \leq r + t_\gamma \cdot \sigma_r.$$

При надежности $\gamma = 0{,}95$ коэффициент, входящий в предыдущее неравенство, равен $t_\gamma = 2{,}26$ (по таблице функции Лапласа).

Вычисляем погрешность коэффициента корреляции:

$$\sigma = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-2}} = \frac{1-0{,}72^2}{\sqrt{10-2}} = 0{,}17;$$

$$0{,}72 - 2{,}26 \cdot 0{,}17 \leq \hat{r} \leq 0{,}72 + 2{,}26 \cdot 0{,}17.$$

Таким образом, размах значений коэффициента корреляции с вероятностью 0,95 заключен в интервале $r \in [0{,}34;1]$. То есть в 34 % случаев и более прогнозируется влияние факторного признака на результативный. Следует изучить влияние и других факторов, возможно увеличивающих долю исследуемых связей.

Строим линейную модель – эмпирическую линию регрессии (рис. 1), используя данные табл. 2:

$$y_x = y(x) = \bar{y} + r \cdot \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}); \qquad y_x = 2{,}04 + 0{,}0103x - 0{,}9414;$$

$$y_x = 0{,}0103x + 1{,}0986.$$

Из уравнения $y_x = 0{,}0103x + 1{,}0986$ следует, что при увеличении максимальной мощности двигателя автомобиля на 100 л. с. расход моторных масел на угар и замену возрастет на 1,03 л/100 л. т.

Исследование нормы расхода смазочного материала построенной линейной зависимостью объяснимо в 52 % случаев и 48 % изменений обусловлено неучтенными в модели факторами. Например, нагрузками на транспорт или отказ технического узла конструкции автомобиля. Значит, адекватность модели по исследованию результативного признака требует дополнительного цикла изучения.

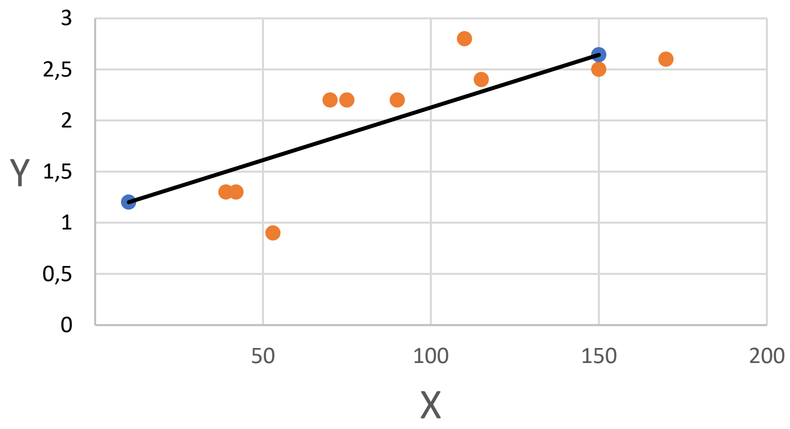


Рис. 1. Линейная регрессия Y на X (прямая с уравнением $y_x = 0{,}0103x + 1{,}0986$)

Проверка соответствия исследуемых величин их реально существующим значениям осуществляется по критерию Фишера – Снедекора. Для расчета статистики $F_{\text{H}} = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}$; $R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \overline{y_{x\iota}})^2}{\sum y_i - \bar{y}}$ применим вспомогательные данные табл. 3.

Табл. 3

y_i	$\overline{y_x}$	$y_i - \overline{y_{x\iota}}$	$(y_i - \overline{y_{x\iota}})^2$
1,3	1,5003	-0,2003	0,0401
1,3	1,5312	-0,2312	0,0535
0,9	1,6445	-0,7445	0,5543
2,2	1,8196	0,3804	0,1447
2,2	1,8711	0,3289	0,1082
2,2	2,0256	0,1744	0,0304
2,8	2,2316	0,5684	0,3231
2,4	2,2831	0,1169	0,0137
2,5	2,6436	-0,1436	0,0206
2,6	2,8496	-0,2496	0,0623
			1,3508

Выбираем значения последних столбцов $\sum(y_i - \bar{y})^2 = 3{,}7040$, $\sum(y_i - \overline{y_{x\iota}})^2 = = 1{,}3508$. Далее $R^2 = 1 - \frac{1{,}3508}{3{,}7040} = 0{,}635$; $F_{\text{H}} = \frac{0{,}635\cdot(10-2)}{1-0{,}635} = 13{,}918$.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k_1 = 1$, $k_2 = n - - 2 = 10 - 2 = 8$ по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора находим $F_T = F_{\alpha;k1;k2} = F_{0{,}05;1;8} = 5{,}32$. Имеем $F_{\text{H}} = 13{,}918 > 5{,}32$, следовательно, эмпирическая зависимость, полученная методами математической статистики, позволяет планировать эксперимент.

Относительная погрешность эмпирического уравнения регрессии исследована по формуле

$$\delta = \frac{\sigma_u}{\bar{y}} \cdot 100\ \%; \quad \sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{\frac{\sum(u_i - \bar{u})^2}{n-2}}; \quad u_i = y_i - \overline{y_x}; \quad \bar{u} = \frac{1}{n}\sum(y_i - \overline{y_x})^2.$$

Рассчитаем $\sigma_u = \sqrt{\frac{1{,}5308}{8}} = 0{,}437$; $\delta = \frac{0{,}437}{2{,}04} \cdot 100\ \% = 21\ \%$. Относительная погрешность получила допустимое значение, точность оценки теоретически полученных и экспериментальных данных очевидна.

Исследование коэффициентов $a_0 = 1{,}0986$, $a_1 = 0{,}0103$ через расчет средних квадратических значений:

$$S_{a0} = S_{y/x} \cdot \sqrt{\frac{[x^2]}{n[x^2] - ([x])^2}}; \quad S_{a1} = S_{y/x}\sqrt{\frac{n}{n[x^2] - ([x])^2}}; \quad S_{y/x} = S_y\sqrt{1 - r^2}.$$

Выбираем из табл. 2 $[x] = 914, [x^2] = 101444$. Учитывая, что $n = 10$, $r^2 = 0{,}52$ и $S_y = 0{,}64$, находим:

$$S_{y/x} = 0{,}64 \cdot \sqrt{1 - 0{,}52} = 0{,}443;$$

$$S_{a0} = 0{,}443 \cdot \sqrt{\frac{101444}{10 \cdot 101444 - (914)^2}} = 0{,}14;$$

$$S_{a1} = 0{,}443 \cdot \sqrt{\frac{10}{10 \cdot 101444 - (914)^2}} = 0{,}0033.$$

$\frac{S_{a_0}}{|a_0|} = \frac{0{,}14}{1{,}0986} = 0{,}13 < 0{,}5$ и $\frac{S_{a_1}}{|a_1|} = \frac{0{,}0033}{0{,}0103} = 0{,}32 < 0{,}5$, значения коэффициентов удовлетворяют граничным значениям неравенств, а потому значимы для планирования эксперимента по найденной эмпирической зависимости (см. рис. 1).

Окончательно, уравнение регрессии $y_x = 0{,}0103x + 1{,}0986$, описывающее зависимость расхода моторных масел на угар и замену от максимальной мощности двигателя автомобиля, значимо описывает опытные данные для анализа и прогнозирования технических величин.

Таким образом, роль инженера-исследователя представлена, как часть многопрофильной подготовки инженерных кадров, на примере знания законов специальных математических дисциплин, лежащих в основе инженерной специализации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Губин, В. И.** Статистические методы обработки экспериментальных данных: учеб. пособие / В. И. Губин, В. Н. Осташков. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2007. – 202 с.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XIV ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Наиболее сложными заданиями четырнадцатой Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике [1] были рассматриваемые ниже задачи 1 и 2. Правильные ответы в этих задачах дали соответственно четыре и пять участников.

Задача 1 [2, с. 534]. После лекции воздух в аудитории объёмом 10800 кубических метров содержит 0,12 % CO_2. Сколько кубических метров воздуха, содержащего 0,04 % CO_2, надо ежеминутно доставлять в зал, чтобы через 10 минут после перерыва содержание углекислоты в аудитории составило 0,06 %?

Решение

Пусть a − искомая величина, а $x(t)$ − количество углекислоты в момент времени t. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$dx = a\left(0{,}0004 - \frac{x}{10800}\right)dt.$$

Решая данное линейное дифференциальное уравнение, получаем

$$x' + \frac{a}{10800}x = 0{,}0004a,\ \left(xe^{\frac{at}{10800}}\right)' = 0{,}0004ae^{\frac{at}{10800}},$$

$$x(t) = ce^{-\frac{at}{10800}} + 4{,}32\ -$$

общее решение уравнения.

Учитывая, что $x(0) = 0{,}0012 \cdot 10800 = 12{,}96$, находим $c = 8{,}64$.

Таким образом, $x(t) = 8{,}64e^{-\frac{at}{10800}} + 4{,}32$. По условию

$$x(10) = 0{,}0006 \cdot 10800 = 6{,}48,$$

т. е. $8{,}64e^{-\frac{a}{1080}} = 2{,}16$, откуда

$$e^{-\frac{a}{1080}} = 0,25\,,\ a = -1080\ln 0,25 = 2160\ln 2\,.$$

Ответ: $2160\ln 2$.

Задача 2 [3, с. 267]. Найдите произведение решений уравнения

$$(3x)^{3\log_6 2x-4} = 2024 \cdot x^{\log_6 x}.$$

Решение

При $x > 0$ обе части уравнения положительны. Логарифмируя по основанию 6, получаем

$$(3\log_6 2x - 4)\log_6 3x = \log_6^2 x + \log_6(2024);$$

$$(3\log_6 2 + 3\log_6 x - 4)(\log_6 3 + \log_6 x) = \log_6^2 x + \log_6(2024);$$

$$2\log_6^2 x - \log_6 x + (3\log_6 2 - 4)\log_6 3 - \log_6(2024) = 0;$$

$$2\log_6^2 x - \log_6 x + 3\log_6 2\log_6 3 - \log_6 2^3 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 23 = 0.$$

Убедившись в том, что данное квадратное относительно $\log_6 x$ уравнение имеет два действительных решения, по теореме Виета получаем, что сумма этих решений равна $\frac{1}{2}$ и, значит, произведение решений исходного уравнения равно $\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 3 и 4, правильные ответы в которых дали по 27 участников.

Задача 3 [4, с. 574]. При каком наименьшем действительном значении a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geq 0$ выполняется при всех действительных x?

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задача 4 [5, с. 50]. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.

2. **Пономарев, К. К.** Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1973. – 560 с.

3. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. Н. Яковлева. – М. : Наука, 1981. – 608 с.

4. **Дорофеев, Г. В.** Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М.: Наука, 1976. – 638 с.

5. **Янович, Э. А.** Задачи студенческих математических олимпиад / Э. А. Янович. – СПб.: СПбГПУ, 2009. – 96 с.

УДК 311.1

О ПРЕПОДАВАНИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В. В. ИГНАТЕНКО, Е. А. ЛЕОНОВ
Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь

Следует отметить, что в последние годы возникла парадоксальная ситуация с преподаванием математики в технических университетах. С одной стороны, значительно уменьшилось количество часов по математике в учебных планах и сильно упал уровень школьной подготовки по математике, а с другой – требования математической подготовки к будущим инженерам возросли. Появились новые разделы математики, которые должен знать инженер.

Выход из этого положения состоит в практико-ориентированной форме обучения, с ориентацией на реальные производственные задачи будущей специальности [1–3]. Поясним, как это делается в Белорусском государственном технологическом университете при преподавании линейного программирования (ЛП) для специальностей «Лесная инженерия и логистическая инфраструктура лесного комплекса» (профилизаций «Технология лесопромышленного производства» и «Логистические системы и инфраструктура лесного комплекса») и «Технология деревообрабатывающих производств» (профилизаций «Технология деревообработки» и «Технология и дизайн мебели»).

Методами линейного программирования (ЛП) решаются многие задачи лесопромышленного комплекса, поэтому в курсе высшей математики изучается линейное программирование, где особое место уделяется построению и решению математических моделей для реальных производственных задач [1, 2].

Поэтому основной упор делается не столько на теорию ЛП (теория симплекс-метода, симплекс-таблицы, М-задача и т. д.), сколько на рассмотрение реальных производственных задач, решаемых этими методами. Естественно формулируется сама задача линейного программирования в нормальной и канонической формах, рассматривается графический метод решения, чтобы подчеркнуть сущность метода ЛП и показать, где достигаются значения целевой функции. Поясняется идея симплекс-метода. Дело в том, что при решении реальных производственных задач методами ЛП никто теперь не использует ручной симплекс-метод, используются компьютеры, для которых имеется достаточное количество разработанных программ по ЛП. Поэтому нет необходимости тратить много времени на подробное изложение теории.

Важно рассмотреть не общие постановки задач ЛП, а конкретные производственные задачи, показать, как записать для них математические модели, которые затем решаются на компьютере, и провести анализ полученных решений.

Рассмотрим некоторые из них, читаемые для вышеуказанных специальностей.

Например, известная задача оптимального использования ресурсов для студентов рассматриваемых специальностей формулируется следующим образом.

У лесозаготовительного предприятия имеются ресурсы: лесосечный фонд – запасы спелой древесины различных пород (сосна, береза, ель, осина, дуб, ольха и т. д.), отведенной в рубку, лесозаготовительное оборудование (бензопилы, харвесторы, форвардеры, лесовозные автопоезда и т. д.), трудовые ресурсы и некоторые другие в заданных объемах, необходимые для производства продукции.

Используя имеющиеся ресурсы, предприятие может производить следующую продукцию: пиловочник хвойный, пиловочник лиственный, фанерный кряж, балансы, которая реализуется по различным ценам, при этом затраты на производство каждого вида продукции разные. Требуется рассчитать план выпуска продукции для получения максимальной прибыли при ограниченных ресурсах, используемых на предприятии.

При такой формулировке задачи студент видит не просто абстрактные ресурсы и продукцию, а конкретно то, с чем ему придется сталкиваться в будущей работе.

В деревообрабатывающей промышленности одной из основных задач является задача оптимального раскроя листов фанеры, древесно-стружечных и древесно-волокнистых плит, обивочных тканей, лесоматериалов, брусьев, досок и многих других материалов и изделий на заготовки нужных размеров и в нужном количестве при минимуме отходов.

От ее решения зависит эффективность производства, которая применительно к конкретным условиям может оцениваться максимальным объемным выходом целевого сортимента, максимальной стоимостью выпиливаемых сортиментов, минимумом отходов и др.

На практических занятиях решаются задачи с реальными исходными данными. Так, при решении задачи оптимального раскроя решают следующую задачу: в аудитории имеются окна заданной конфигурации. Рамы для этих окон изготовляются из брусков одинакового сечения длиной 5 м. Нужно составить план оптимального раскроя брусков на нужное количество заготовок, чтобы отходы были минимальными. При решении этой задачи студентам необходимо первоначально снять с окон размеры нужных заготовок и найти их количество. Затем записать возможные варианты раскроя брусков на нужные заготовки, а только потом записать математическую модель данной задачи и решить ее методами ЛП.

Задача оптимальной загрузки оборудования в цехе по углубленной переработке древесины решает еще и оптимальную программу выпуска лесоматериалов.

Пусть (не ограничивая общности) цех выпускает продукцию трех видов: x_1, x_2 и x_3. Выпуском продукции занято оборудование четырех групп: A – окорочные станки, B – брусующие станки, C – делительные станки, D – торцовочные станки. Фонд времени для станков вычисляется по формуле [1] и зависит от продолжительности рабочей смены, коэффициента сменности, количества станков в группе. Необходимо составить такой план загрузки оборудования, чтобы:

– прибыль от выпущенной продукции была максимальной;

– оборудование было загружено по максимуму.

Решая задачу методами ЛП, находим оптимальные объемы выпуска продукции и переходим к анализу полученного решения. Для этого необходимо найти фактические затраты времени, необходимые для выпуска оптимальных объемов продукции. Далее находятся коэффициенты загрузки каждой группы станков.

Если эти коэффициенты меньше требуемой величины, например, 0,9, то принимаются технологические, организационные или другие меры, повышающие их значения вплоть до максимального, равного 1. Например, можно уменьшить количество рабочих смен в сутки или сделать их неполными. Можно также рассмотреть вопрос о демонтаже и продаже избыточного количества станков и т. д.

Методами линейного программирования решаются и многие другие задачи лесопромышленного комплекса: задача оптимизации парка автопоездов для вывозки древесины; задача составления дорожных смесей при строительстве лесных дорог; задача оптимизации грузопотоков древесины, щепы, пиломатериалов и т. п. (транспортная задача) [1]. При решении транспортной задачи обычно рассматривают вывозку сортиментов с лесосек к потребителям. При этом конкретно указываются лесосеки, предприятия-потребители и стоимости перевозок. Например, лесосеки Логойского лесхоза, предприятия-потребители – ОАО «Минскдрев», ООО «Профитсистем» и т. д. После получения оптимального плана перевозок обязательно сравнивают его стоимость перевозок со стоимостью первоначального плана перевозок, чтобы студенты почувствовали их разницу.

При таком подходе студенты лучше понимают возможности ЛП и его использования в будущей работе, а преподаватели имеют возможность более эффективно использовать выделенные учебные часы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Игнатенко, В. В.** Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок: учеб. пособие / В. В. Игнатенко. И. В. Турлай, А. С. Федоренчик. – Минск: БГТУ, 2004. – 180 с.

2. **Игнатенко, В. В.** Реальные задачи производства в курсе высшей математики в техническом университете / В. В. Игнатенко, Е. А. Леонов // Проблемы и основные направления развития высшего технического образования: материалы XXV науч.-метод. конф. – Минск, 2023. – С. 137–139.

3. **Игнатенко, В. В.** Использование реальных производственных задач при преподавании курса высшей математики / В. В. Игнатенко, Е. А. Леонов // Качество образовательного процесса: проблемы и пути развития: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 17 апр. 2020 г. – Минск : БГУИР, 2020. – С. 91–92.

УДК 512.817:004.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ И В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ»

А. Г. КОЗЛОВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Навык построения графиков кривых, заданных параметрически и в полярных координатах, является востребованным для студентов технических вузов. Количество учебных часов, которые отводятся на изучение кривых второго порядка и параметрически заданных кривых, крайне мало.

Использование современных интерактивных сред и приложений, а также технических средств обучения, позволяет упростить и сделать более наглядным процесс построения графиков функций.

Язык программирования Python представляет множество различных библиотек, в которых можно построить графики функций в полярных и декартовых координатах.

Построение изображения графиков можно осуществлять, не устанавливая специальное программное обеспечение, достаточно браузера и Google Colaboratory (Colab). Используя Colab, можно писать и выполнять код, написанный на языке программирования Python, прямо в браузере.

Пример 1 – Построить параметрически заданную кривую

$$\begin{cases} x = \sin(mt), \\ y = \sin(nt), \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Придавая коэффициентам m и n натуральные значения от 1 до 4, получим кривые (рис. 1).

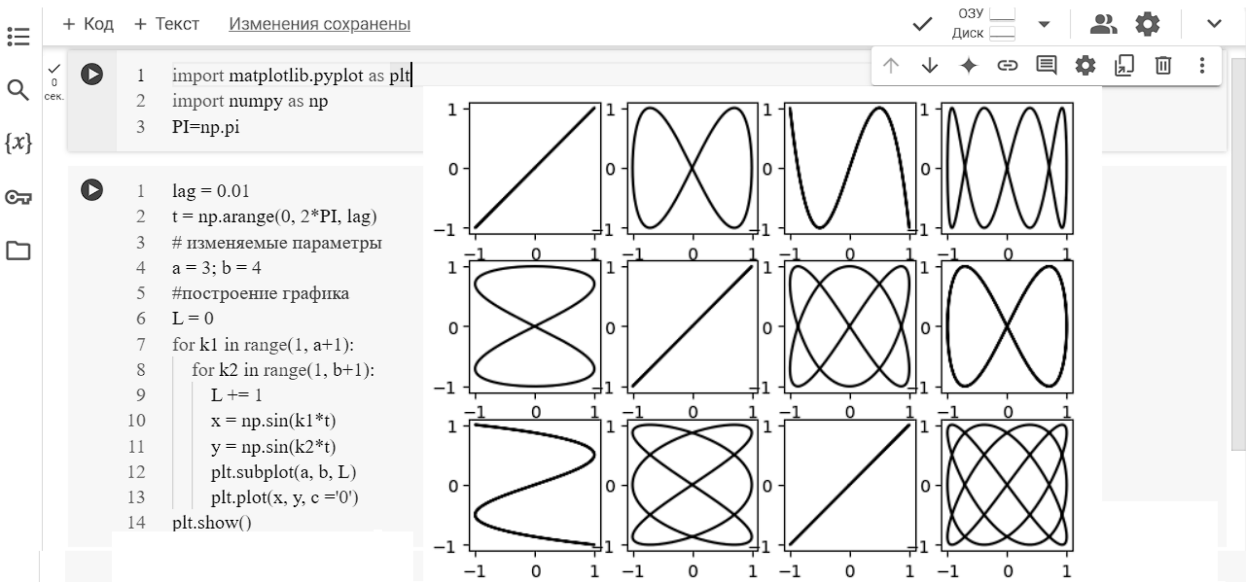


Рис. 1. Код программы и графики функции

Пример 2 – Построить в полярной системе кривую, заданную уравнением

$$\rho = a\cos(k\varphi) + b\sin^2(k\varphi) + c\sin^4(k\varphi) + d\,.$$

Изменяя параметры k, a, b, c и d, получим различные виды кривой, которые представлены на рис. 2.

В учебной программе дисциплины «Математика» у студентов технических специальностей вузов на изучение темы «Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах» отводится четыре часа. Использование современных технических средств обучения на занятиях помогает преподавателю дать студентам практические навыки построения графиков функций в различных системах координат.

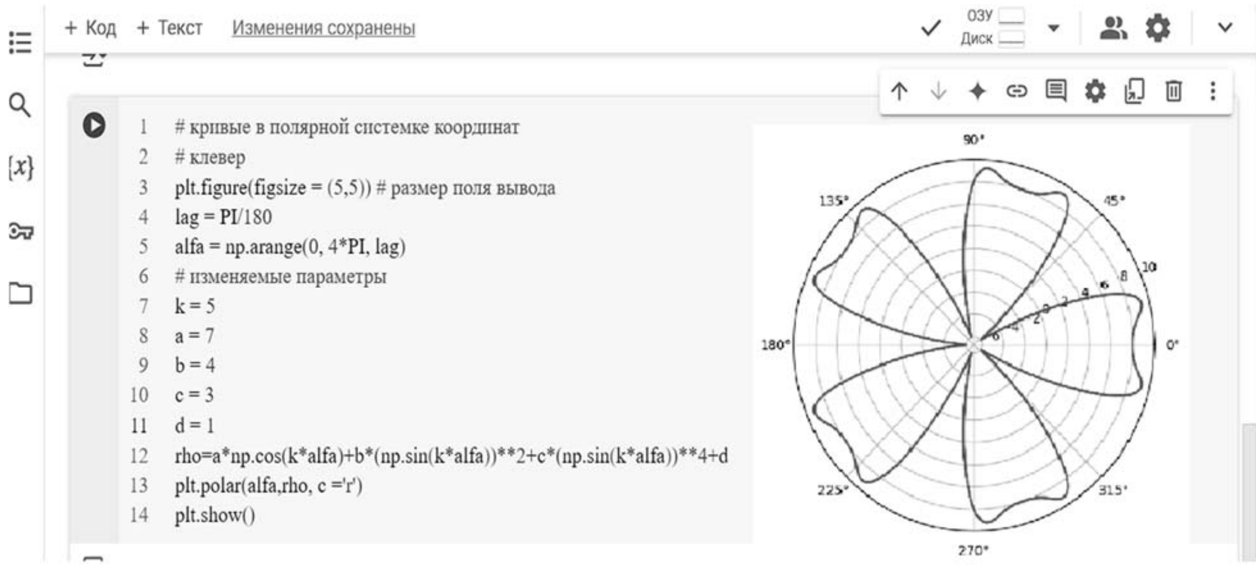


Рис. 2. Код программы и график функции

УДК 378

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. А. КУЗНЕЦОВА, О. В. БОНИЦКАЯ, О. В. ИНЧЕНКО
Тульский государственный университет
Тула, Россия

Изучение возможностей различных математических пакетов для решения задач, требующих аккуратных и трудоемких расчетов, необходимо каждому инженеру. Поэтому при освоении некоторых математических дисциплин целесообразно включать в образовательный процесс выполнение некоторых задач с применением таких программ. В [1] авторами приведены примеры заданий из курса математического анализа, предложенных студентам первого курса в рамках выполнения курсовой работы, предполагающих аналитическое решение и решение с помощью системы компьютерной алгебры Maxima.

В настоящей работе предложены примеры заданий на вычисление несобственных интегралов и исследование их сходимости. В целом тема «Несобственные интегралы» является очень сложной для студентов первого курса, ведь для решения практических задач необходимо иметь достаточно большой запас теоретических знаний (определений, теорем, признаков сходимости интегралов), а также уметь правильно ими распорядиться. В связи с тем, что на аудиторные занятия по этой теме не может быть выделено достаточное для успешного освоения материала количество часов, большое внимание уделяется домашней работе, именно, самостоятельной проработке методов исследования сходимости интегралов и их вычисления. В этом студентам призвана помочь курсовая работа.

После задач на вычисление определенных интегралов в курсовой работе студенты исследуют на сходимость несобственные интегралы. Сходящиеся интегралы вычисляют приближенно с заданной точностью, используя ранее разобранные методы численного интегрирования Ньютона – Котеса.

Рассмотрим пример выполнения одного из заданий.

Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}005$.

Несобственный интеграл имеет особенность в точке $x = 2$. Разобьем интеграл на два:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_1^{2-\delta} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_{2-\delta}^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Найдем δ такое, что $\int_{2-\delta}^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\int_{2-\delta}^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} < \int_{2-\delta}^2 \frac{\sqrt{2}dx}{2\sqrt{2-x}} = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x}\,\Big|_{2-\delta}^{2} = \sqrt{2\delta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последнего равенства при $\varepsilon = 0{,}005$ получаем $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8} = 0{,}000003125$. Тогда можно окончательно записать:

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int\limits_1^{1{,}999996875} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int\limits_{1{,}999996875}^2 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Первый интеграл в сумме не имеет разрывов и его можно вычислить приближенно. Вычислим этот интеграл с помощью метода средних прямоугольников с точностью $\frac{\varepsilon}{2} = 0{,}0025$. Тогда исходный несобственный интеграл будет вычислен приближенно с точностью $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}005$. Для обеспечения заданной точности в программе будем использовать цикл.

```
f(x):=sqrt(x)/sqrt(4−x^2);
numer: true;
epsilon: 0.005;
a:1; b: 2−(epsilon^2)/8;
Jc(n):=ev((b−a)/n·sum(f((a+(b−a)/n·i+a+(b−a)/n·(i+1))/2),i,0,n−1),numer);
n: 1;
while abs(Jc(n)−Jc(2·n)) >epsilon/2 do n:n+1;
n;
Jc(2·n);
```

done

$$f(x):=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}}$$

true

0.005

1

1.999996875

$$Jc(n):=ev\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{a+\frac{b-a}{n}i+a+\frac{b-a}{n}(i+1)}{2}\right)\right),numer\right)$$

1

done

2319

1.334075235689867

Отрезок был разделен на 2319 частей, а результат вычислений составил 1,334075235689867.

Осталось проверить результат вычислений несобственного интеграла с помощью встроенных функций программы wxMaxima. Для этого воспользуемся функцией quad_qags() из пакета quadpack.

```
f(x):= (sqrt(x))/(sqrt(4−x^2));
quad_qags(f(x), x, 1, 2);
```

$$f(x):=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$[1.3407102642103281, 2.815658817212352\ 10^{-11}, 315, 0]$$

Результат составил 1,34071026, точность вычислений – $2{,}8156588 \cdot 10^{-11}$, в результате вычислений отрезок был разбит на 315 частей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение математических пакетов для вычисления определенных интегралов / В. А. Кузнецова [и др.] // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2024. – С. 47–49.
2. О содержании курса высшей математики для IT-направлений подготовки / О. В. Боницкая [и др.] // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2024. – С. 1318–1320.
3. **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики: учеб. пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – 8-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 672 с.

УДК 004

ГЕНЕРАЦИЯ ДАННЫХ В R ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

В. А. ЛИВИНСКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Использование генерации данных в R для составления индивидуальных заданий имеет несколько важных преимуществ. Во-первых, это повышает мотивацию студентов к самостоятельному выполнению работы из-за невозможности списать у товарища готовое решение. Во-вторых, генерация данных позволяет автоматизировать процесс создания большого количества однотипных задач, что экономит личное время преподавателя. В-третьих, используя различные функции генерации, можно адаптировать задания под разные уровни подготовки студентов.

Рассмотрим пример генерации данных при разработке индивидуальных заданий при изучении темы «Проверка статистических гипотез» для дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Для генерации многомерных нормально распределенных данных в R в качестве инструмента можно использовать функцию mvrnorm() из пакета MASS, аргументами которой являются объем выборочной совокупности, вектор математических ожиданий, ковариационная матрица многомерного нормального распределения. Такая необходимость возникает при решении задач методом, например, однофакторного дисперсионного анализа, применяемого для анализа взаимосвязи количественного и категориального признаков, имеющего больше двух альтернатив.

Например, исследуется влияние технологии чистовой обработки детали на точность ее изготовления. Имеется три вида технологий, по каждой необходимо выполнить 20 замеров отклонения размера детали от номинала в микрометрах. Так как измерения проводятся одним и тем же прибором, дисперсии отклонений для каждой технологии предположительно не должны статистически различаться, поэтому в задании ковариационной матрицы это необходимо учитывать (она должна быть диагональной в случае независимости переменных). Генерация данных может быть разбита на следующие этапы.

Этап 1. Задание числовых значений объема выборки и вектора математических ожиданий:

```
cat("n= ", n) # вывод на печать введенного значения
n=  150 # Запрашиваем значения вектора матожиданий
inputs <- readline(prompt = "ВВедите значения математических ожиданий  через пробел: ")
ВВедите значения математических ожиданий  через пробел: 1 2 3
cat("MO= ", inputs)
MO=  1 2 3
```

Этап 2. Задание ковариационной матрицы трехмерного нормального распределения можно осуществить, воспользовавшись встроенным в R редактором данных, вызвав его функцией edit():

```
COV<-data.frame(v1=numeric(0),v2=numeric(0),v3=numeric(0))
COV<-edit(COV)
```

Внешне этот редактор напоминает обычный лист Excel, однако имеет весьма ограниченные функциональные возможности (рис. 1). Заполнение элементов ковариационной матрицы производится непосредственно в редакторе.

Рис. 1. Задание ковариационной матрицы трехмерного нормального распределения с независимыми переменными

Этап 3. Генерация выборки из трехмерного нормального распределения с заданными параметрами и сохранение результатов в Excel может быть выполнена с помощью следующего кода :

```
dat <-as.data.frame(mvrnorm(n, MO, COV))
 colnames(dat)<-c("технология_1", "технология_2", "технология_3")
 write.xlsx(dat, "ВАРИАНТ-1.xlsx")
```

Описательная статистика полученного набора данных может быть рассчитана с помощью stargazer(), одноименной библиотеки (рис. 2). Представлены среднее значение, стандартное отклонение, минимальное и максимальные значения для сгенерированных данных по каждой технологии.

Statistic	N	Mean	St. Dev.	Min	Max
технология_1	150	1.1	1.3	-2.6	4.5
технология_2	150	2.0	1.6	-3.1	5.6
технология_3	150	2.9	1.4	-1.0	6.3

Рис. 2. Описательная статистика сгенерированных данных

Для генерации различных вариантов данных использование нужное количество раз предложенного скрипта не займет у преподавателя много времени. Более того, можно предложить студентам в качестве начального этапа выполнения задания самим сгенерировать себе данные по заданным параметрам нормального распределения.

Для тестирования гипотезы об отсутствии различий в точности изготовления деталей в зависимости от технологий предлагается вначале визуализировать результаты генерации. На рис. 3 представлена двумерная визуализация трехмерной случайной величины с помощью функции ggpairs(dat), библиотеки GALLY. По диагонали располагается график ядерной функции для данных, соответствующих каждой технологии, ниже главной диагонали – попарные корреляционные поля, выше диагонали – значения попарных коэффициентов корреляции.

Таким образом, использование генерации данных в R для составления индивидуальных заданий значительно упрощает работу преподавателей и делает учебный процесс более эффективным и справедливым.

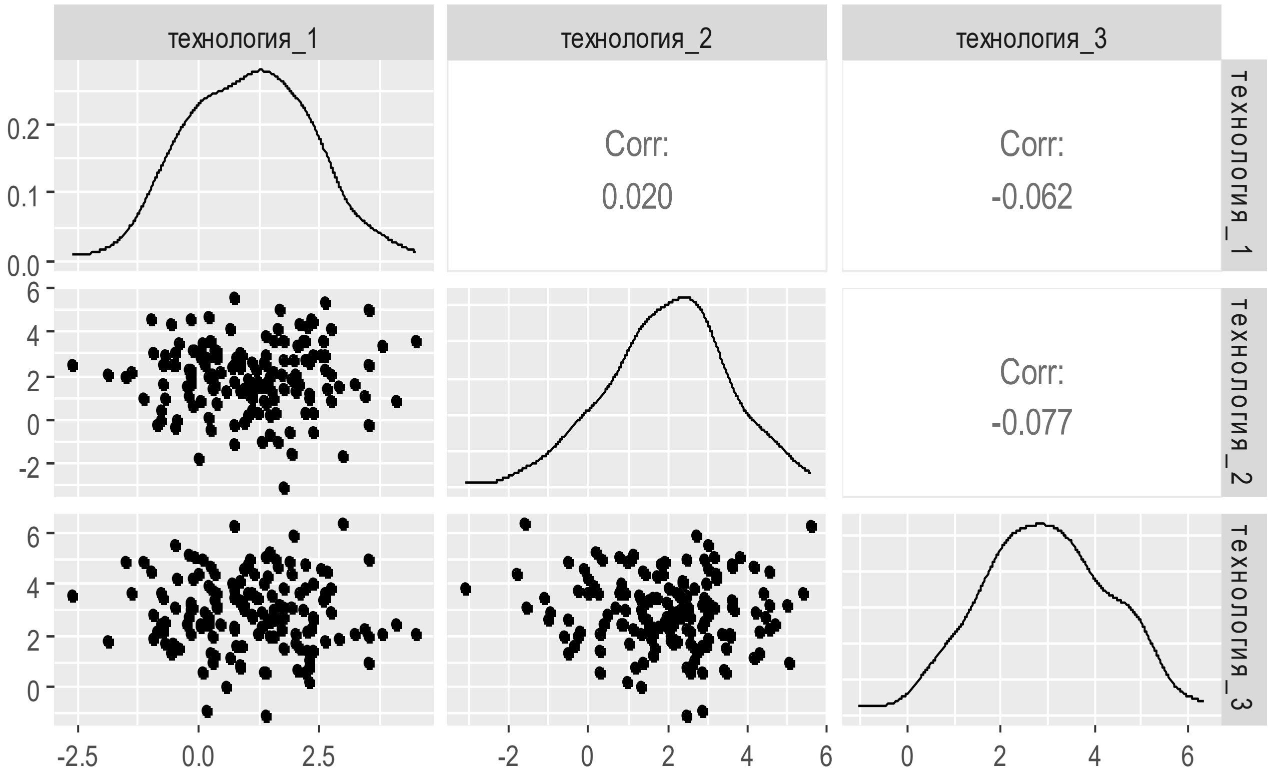


Рис. 3. Визуализация сгенерированных данных

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ливинская, В. А.** О важности визуализации при решении прикладных задач / В. А. Ливинская // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 66–69.

УДК 378.147

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «МЕТОДЫ АНАЛИЗА БОЛЬШИХ ДАННЫХ»

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Современная цифровая трансформация [1] и рост объемов данных формируют новый ландшафт требований к образовательным программам, особенно в области анализа больших данных. При этом преподавание дисциплины «Методы анализа больших данных» требует применения определенных технических и программных решений. Установка и настройка кластера Hadoop требует высоких финансовых затрат, равно как и применение программных продуктов с платной лицензией. Включение инструментов, таких как Loginom, в образовательный процесс позволяет не только обеспечить студентов практическими навыками работы с современными платформами, но и углубить их понимание методов анализа данных, что делает их более востребованными на рынке труда.

Современные организации активно внедряют технологии анализа данных для принятия стратегических решений. Согласно [2], объем данных растет экспоненциально, создавая спрос на квалифицированных специалистов в области big data.

Включение в образовательный процесс инструментов анализа больших данных, таких как Loginom, позволяет подготовить специалистов, способных эффективно работать с большими объемами информации.

Как отмечено в ряде исследований [3], существует дефицит образовательных программ, которые сочетают теоретические знания и практические навыки работы с инструментами анализа данных. Loginom, как универсальная платформа, адаптирована для использования в образовательных целях, предлагая доступный и мощный функционал, позволяет решить следующие педагогические задачи, такие как формирование у студентов компетенций в области обработки, анализа и визуализации больших данных; ознакомление с современными инструментами анализа данных; развитие навыков построения аналитических моделей и применения методов машинного обучения; формирование у студентов проектных навыков на примере практических задач.

Дисциплина включает изучение теоретических основ анализа больших данных, таких как кластеризация, регрессионный анализ и методы машинного обучения. На каждом этапе студенты применяют полученные знания в Loginom, что позволяет закрепить материал на практике.

В рамках курса студенты выполняют индивидуальное задание в форме курсовой работы, используя Loginom. Каждое задание содержит реальный кейс и требует выполнения определенных этапов анализа данных, а также навыков обработки и получения обоснованных выводов.

Использование кейсов из реального бизнеса, симуляций и интерактивных заданий позволяет сделать процесс обучения более увлекательным и эффективным, что подтверждается исследованиями.

Loginom предлагает бесплатную студенческую лицензию, легко устанавливается для использования с помощью технологий «тонкий клиент» и «удаленный рабочий стол», а также обладает рядом преимуществ.

Loginom предоставляет интуитивно понятный интерфейс, что делает его удобным для использования студентами без предварительного опыта работы с подобными системами.

Платформа поддерживает различные этапы анализа больших данных, включая предобработку, трансформацию, визуализацию и построение моделей. Это позволяет использовать ее как единый инструмент в рамках курса.

Возможность интеграции с различными источниками данных и работы с большими наборами данных делает Loginom идеальным инструментом для проектной работы студентов.

Использование Loginom позволяет студентам получить реальный опыт работы с большими данными, что повышает уровень их профессиональной подготовки.

Внедрение Loginom способствует модернизации образовательного процесса и повышению его эффективности.

Преподавание дисциплины «Методы анализа больших данных» с применением платформы Loginom представляет собой важный шаг в развитии образовательных программ, соответствующих требованиям современного цифрового общества. Такой подход не только помогает студентам освоить актуальные навыки, но и вносит значительный вклад в подготовку квалифицированных специалистов в области анализа данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкий, И. И.** Проблемы цифровизации в образовании / И. И. Маковецкий // Цифровая экономика, информационное общество и информационная безопасность: основные социально-экономический аспекты: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – СПб., 2021. – С. 152–156.

2. **Schultze, J.** Teaching 'big data' analysis to young immunologists. Nat Immunol 16 / J. Schultze. – 2015. – P. 902–905. – URL: https://doi.org/10.1038/ni.3250 (date of access: 30.12.2024).

3. **Song, I.-Y.** Big data and data science: what should we teach? Expert Systems 33 / I.-Y. Song, Y. Zhu. – 2016. – P. 364–373. – URL: https://doi:10.1111/exsy.12130 (date of access: 30.12.2024).

УДК 378.147

О ПРОВЕДЕНИИ ОЛИМПИАДЫ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ В БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Современные университеты сталкиваются с необходимостью укреплять свой имидж и конкурентоспособность в условиях глобализации и цифровизации [1] образовательного процесса. Одним из эффективных способов достижения этой цели является организация международных олимпиад по программмированию, особенно с использованием популярных языков программирования, таких как Python. Данная инициатива не только привлекает внимание к университету, но и способствует развитию профессиональных навыков участников и повышению качества образования.

Организация международной олимпиады по программированию создает положительный имидж университета, представляя его как центр инноваций и передового опыта в области информационных технологий.

Создание платформы для практического применения знаний, полученных студентами и школьниками, позволяет университету улучшать образовательные программы и адаптировать их к требованиям рынка труда.

Языком написания заданий олимпиады был выбран Python, т. к. этот язык программирования является одним из самых популярных языков на сегодняшний день, что подтверждается его использованием в различных областях, от веб-разработки до анализа данных и искусственного интеллекта [2].

Простота синтаксиса и высокая читаемость Python делают его идеальным языком для начинающих программистов. Это позволяет привлечь более широкий круг участников к олимпиаде и повысить уровень конкуренции [3].

Кроме того, традиционным языком олимпиад по программированию, проводимых в Республике Беларусь, является C++, однако с 2024–2025 учебного года при преподавании информатики в школах обязательным языком программирования становится Python.

Олимпиада Белорусско-Российского университета для школьников BRU Python Blitz проводится в формате индивидуального соревнования. Участникам предложены задачи различной сложности, что позволит выявить как начинающих, так и более опытных программистов. Задачи охватывают различные области, включая алгоритмы, структуры данных и практические сценарии разработки. Особенностью олимпиады является необходимость выполнения заданий на скорость – участникам были предложены 20 заданий для выполнения за три часа.

Олимпиада проводится в режиме online. Доступ участников к заданиям олимпиады осуществляется через платформу дистанционного обучения университета moodle.bru.by. Для оценки выполненных задач используется развернутая на сервере университета среда для выполнения программного кода Coderunner [4].

В олимпиаде приняли участие 93 человека, 27 из которых – представители учреждений образования Российской Федерации, 66 – Республики Беларусь.

Российскую Федерацию на олимпиаде представили учащиеся учреждений образования Курска, Ельца, Смоленска, Уфы.

Республику Беларусь на олимпиаде представили учащиеся из Могилева, Гомеля, Гродно, Горок, Витебска, Белынич, Толочина, аг. Новка.

Организация международной олимпиады по программированию на языке

Python является стратегически важным шагом для повышения имиджа университета. Это мероприятие не только способствует развитию программистов, но и создает платформу для международного сотрудничества, обмена знаниями и улучшения качества образования. Важно, чтобы университеты понимали значимость таких мероприятий и активно включались в их организацию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкий, И. И.** Проблемы цифровизации в образовании / И. И. Маковецкий // Цифровая экономика, информационное общество и информационная безопасность: основные социально-экономический аспекты: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – СПб., 2021. – С. 152–156.

2. **Rossum, Guido van.** Python Programming Language / Guido van Rossum // USENIX Annual Technical Conference, 2007.

3. **Lutz, M.** Programming Python: Powerful Object-Oriented Programming / M. Lutz // O'Reilly Media, Inc., 2010.

4. **Маковецкий, И. И.** Автоматизация анализа программного кода в среде Moodle / И. И. Маковецкий // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 70–71.

УДК 378.016:517.3

КРУПНОБЛОЧНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕМЫ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

И. В. МАРЧЕНКО
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Крупноблочное изложение лекционного материала стало в современной практике преподавателя математических дисциплин вполне привычным. Это связано с особенностями новых учебных планов, которые ориентированы на неоправданно малое количество аудиторных часов по специальным дисциплинам. Так, для специальности 6-05-0113-04 «Физико-математическое образование» на весь курс математического анализа отводится 150 аудиторных часов, из которых лекций – 56 часов, практических занятий – 94 часа. При этом общее количество часов на изучение дисциплины составляет 324 учебных часа. В таких условиях любые виды занятий проводятся как введение и знакомство с определенными понятиями и фактами, а более глубокое их изучение происходит в виде самостоятельной работы студентов, а с одаренными студентами – в виде индивидуальных занятий, выходящих за рамки запланированных по нагрузке преподавателя часов. Для некоторых тем математического анализа оказывается возможным применение технологии крупноблочного изложения [1].

Приведем еще один пример использования крупноблочного изложения учебного материала для темы «Геометрические приложения определенного интеграла». По учебной программе на нее отводится 2 часа лекций. Материал темы включает:

– понятие площади плоской фигуры, критерии квадрируемости, квадрируемость криволинейной трапеции, квадрируемость криволинейного сектора, вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах, полярных координатах и при параметрическом задании;

– понятие длины кривой, вычисление длины кривой в декартовых координатах, полярных координатах и при параметрическом задании;

– понятие объема тела, критерии кубируемости, нахождение объемов тел в декартовых координатах, объем тел вращения.

Материал очень объемный, поэтому большая часть теорем приводится без доказательств. Исключение составляют теоремы о спрямляемости кривых в полярных координатах и при параметрическом задании, при доказательстве которых используется теорема о замене переменной в определенном интеграле. Понятие объема тела вводится посредством аналогии с понятием площади, что также позволяет сэкономить время. Весь материал иллюстрируется примерами решения задач. Это оказывается возможным благодаря использованию крупноблочного изложения некоторых фрагментов темы и применению табл. 1 и 2.

Табл. 1. Вычисление площадей плоских фигур

Способ задания фигуры	Условие квадрируемости	Формула для вычисления длины
1. Декартовы координаты. Криволинейная трапеция (КТ) ограничена графиком функции $y = f(x)$ на $[a; b]$	1. $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$. 2. $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$	$S = \int_a^b f(x)dx$
2. Полярные координаты. Криволинейный сектор ограничен кривой $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$	1. $g(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta g^2(\varphi)d\varphi$
3. Параметрическое задание. КТ ограничена графиком функции $y = f(x)$ на $[a; b]$, заданной системой $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, $\alpha < \beta$	1. $\varphi(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$. 2. $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируема на $[\alpha; \beta]$. 3. $\varphi^/(t) \neq 0$ на $[\alpha; \beta]$	$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\left|\varphi^/(t)\right|dt$

Табл. 2. Вычисление длин кривых

Способ задания кривой AB	Условие спрямляемости	Формула для вычисления длины
1. Декартовы координаты. AB – график функции $y = f(x)$ на $[a; b]$	$f(x)$ непрерывно-дифференцируема на $[a; b]$	$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f^/(x)\right)^2} dx$
2. Параметрическое задание AB системой функций $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ (1) $t \in [\alpha; \beta]$	1. Система (1) задает параметрически функцию $y = f(x)$ на $[a; b]$. 2. Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[\alpha; \beta]$. 3. $\varphi^/(t) \neq 0$ на $[\alpha; \beta]$	$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi^/(t)\right)^2 + \left(\psi^/(t)\right)^2} dt$
3. Полярные координаты. AB задана уравнением $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$	$g(\varphi)$ непрерывно-дифференцируема на $[\alpha; \beta]$	$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(g(\varphi)\right)^2 + \left(g^/(\varphi)\right)^2} d\varphi$

Таким образом, использование крупноблочного изложения материала для темы «Геометрические приложения определенного интеграла» позволяет сформировать у студентов представления о понятиях площади фигуры, длины кривой и объеме тела, а также познакомить их с основными методами и приемами вычисления площадей, длин и объемов. При этом материал излагается системно. Кроме того, студенты знакомятся с такими методами научного познания, как аналогия, синтез, анализ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марченко, И. В.** Крупноблочное изложение темы «Несобственные интегралы» / И. В. Марченко // Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. ст. XII Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 26 мая 2023 г. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2024. – С. 131–134.

УДК 377.1: 372.851: 004.02

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В КОНЦЕПЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО ОБУЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Э. Ф. МУРЗИНА, Е. Н. ДИК, С. А. АРСЛАНБЕКОВА
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

В современном мире развитие цифровых технологий требует от специалистов не только технических навыков и квалификации, но и математической компетенции, т. е. знания математических методов и приемов при решении профессиональных задач. Особенно важно, чтобы обучающиеся могли анализировать и интерпретировать результаты своих инженерных расчетов, используя различные пакеты прикладных математических программ [2, с. 86]. В целях повышения математической компетентности обучающихся технических направлений подготовки, наряду с традиционной формой обучения в университете практикуется перевернутое обучение. Это связано с тем, что аудиторных часов для изучения дисциплины в учебном плане отведено недостаточно, а для будущего инженера математика должна представлять собой универсальное оружие при решении специальных профессиональных задач.

Считаем, что качественному освоению материала будет способствовать инновационная методика – практика перевернутого обучения, понимаемая всеми как самостоятельное изучение темы обучающимися и решение задач на практическом или лабораторном занятии с помощью информационных технологий. Предлагаем при выполнении лабораторных работ включить такие задачи междисциплинарного характера с реализацией в специальной программе Mathcad. Данная методика позволяет обучающимся определять трансдисциплинарные связи [3, с. 59], что дает возможность в профессиональной (или близко к профессиональной) нематематической задаче установить математическую модель; разобрать разные методы решения и выбрать наилучший; проанализировать, осмыслить и выявить объективность полученного результата.

Рассмотрим одну из задач междисциплинарного характера, предлагаемых на лабораторном занятии в рамках перевернутого обучения. Данная задача из раздела физической химии, которую изучали студенты на первом курсе, поэтому химическую «составляющую» они понимают. Им требуется определить минимальную концентрацию реагента некоторой химреакции, когда измерение уровня содержания реагента проводилось в некотором временном диапазоне через определенный промежуток времени [4, с. 135]. В данном конкретном случае студенты должны построить математическую модель задачи, которая сводится к нахождению минимального значения некоторой функции, представляющей изменение концентрации реагента. Для нахождения экстремума функции (в данном случае минимума) нужно найти и определить саму функцию. Такую функциональную зависимость можно установить, составив интерполяционный полином любым методом, который известен. Обучающиеся самостоятельно в домашних условиях изучают основы теории приближения функции, в частности тему «Построение интерполяционных полиномов», а на лабораторном занятии решают совместно с преподавателем данную задачу. Учитывая разный уровень как математической подготовки, так и умений и навыков работы в программе Mathcad, работы могут быть разного качества: использование программы в качестве калькулятора или применение при решении различных встроенных функций и элементов программирования. Последний вариант продемонстрирован на рис. 1.

$n := 7 \qquad i := 0..n-1$

$$T := \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \\ 45 \\ 55 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 700 \\ 370 \\ 160 \\ 130 \\ 220 \\ 220 \\ 220 \end{pmatrix}$$

```
lagrang(T,C,t) := | s ← 0
                  | for i ∈ 0..rows(T) − 1
                  |   | p ← 1
                  |   | for k ∈ 0..rows(T) − 1
                  |   |   p ← p·(t − T_k)/(T_i − T_k)  if i ≠ k
                  |   | s ← s + C_i·p
                  | s
```

$L(t) := lagrang(T,C,t)$

$$L(t)\ \text{simplify} \rightarrow \frac{t^6}{1500000} - \frac{13\cdot t^5}{80000} + \frac{737\cdot t^4}{48000} - \frac{1151\cdot t^3}{1600} + \frac{87953\cdot t^2}{4800} - \frac{35317\cdot t}{128} + \frac{317735}{128}$$

$t1 := 25$

$L(t1) = 370$

$Tmin := Minimize(L, t1) \qquad Tmin = 41.4$

$Cmin := L(Tmin) \qquad Cmin = 118.799$

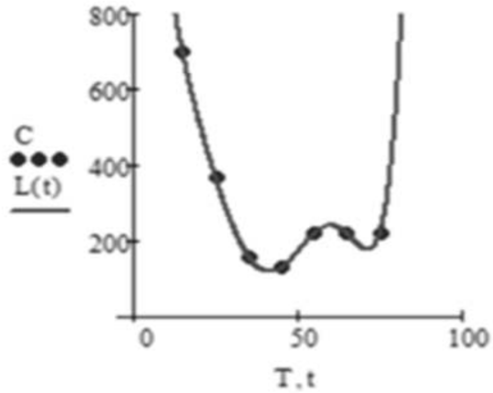


Рис. 1. Листинг программы расчета минимальной концентрации реагента

Таким образом, применение в учебной деятельности практики перевернутого обучения позволяет студентам самостоятельно провести систематизацию, отбор и структурирование необходимого учебного материала, используя видеолекции преподавателя, учебники и материалы из интернета. У обучающихся, помимо знаний и грамоты в области применения цифровых технологий, развиваются важные личностные качества, такие как самостоятельность, организованность, творческий подход и др. [1, с. 39]. Но есть и минусы данной методики: для преподавателя – это, во-первых, запись видеолекции и размещение в электронной образовательной среде университета; во-вторых, тщательный и жесткий контроль самостоятельного изучения теоретического материала студентами, организация коллективного обсуждения изученного материала, часто – проведения дополнительных тестов для проверки знаний; для некоторых обучающихся – отсутствие желания и неготовность к самообразованию, низкая внутренняя мотивация, нацеленная на обучение в целом. Несмотря на минусы, данная модель работает, студенты перестают быть пассивными во время занятий и сами несут ответственность за самостоятельную работу. Но это ни в коем случае не отменяет работу педагога – происходит увеличение времени эффективного индивидуализированного взаимодействия с обучающимися.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Азарская, Е. М.** Методика «перевернутого обучения» в условиях современной цифровой среды образования / Е. М. Азарская // Образование: прошлое, настоящее и будущее: материалы VIII Междунар. науч. конф. – 2020. – С. 37–39. – URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/379/16061/ (дата обращения: 25.12.2024).

2. **Галлямов, Ф. Н.** Качественная организация самостоятельной работы студентов – резерв в формировании компетенций / Ф. Н. Галлямов, Р. Р. Камалетдинов // Реализация образовательных программ высшего образования в рамках ФГОС ВО: материалы Всерос. науч.-метод. конф. в рамках выездного совещания НМС по природообустройству и водопользованию Федер. УМО в системе ВО. – 2016. – С. 85–87.

3. **Загиров, И. И.** Повышение интенсивности и эффективности усвоения общетехнических дисциплин студентов инженерных специальностей / И. И. Загиров // Инновационные методы преподавания в высшей школе: материалы Междунар. науч.-метод. конф. – 2011. – С. 59–60.

4. **Сагадеева, Э. Ф.** Выполнение актуарных расчетов с использованием коммутационных чисел с применением ЭВМ / Э. Ф. Сагадеева, Р. Р. Бакирова // Потребительская кооперация и отрасли экономики Башкортостана: инновационные аспекты развития: сб. науч. тр. – Уфа: Башкир. кооперативный ин-т (филиал Рос. ун-та кооперации), 2008. – С. 132–149.

УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Кружок по математике в техническом университете – это один из способов поддержать у студентов интерес к данному предмету. Так как в курсах «Математика» и «Высшая математика» рассматриваются основные способы и приемы решения дифференциальных уравнений и их систем, но не предусмотрено решение задач на составление дифференциальных уравнений, то задачи такого типа вполне можно рассмотреть на кружке.

Предлагаю несколько задач на составление дифференциальных уравнений.

1. Составить уравнения кривых, для которых площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и прямой, проходящей через точку касания параллельно оси ординат, равна 5. Ответ: $y(x+c) = \pm 10,\ c \in \mathbb{R}$.

2. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100 ºС до 60 ºС. Температура окружающего воздуха 25 ºС. Через какое время от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до 30 ºС [1]? Ответ: $\frac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ мин.

3. Скорость распада радия прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия равен 1590 лет [1]. Ответ: 8,5 %.

4. В сосуде объемом 20 л находится воздух, содержащий 80 % азота и 20 % кислорода. В этот сосуд подается $0{,}1$ л азота в секунду, который непрерывно перемешивается в сосуде, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько минут в сосуде будет 99 % азота? Ответ: $200 \ln 20\ \text{с} \approx 10$ мин.

5. Все живые организмы постоянно участвуют в углеродном обмене, получая углерод из окружающей среды. После гибели организма обмен углеродом с окружающей средой прекращается и радиоактивный изотоп ^{14}C в останках постепенно распадается. Скорость распада изотопа ^{14}C, описывающая изменение концентрации изотопа в единицу времени, в соответствии с законом действующих масс в каждый момент времени прямо пропорциональна его текущей концентрации. Время, за которое распадается половина ^{14}C, составляет $(5{,}7 \pm 0{,}03)$ тыс. лет. При археологических раскопках было найдено дерево, содержание ^{14}C в котором составляет 75 % от нормального. Определить наименьший возможный возраст (в годах) найденного дерева (задачи XIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике). Ответ: $5670(2 - \log_2 3)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пономарев, К. К.** Составление дифференциальных уравнений : учеб. пособие / К. К. Пономарев; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1973. – 560 с.

УДК 37.091.3:51

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ» СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

А. А. РОМАНЕНКО
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В 2021 г. в Белорусско-Российском университете открыта новая специальность «Прикладная математика», профиль «Разработка программного обеспечения», что предполагает на основе знания математики разработку, построение абстрактной математической модели процесса, события или явления (схему и формулу расчета) и реализацию данной модели в виде программы (алгоритма) действий (с использованием конкретного программного кода) под данный конкретный процесс (производственный, технологический и т. д.) независимо от его природы. В этом – универсализм математики. К сожалению, часть абитуриентов данное название специальности понимают не совсем корректно, обращая внимание, в основном, на профильную часть названия (мода времени), и в дальнейшем, как показала практика, сталкиваются с серьезными проблемами при подготовке по основной, первой части.

В 2023 учебном году учебный план подготовки студентов данной специальности был изменен. В частности, по дисциплине «Математический анализ» изменены последовательность изучения тем и количество часов по ним. Основными целями данной дисциплины являются: формирование высокого уровня математической культуры; развитие логического и алгоритмического мышления; развитие творческих способностей, навыков исследовательской работы и самостоятельного расширения математических знаний.

Опыт работы по учебному плану 2021 г. [1, 2] способствовал более логичному построению последовательности читаемых разделов математики. В частности, разделы дисциплины «Математический анализ», такие как «Числовые и функциональные ряды» (в частности, степенные ряды), «Тригонометрические ряды Фурье» и «Интеграл Фурье» объединены и перенесены в третий семестр и излагались последовательно, параллельно изучению дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Эта параллель способствовала эффективности изучения приложений степенных рядов к приближенному решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, с переменными коэффициентами, для которых не существует общих методов аналитического решения. Кроме того, предварительное изучение приложений степенных рядов к приближенному решению дифференциальных уравнений способствовало более качественному пониманию материала тем курсовых работ по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые запланированы в этом же семестре. Опережающее изучение теории тригонометрических рядов Фурье способствовало более глубокому пониманию теорем и условий существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Это «чувствовалось» по вопросам, которые задавали студенты при выборе тем курсовых работ. В плане приложений степенных рядов студенты без особых затруднений справлялись с задачами суммирования числовых рядов, которые затем были использованы для демонстрации справедливости теоремы Дирихле.

После изучения темы «Интеграл Фурье» и его свойств, учитывая прикладной характер математики данной специальности, целесообразно продолжать изучение приложений интеграла Фурье к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако использование интеграла Фурье для этих целей связано со знанием методов теории функций комплексной переменной, которая будет изучаться в следующем семестре. При наличии времени в следующем семестре этому вопросу следует уделить внимание, поскольку, судя по научным публикациям, такие приложения востребованы. В плане приложений интеграла Фурье были рассмотрены задачи сходимости несобственных интегралов, первообразные от которых не существуют, что вызвало интерес у студентов. Отмечу факт, который вызвал особый интерес у студентов, – это соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta \omega = \mathrm{const}$, связывающее полуширину колоколообразных функций $f(x)$ с полушириной их Фурье-образа $F(\omega)$, которое затем было обобщено на другие классы функций и всплыло в Фурье-представлении дельта-функции и Фурье-представлениях специальных функций.

Считаю, что переформатирование структуры и последовательности изложения учебного материала способствовало повышению качества изучения математического анализа. В целом, в группе присутствовала атмосфера интереса к предмету, и цели, изложенные выше, считаю достигнутыми. Надеюсь, что успешное освоение студентам данных разделов математики позволит им в дальнейшем овладеть основами других математических дисциплин и сопутствующих им прикладных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романенко, А. А.** О подготовке студентов по математическому анализу специальности «Прикладная математика» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 79–81.

2. **Романенко, А. А.** Об изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 92–95.

УДК 511:003.26 (075.8)

СИСТЕМА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА»

Н. В. САКОВИЧ, Л. А. РОМАНОВИЧ
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Одна из важных задач учебного процесса в вузе состоит в том, чтобы привить студентам навыки самостоятельной работы. Для этого целесообразно применять различные формы самостоятельной работы и методы ее контроля. Один из путей активизации познавательной деятельности студентов, выработки у них способности самостоятельно решать задачи состоит в выполнении индивидуальных заданий с обязательным последующим контролем их выполнения.

На кафедре математики МГУ имени А. А. Кулешова проводится работа по созданию комплекса учебно-методических материалов для организации учебной деятельности студентов по дисциплине «Алгебраические структуры и векторные пространства». Необходимость в этом возникла в связи с тем, что разделы «Алгебраические структуры» и «Векторные пространства» курса алгебры выделены в отдельную учебную дисциплину. На кафедре подготовлено учебно-методическое пособие для изучения теоретических основ данной дисциплины. Теоретический материал является довольно абстрактным и, как показывает опыт, сложен для восприятия большинством современных студентов. Поэтому для успешного усвоения теоретических знаний и отработки практических навыков разработана система индивидуальных заданий. При составлении заданий учитывали отмеченные выше особенности и разрабатывали задания по следующим направлениям:

– задания качественного характера, предназначенные для проверки теоретических знаний;

– задания практического характера, предназначенные для отработки практических умений и навыков.

Отметим, что внутри направлений часть заданий являются однотипными, но также предложены дополнительные задания более высокого уровня сложности. Таким образом, в целом, задания имеют различные уровни сложности и соответствуют как студентам средних способностей, так и отлично успевающим студентам. Задания частично составлены авторами, частично заимствованы из [1–3].

В настоящее время доц. Н. В. Сакович проводится апробация разработанных индивидуальных заданий у студентов второго курса факультета математики и естествознания, обучающихся по специальности «Физико-математическое образование».

Приведём несколько примеров заданий, которые предлагались студентам для выполнения.

Пример 1 – Доказать, что множество $\{a + b\sqrt{2}\ |a, b \in Z\}$ является кольцом. Указать его подкольца, идеалы и соответствующие гомоморфизмы, фактор-кольца.

Такое задание, во-первых, направлено на проверку теоретических знаний, во-вторых, побуждает студентов к действиям по анализу ситуации, выдвижению гипотез и их проверке.

Пример 2 – Применив процесс ортогонализации, найти ортогональный базис линейного пространства $A = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и ортонормированный базис его ортогонального дополнения, если $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ – линейная оболочка системы векторов $\vec{a}_1 = (1,1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (1,0,1,-1)$, $\vec{a}_3 = (0,1,0,0)$.

Такое задание направлено на проверку практического умения, в данном случае проведения процесса ортогонализации базиса, необходимого для успешного освоения изучаемой дисциплины.

В настоящее время разработаны индивидуальные задания и методические указания к ним по всем разделам курса, состоящие из следующих модулей: «Алгебраические структуры», «Векторные пространства», «Линейные операторы». По результатам выполнения и защиты заданий студенту выставляется оценка, которая затем учитывается при проведении его аттестации на экзамене.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Радьков, А. М.** Алгебра и теория чисел : атлас для самостоятельной работы : учеб. пособие / А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. – Минск : Выш. шк., 1992. – 286 с.

2. **Сакович, Н. В.** Сборник индивидуальных заданий по алгебре. Векторные пространства. Евклидовы пространства. Линейные операторы / Н. В. Сакович. – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2011. – 30 с.

3. **Шнеперман, Л. Б.** Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Выш. шк., 1982. – 223 с.

УДК 37.016:530.145

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БЛОК-СХЕМ И ТАБЛИЦ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. И. СЕРЫЙ

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Брест, Беларусь

В курсе теоретической физики (включая раздел «Квантовая механика») можно найти немало задач, которые не удается решить с помощью небольшого числа действий: напротив, количество формул с текстовыми комментариями довольно велико. Не отвергая такую форму подачи материала, следует признать, что не все учащиеся хорошо ее воспринимают, т. к. считают ее слишком сложной. Но в квантовой механике вряд ли возможно свести все задачи к «предельно простым». Поэтому альтернативной формой изложения могут быть блок-схемы (иногда с поясняющими сравнительными таблицами). Такому подходу при решении задач в вузовском курсе физики на сегодняшний день не уделяется существенного внимания, хотя некоторая часть студентов и преподавателей с одобрением относится к подобным дидактическим новациям.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу (варианты формулировки условия можно найти, например, в [1, с. 85; 2, с. 71]).

Атом водорода помещен в однородное электрическое поле напряженностью ε, *направленной вдоль оси* z. *Найти расщепление уровня энергии*, *отвечающего значению главного квантового числа* $n=2$ (*эффект Штарка*).

Задача обычно решается методом стационарной теории возмущений при наличии вырождения. Ход решения в обычном повествовательном изложении можно найти в [1, с. 230–232; 2, с. 72]. В качестве альтернативного подхода разберем решение в виде блок-схемы (рис. 1).

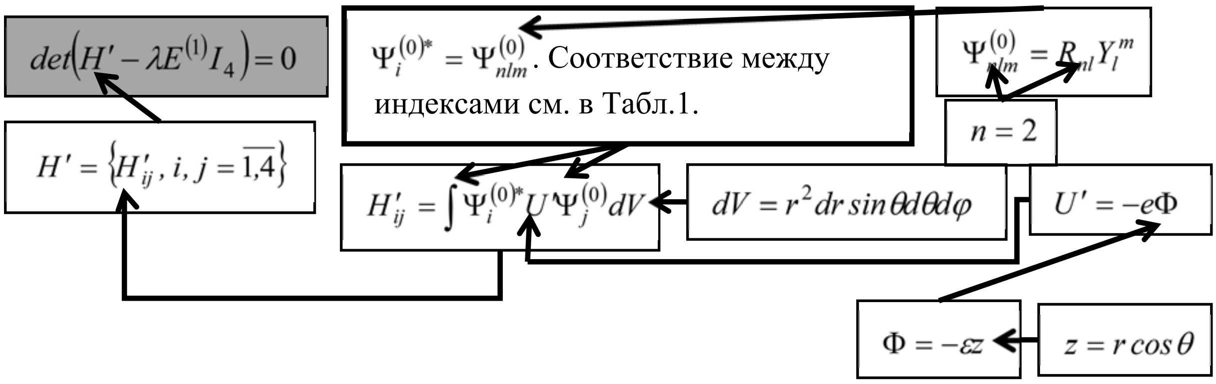


Рис. 1. Блок-схема решения задачи

Будем использовать систему СГС и обозначения: I_4 – единичная матрица размерности 4 × 4; H' – возмущенная часть гамильтониана в матричной форме; H'_{ij} – матричные элементы возмущенной части гамильтониана; $\lambda E^{(1)}$ – поправка первого порядка теории возмущений к энергии невозмущенного состояния (т. е. состояния без внешнего электрического поля); U' – энергия возмущения; Φ – потенциал электростатического поля; e – элементарный заряд (учитываем, что заряд электрона отрицателен); ħ – постоянная Планка; m_e – масса электрона; $\Psi_{nlm}^{(0)} = R_{nl} Y_l^m$ – волновые функции невозмущенного состояния; $\Psi_i^{(0)}$ – те же волновые функции в другой нумерации; R_{nl} – радиальные части волновых функций;

Y_l^m – угловые части волновых функций; r – расстояние от электрона до протона; $a = \hbar^2/(m_e e^2)$; $\xi = r/(2a)$; dV – элемент объема; θ – полярный угол; φ – азимутальный угол; l – орбитальное квантовое число; m – магнитное квантовое число. Некоторые пояснения даны также в табл. 1.

Табл. 1. Сравнительная характеристика квантовых состояний

l	m	Зависимость от θ	Зависимость от φ	$\Psi_{nlm}^{(0)}$	R_{nl}	Y_l^m	$\Psi_i^{(0)}$
0	0	Нет	Нет	$\Psi_{200}^{(0)}$	$\frac{1}{\sqrt{2a^3}}(1-\xi)e^{-\xi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\Psi_1^{(0)}$
1	0	Да	Нет	$\Psi_{210}^{(0)}$	$\frac{1}{\sqrt{6a^3}}\xi e^{-\xi}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$\Psi_2^{(0)}$
	+1	Да	Да	$\Psi_{211}^{(0)}$		$\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$	$\Psi_3^{(0)}$
	–1	Да	Да	$\Psi_{21-1}^{(0)}$		$\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$	$\Psi_4^{(0)}$

Тонкие стрелки на схеме соответствуют подстановкам. Исходный блок (с которого можно начинать рассуждения) закрашен серым цветом.

После всех подстановок, показанных на рис. 1, дальнейшие преобразования, достаточно подробно изложенные в [1, с. 230–232; 2, с. 72], приводят к результатам $\lambda E^{(1)} = 0$; $\pm 3ae\varepsilon$, применимым при $2\cdot10^3$ В/см << ε << 10^8 В/см.

Публикация дополняет статьи [3, с. 61; 4, с. 10–13; 5, с. 68–71; 6, с. 10–13; 7, с. 291–294], посвященные использованию блок-схем и сравнительных таблиц при решении задач и выводе формул в вузовском курсе физики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко [и др.]. – М.: Высш. шк., 1984. – 319 с.

2. **Галицкий, В. М.** Задачи по квантовой механике: учеб. пособие : в 2 ч. / В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – Ч. 2. – 304 с.

3. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем при решении задач электростатики / А. И. Серый // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам: материалы XIV Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 29 марта 2022 г. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2022. – С. 61.

4. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем и таблиц при решении задач по теме «Электромагнитная индукция» / А. И. Серый // Наука, инновации, образование: актуальные вопросы XXI века: сб. ст. VIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 10–13.

5. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем при решении задач по электродинамике в курсе теоретической физики / А. И. Серый // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2024. – С. 68–71.

6. **Серый, А. И.** Об изучении темы «Формула Резерфорда» в курсе атомной физики / А. И. Серый // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации: сб. ст. XXXIV Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 10–13.

7. **Серый, А. И.** К методике изучения темы «Эффект Комптона» в курсе квантовой физики / А. И. Серый // Фундаментальная наука и образовательная практика : материалы III Респ. науч.-метод. конф. с междунар. участием «Актуальные проблемы современного естествознания», Минск, 30 нояб. 2023 г. – Минск : РИВШ, 2023. – С. 291–294.

УДК 378. 016:51

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ОРИЕНТИРОВАННАЯ НА НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В современном информационном мире человек постоянно сталкивается с необходимостью принятия решений по проблемам, которым присущ вероятностный характер. Прогнозирование развития ситуаций по самым разным сторонам жизни требует умения анализировать и оценивать случайные факторы при моделировании ситуации, делать выбор решения и просчитывать все варианты этого выбора, формулировать и проверять гипотезы для нахождения ее оптимального разрешения.

Рабочая программа дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», составленная в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлениям подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия», 41.03.01 «Зарубежное регионоведение», учебными планами от 28.04.2023 г., предусматривает на ее изучение 108 часов, из которых 16 – лекционных и 34 – практических.

Целью дисциплины применительно к теории вероятностей является освоение ее основ, необходимых для решения прикладных задач. Содержание этой части дисциплины должно обеспечить знание студентами основных положений, формул и теорем теории вероятностей для случайных событий, одномерных и многомерных случайных величин, умение строить математические модели для типичных случайных явлений и использовать вероятностные методы в решении прикладных инженерных задач, владение навыками использования прикладных методов теории вероятностей.

Уменьшение количества часов на лекционные занятия в два раза при неизменном содержании учебной дисциплины усилило роль самостоятельной работы студентов по его усвоению. Это обстоятельство потребовало содержательно и процессуально организовать самостоятельную работу студентов по освоению теоретической части курса. Для этого разработаны 11 тестов по каждой теме содержания учебной дисциплины и индивидуальные домашние задания. Результаты выполнения заданий фиксировались в рамках курса, находящегося на образовательном портале Белорусско-Российского университета.

Содержание тестов и индивидуальных домашних заданий было выложено в системе MOODLE, их выполнение отражалось при выставлении рейтинг-контроля (1-й модуль, 2-й модуль). Студенты имели возможность при необходимости консультироваться у преподавателя, уточнять отдельные вопросы, корректировать свою работу. Такая методика работы на протяжении всего семестра ориентировала студентов на подготовку теоретической и практической части экзамена и зачета.

Цель практических занятий заключалась в актуализации теоретических знаний и применении их студентами в конкретных задачных ситуациях соответственно теме занятия. Методика проведения занятий строилась с учетом направления подготовки студентов, их математической подготовки, мотивации обучения и наличия познавательного интереса к содержанию вопросов курса. Отметим наиболее значимые особенности методики обучения.

Во-первых, излагаемый на лекциях материал учитывал особенности двух технических специальностей и одной гуманитарной (зарубежное регионоведение). В частности, методика изучения понятий учитывала такие факторы, как сложность понятия, меру его подготовленности жизненным опытом студента, учет опыта предшествующего обучения студентов, возможность подведения к понятию или сообщение определения понятия в готовом виде. Через определения понятий формируется математическая речь, умение выражать свои мысли в математической форме, умение пользоваться понятиями, подготавливающими определение вероятности: случайный опыт, случайное событие, элементарный исход.

Во-вторых, учет возможности возникновения нескольких событий в одном эксперименте приводит к рассмотрению алгебры событий. Кроме определения понятий сумма или объединение двух событий, произведение или пересечение двух событий, студенты должны уметь записывать математическую модель события для решения задач вычисления вероятности произведения и суммы событий.

В-третьих, контроль усвоения теории удобнее всего проводить в виде тестов с выбором ответа и последующим устным обоснованием результатов выполнения заданий. Такие тесты эффективны, когда предлагаются задания типа «Охарактеризовать указанные события с точки зрения достоверности, невозможности или случайности», «Определить число возможных исходов в каждом из описанных опытов», «Записать множество исходов для следующих испытаний …».

В-четвертых, задачи теории вероятностей отличаются от математических задач вузовской математики: необычная формулировка условия (с использованием в отдельных случаях незнакомых терминов) и постановка вопроса, иной характер данных в задаче значений величин, трудность выбора возможного подхода к решению задачи (если задачи из разных тем), а известные методы решения математических задач, в большинстве случаев, не удается применить для решения вероятностных задач.

В-пятых, решение задач теории вероятностей требует выполнения многих математических расчетов, зачастую округляемых и выражаемых в процентах. Это способствует совершенствованию вычислительной культуры студентов, требует знания и применения некоторых приемов быстрого счета, прикидок результатов, обсуждения ответа с точки зрения его реального смысла.

В-шестых, решение вероятностных задач можно сделать доступным и осознанным, если использовать наглядность. Для большинства рассматриваемых на занятиях задач удобно использовать табличную форму представления решения. Студенты применяют также комбинаторный способ, перебирают возможные варианты. Как средство наглядности используется также вероятностный граф.

Решение вероятностных задач требует умений проводить анализ условия задачи, составлять краткую запись ее, выбирать теорию для решения. Однако такие умения сформированы не у всех студентов. Особые трудности испытывают студенты гуманитарных специальностей, преодолению которых способствует применение алгоритмов или схем решения. Возможность решения задач по алгоритмам отражается в лекциях через предъявление парных задач, одна из которых решается на лекции, а аналогичная ей выносится на самостоятельное решение.

В методике обучения вопросам теории вероятностей значимыми являются методические приемы актуализации знаний, умения составлять и анализировать математические модели реальных явлений и процессов, определяющих фабулу задач теории вероятности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Старовойтова, Е. Л.** Педагогические аспекты обучения бакалавров технического вуза вероятностно-статистическим дисциплинам / Е. Л. Старовойтова // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном образовании: сб. науч. ст. IV Междунар. науч.-практ. конф., Ярославль – Минск, 12 марта 2020 г. – Ярославль: РИО ЯГПУ, 2020. – С. 132–134.

УДК 378.016:51

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДИКИ ИЗУЧЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Тема «Кривые второго порядка на плоскости» традиционно изучается в курсе математики высшей школы. Для студентов технических специальностей на ее изучение отводится одна лекция (вместе с поверхностями второго порядка) и одно практическое занятие. За отведенное время преподавателю надо, во-первых, убедить студентов в значимости содержания темы и, во-вторых, представить это содержание на доступном для их понимания уровне. Таким образом, актуализируется вопрос методики изучения теоретических вопросов и практических приложений темы. Представим возможный вариант такой работы.

1. Лекция (в соответствии с требованиями рабочей программы) содержит теоретические сведения по данной теме и включает определения кривых второго порядка, их виды, канонические уравнения, основные параметры и характеристики. Каждый фрагмент теории имеет наглядные пояснения. Представленный теоретический материал позволяет организовать работу по анализу общего уравнения кривой, обсудить методы приведения уравнений к каноническому виду, а также ориентирует студентов на рассмотрение оптических свойств кривых второго порядка (самостоятельная работа и подготовка сообщения отдельными студентами для иллюстрации прикладной направленности).

2. В примерах, иллюстрирующих фрагменты теории, кривая второго порядка задана общим уравнением с требованием определения ее типа (вида) на основе анализа этого уравнения и обоснования расположения ее центра относительно начала координат (схема распознавания линий второго порядка по их уравнениям). Обязательным является требование приведения уравнения к каноническому виду, из которого проще определяются координаты ее центра, основные параметры и вершины, используемые при построении кривой (первая группа задач). Вторая группа задач содержит непосредственное требование составить каноническое уравнение кривой или найти неизвестную величину (элемент) по исходным данным, используя преимущества канонического уравнения.

3. Рассмотренные в лекции примеры (задачи) имеют парное представление: решение первой задачи разобрано (полностью или на уровне плана), аналогичная задача предлагается для самостоятельного решения. Методика работы над такими задачами определяется математической подготовкой студентов, а также сформированностью у них умений самостоятельной работы. В частности, они могут быть использованы при устном и письменном опросе, включаться в

содержание экзаменационных билетов, составлять основу тестовых заданий по теме.

4. При задании кривой второго порядка общим уравнением, записанным в виде $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, выделяются квадратичная $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ и линейная $Dx+Ey+F$ части, при этом $A^2+B^2+C^2\neq 0$ (по крайне мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля). Это значит, что возможно использование неполных уравнений для кривых второго порядка в требованиях задач.

Необходимо разъяснить студентам, что требование «составить уравнение кривой» означает установить зависимость между координатами x и y произвольной точки, принадлежащей множеству точек плоскости, и параметрами (постоянными величинами, которые заданы в условии конкретной задачи), записав эту зависимость в виде уравнения.

5. На практическом занятии для актуализации знаний школьной геометрии обсуждаются задачи на построение кривой, заданной общим уравнением (на примере уравнения окружности с центром в начале координат и со смещенным центром). Для показа связи изучаемого материала со школьным курсом алгебры (формулы сокращенного умножения) решается задача на построение кривой (окружности), заданной в общем виде, без слагаемого $2Bxy$. Решение таких задач с использованием схемы распознавания линий второго порядка по их уравнениям позволяет реализовать дифференцированный подход при изучении темы.

Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка (полного) понимается и выполняется, как правило, студентами, имеющими хорошую математическую подготовку, и оценивается высокими баллами.

6. Основные задачи темы имеют следующие формулировки (приведем некоторые): привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и найти их основные элементы; построить кривые второго порядка по их каноническим уравнениям и найти их основные элементы; написать каноническое и общее уравнения окружности с центром в точке $M\left(a;\ b\right)$ и радиусом R; написать уравнение гиперболы, если ее фокусы находятся в точках $F_1\left(a;0\right), F_2\left(-a;0\right)$, а длина ее действительной оси равна m и др. Задачи без конкретных числовых значений можно использовать для фронтальной работы с самостоятельным выбором студентом числовых значений параметров. Практика работы показывает, что студенты не любят такие задачи по понятным причинам.

7. Задачи вычислительного характера на применение знаний при нахождении элементов кривых могут быть использованы как средство проверки усвоения теоретических сведений темы и иметь двойную оценку (теория/практика). Задачи могут содержать требование «доказать». Например, доказать, что уравнение … является уравнением гиперболы и найти оси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты.

8. Самостоятельная работа студентов организуется по представленному преподавателем плану. Она включает, например, исторические аспекты изучения кривых второго порядка, их применение в архитектуре, инженерных науках, технических областях.

УДК 378.016:51

ИДЕИ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Т. С. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Математическая подготовка студентов технического вуза является важной составляющей подготовки квалифицированных специалистов. Она обеспечивает возможность описывать разнообразные ситуации технических наук, формулировать и решать прикладные задачи инженерной практики математическими методами, истолковывать полученный результат на языке исходной ситуации. Задача качественного освоения будущими специалистами математического содержания и формирование умений его применения в профессиональной деятельности не теряет своей актуальности. Ее решение требует совершенствования методики преподавания математики в высшей школе, в частности, активизации учебной познавательной деятельности студентов по овладению системой теоретических знаний, практических умений и навыков их применения. Повышение эффективности обучения связано с развитием творческих способностей и интеллектуальных умений студента посредством проблемного обучения.

В теории проблемного обучения представлены психолого-дидактические положения, использование которых позволяет реализовать идеи такого вида обучения с методических позиций с учетом специфики предметного обучения в школе и вузе. Отметим некоторые из них применительно к обучению математике в техническом вузе.

1. Имеется много подходов к понятию проблемного обучения (технология обучения, метод обучения, средство обучения и др.), обсуждению его достоинств и недостатков, целесообразности использования в профессиональных учебных заведениях, в частности в высшей школе. В учебных пособиях по методике преподавания математики (например, А. А. Столяр «Педагогика математики») под проблемным обучением обычно понимают обучение, протекающее в виде разрешения проблемных ситуаций, которые последовательно создаются в учебных целях.

2. Проблемная ситуация как главный и характерный признак проблемного

обучения возникает тогда, когда обучаемый сталкивается с необходимостью преодоления какого-то затруднения, препятствия в процессе достижения поставленной цели, например решения задачи. Это затруднение имеет интеллектуальный характер и отражает потребность в новом знании или способе действия, а подлежащее усвоению знание неизвестно на данном этапе обучения, но предшествующие знания, умения и навыки позволяют разрешить проблему. В общем случае проблемная ситуация возникает при известной цели и неизвестных направлениях ее достижения. В этом смысле она может быть применима в математической подготовке студентов.

3. Проблемная ситуация может создаваться преподавателем через постановку познавательной задачи на лекции, предлагая студентам проанализировать излагаемые факты на предмет сравнения, противопоставления, обобщения (предварительного) их с выдвижением гипотез. При соответствующей организации лекции и подготовленности студентов к такому активному включению в отдельные моменты лекции можно организовать исследование по фрагменту теории или представить план проведения такого исследования. В каждом из указанных случаев студенты станут активными участниками процесса познания.

Если изучаемый на лекции материал позволяет отразить логику научного открытия через постановку проблемных вопросов и их обсуждение, если возможно использование эвристических (поисковых) заданий, выполнение которых приводит к открытию нового знания самими студентами под руководством преподавателя, то это свидетельствует об эффективности используемых методов диалогического изложения для создания проблемной ситуации на данном этапе изучения математики.

Возможности лекции с элементами проблемности ограничены по объективным и субъективным причинам, известным преподавателям, но даже немногие их них, реализованные в практике обучения, способствуют активному усвоению студентами теоретических знаний и развитию теоретического мышления вместе с формированием (поддержанием, развитием) познавательного интереса к содержанию математики как учебной дисциплины и отражению ее значимости с точки зрения профессиональной мотивации будущего специалиста технического профиля.

4. Работа студентов на практических занятиях связана с решением задач. И хотя каждая задача является проблемой для решающего (начиная от постановки задачи и анализа ее условия до проверки результата решения и истолкования его в контексте задачной ситуации), это не значит, что каждая задача является проблемной. Задача, создающая проблемную ситуацию, является проблемной. Для того чтобы на практическом занятии реализовывались идеи проблемного обучения, преподавателю необходимо определиться с проблемными ситуациями по теме занятия (их практическая значимость, профессиональная направленность) и продумать средства их создания. Важно также установить соот-

ветствие особенностей проблемных ситуаций и различных видов учебной работы на занятии (проблемные ситуации мотивирующего и поискового характера), оценить возможности планируемых ситуаций для активной познавательной деятельности студентов в конкретной академической группе.

5. При организации самостоятельной работы студентов в домашних заданиях проблемные ситуации могут быть реализованы через проблемные задачи с недостающими (избыточными) данными, неполно сформулированным вопросом и требованием дополнить его, задачи с несколькими решениями, с меняющимся содержанием и др. Такая работа способствует актуализации, закреплению и обобщению полученных знаний и самостоятельному конструированию новых знаний, развивает умение оценивать решение и аргументировать свою точку зрения, что соответствует задачам проблемного обучения.

УДК 519.2

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО АНАЛИЗУ ДАННЫХ

Г. А. ХАЦКЕВИЧ
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь
Т. В. РУСИЛКО
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Согласно учебным планам учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по специальностям «Искусственный интеллект», «Кибербезопасность», «Программная инженерия», «Прикладная математика», «Управление информационными ресурсами» и в соответствии с содержанием образовательного стандарта высшего образования по специальностям учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к государственному компоненту.

Основой для изучения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являются такие разделы высшей математики, как «Математический анализ», в частности, «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». В свою очередь, теоретические знания и практические навыки, полученные в результате изучения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», могут применяться при курсовом и дипломном проектировании, а также являются базой для успешного освоения значительной части специальных учебных дисциплин, связанных с необходимостью применения вероятностного подхода. Для каждой из перечисленных специальностей существуют типовые учебные программы по теории вероятностей и математической статистике, утвержденные Министерством образования Республики Беларусь.

Для специалистов, подготовленных по названным специальностям, являются актуальными такие направления работы, как анализ данных, машинное обучение. Цель аналитика состоит не в написании программы, а в исследовании и оценке гипотез. Описание и проверка гипотез требуют знания языка математики. В силу случайности явлений окружающего мира, математический инструментарий теории вероятностей и математической статистики является одним из самых приоритетных для использования аналитиком в целях понимания и реализации существующих алгоритмов, а также для создания новых.

Задача преподавателя не только изложить математическую суть учебной дисциплины, но и познакомить студентов с применением изученных методов в работе аналитика. Именно такой подход мотивирует современных студентов и является оправданным. Студенты с интересом воспринимают информацию о новой парадигме программирования – вероятностном программировании – PP (от англ. Probabilistic Programming), где создаются и используются вероятностные модели. Студенты должны узнать, что, на самом деле, машинное обучение базируется на математической статистике, а та, в свою очередь, основана на теории вероятностей. Студентам можно продемонстрировать, что широко известная формула Байеса является простейшей моделью обучения.

Первоначально студентов можно увлечь в мир теории вероятностей, порекомендовав для прочтения книги, где авторы описывают сложные математические понятия простым, веселым языком, приводят примеры поразительных историй о мистических совпадениях, которые можно объяснить математически. Одна из таких книг – книга Джозефа Мазура [1].

Необходимую теоретическую базу и основные подходы к решению умеренно сложных задач можно почерпнуть из многочисленных учебников и пособий, среди которых, в частности, учебники [2, 3]. Подготовка современного специалиста в области анализа данных требует уверенного владения возможностями, предоставляемыми основными методами теории случайных событий и их вероятностей, теории случайных величин и их характеристик, теории случайных процессов и их характеристик. Среди базовых и необходимых методов математической статистики следует выделить методы оценки неизвестных параметров, методы проверки статистических гипотез, в том числе о законе распределения, корреляционный анализ, регрессионный анализ.

В ходе изучения теоретических вероятностных моделей будущих программистов и аналитиков данных интересует вопрос о том, как воплотить теоретические знания в коде, который решает практические задачи. Ответ на этот вопрос должен даваться в процессе преподавания специальных учебных дисциплин, таких как машинное обучение и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазур, Дж.** Игра случая. Математика и мифология совпадения: пер. с англ. / Дж. Мазур. – М. : Альпина нон-фикшн, 2017. – 292 с.
2. **Маталыцкий, М. А.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск: Выш. шк., 2017. – 591 с.
3. **Хацкевич, Г. А.** Эконометрика: учебник / Г. А. Хацкевич, Т. В. Русилко. – Минск: РИВШ, 2021. – 452 с.

УДК 378.147: 519.2

К ВОПРОСУ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ЗАНЯТИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ТЕХНОЛОГИИ В СОТРУДНИЧЕСТВЕ

Л. Н. ШАРАФУТДИНОВА[1], Ю. А. ВЕДЕРНИКОВА[2]
[1]Научно-исследовательский институт мониторинга качества образования
[2]Поволжский государственный технологический университет
Йошкар-Ола, Россия

В процессе обучения студентов математическим дисциплинам в вузе все чаще встает вопрос организации учебного процесса в условиях резкого ограничения времени, отводимого на тот или иной раздел дисциплины. К таким, например, можно отнести раздел «Математическая статистика», учебное время на который отводится по остаточному принципу. В аналогичной ситуации оказываются и важные вопросы прикладного характера, в частности тема «Приложения кратных интегралов в механике» и т. д.

В рамках изучения раздела «Математическая статистика» на кафедре высшей математики Поволжского государственного технологического университета предусмотрена самостоятельная работа студентов в формате РГР, выполнение которой требует, помимо достаточно глубоких знаний студента, и значительных временных затрат на расчеты. Наибольшую трудность испытывали преподаватели в организации работы со студентами заочной формы обучения при изучении темы «Проверка гипотез о виде распределения».

Отметим, что часть студентов имеют недостаточный уровень математической подготовки, чтобы справляться с освоением большого объема материала самостоятельно. Многие студенты, к сожалению, не владеют навыками самостоятельной работы. Все эти факторы ведут к отсутствию мотивации, нежеланию освоить даже базовые понятия раздела математики, не говоря уже о применении стандартных приемов в нестандартных ситуациях. Следовательно, задача преподавателя – помочь организовать самостоятельную работу студентов, найти пути повышения их мотивации. Для преподавателя также важна задача минимизации времени проверки выполненных студентами работ.

Таким образом, стала актуальной необходимость изучения педагогических технологий, которые можно адаптировать и применять в рамках курса математики. Наиболее привлекательной показалась технология обучения в сотрудничестве. «Обучение в сотрудничестве – это совместное (поделенное, распределенное) обучение, в результате которого учащиеся работают вместе, коллективно конструируя, продуцируя новые знания, не потребляя их уже в готовом виде» [1]. Технология в сотрудничестве позволяет уменьшить последствия индивидуального характера учебной деятельности и вместе с тем стремиться к индивидуальным образовательным достижениям студентов.

Основная идея технологии в сотрудничестве – учиться вместе, достигать своих целей, осознавать и вносить свой вклад в успех своих товарищей. Технология в сотрудничестве имеет и ряд сопутствующих положительных моментов: формирует коммуникативные компетенции студента, учит работать в команде, повышает уровень ответственности студентов перед группой, повышает уровень вовлечения каждого студента в процесс обучения.

Организацию работы студентов с использованием технологии в сотрудничестве можно условно разделить на несколько этапов:

1) подготовительный и диагностический;

2) формирование малых групп (микрогрупп) – от трех до пяти студентов внутри академической группы;

3) подготовка студентов «к организации деятельности и взаимодействию в группе»;

4) постановка задачи для каждой микрогруппы;

5) непосредственно групповая деятельность студентов, решение поставленных задач;

6) подготовка к отчету результатов деятельности каждой микрогруппой;

7) контроль (оценивание) результатов работы микрогрупп;

8) анализ работы и рефлексия [2].

Для реализации технологии в сотрудничестве в учебном процессе была выбрана тема «Критерий Пирсона проверки гипотез о виде распределения». При организации работы студентов использовались такие методы технологии в сотрудничестве, как «Пазлы», «Ротация», «Зигзаг» и др.

На подготовительном этапе студенты изучали методические материалы, размещенные в электронных курсах. После диагностического тестирования студенты были разделены в микрогруппы (по четыре человека).

Каждая микрогруппа решала по четыре задачи (по одной для каждого вида гипотетического распределения: биномиального, Пуассона, равномерного, показательного). Задачи разделены на четыре этапа решения (так называемые «Пазлы»). Студент микрогруппы выполняет свой этап (заполняет пазл) и результат передает следующему студенту для дальнейшего использования. Четвертый студент в группе («*аналитик*») проводит анализ, делает вывод о гипотезе и защищает у доски задачу своей микрогруппы. Студент микрогруппы, выполняющий первый этап задания, является «*экспертом*» данного задания (по конкретному гипотетическому виду распределения), к нему могут обратиться за помощью студенты, выполняющие остальные этапы задания [3].

Самым интересным оказалось соединение методов «Пазлы», «Ротация» и «Зигзаг». Ротация представляет собой переключение студента от одной задачи к другой, т. е. каждый студент выполняет один из этапов задания о проверке гипотез, но в разных задачах. Важно, что он выполняет не один и тот же этап, а разные этапы. Например, в первой задаче он выполняет первый этап (вычисление статистических характеристик), во второй – следующий этап (вычисление теоретических частот), в третьей задаче – применение критерия Пирсона, в последней задаче студент выступает «*аналитиком*», подводит итоги работы микрогруппы и защищает задачу.

Метод «Зигзаг» использовался в следующей схеме: студенты, выполняющие одинаковые этапы в задании, могли объединяться во временные группы, обсуждать общие проблемы. Если проблема не решалась, к ним подключались «*эксперты*» микрогрупп по данному виду гипотетического распределения. Затем все возвращались в свои микрогруппы. Разработанная схема ротации и этапы решения задач «Пазлы» представлены в [3].

Защита выполненных микрогруппой заданий проводилась публично и оценивалась всей академической группой по разработанным преподавателем критериям. Следует отметить, что оценки, выставленные студентами-заочниками, в ряде случаев оказались более строгими, чем у преподавателя.

Анкетирование студентов после занятия показало, что технология обучения в сотрудничестве вызвала интерес у студентов, резко повысила активность на занятиях и стремление внести свой вклад в общий результат группы. Технология позволила ознакомиться с большим объемом материала, минуя повторение рутинных вычислительных действий. По данным анкетирования студентов-заочников, 56 % из них готовы самостоятельно справиться с задачей проверки гипотезы о показательном распределении, 89 % – о равномерном распределении, 67 % – о биномиальном распределении и о распределении Пуассона. Для преподавателя технология обучения в сотрудничестве позволила вчетверо уменьшить время на проверку заданий.

Также реализована работа в микрогруппах при изучении темы «Приложения кратных интегралов в механике» со студентами очной формы обучения. В отличие от предыдущей схемы, по результатам диагностического тестирования студенты были разделены на микрогруппы по уровню математической подготовки. В группах со средними и слабыми знаниями решали задания на приложения двойных интегралов. Группы более высокого уровня подготовки решали задания с тройными интегралами. В этих группах применялся только метод «Пазлы». Работа была организована в электронном курсе с использованием элемента «Форум» для каждой отдельной микрогруппы. Защиты работ проводились в рамках вебинаров в дистанционном формате.

Таким образом, применение технологии обучения в сотрудничестве в рамках математических дисциплин позволило решить ряд задач организации самостоятельной работы и повышения активности студентов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Якимович, И. Г.** Технология обучения в сотрудничестве на практических занятиях в вузе / И. Г. Якимович // Вопросы методики преподавания в вузе: ежегодный сб. – 2015. – Вып. 4 (18). – С. 61–68.

2. **Байбородова, Л. В.** Этапы организации групповой работы в учебном коллективе / Л. В. Байбородова, С. В. Данданова // Ярославский педагогический вестник. Психолого-педагогические науки. – 2016. – № 6. – С. 75–83.

3. **Шарафутдинова, Л. Н.** Опыт применения технологии в сотрудничестве (на примере математических дисциплин) / Л. Н. Шарафутдинова // Современные проблемы технического образования: материалы XXI Всерос. науч.-метод. конф. – Йошкар-Ола: ПГТУ, 2021. – С. 165–169.

УДК 004.421.2:06:519.67

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Компьютерное моделирование в образовательном процессе становится важным инструментом, который помогает улучшить качество образования и повысить интерес студентов к изучаемым дисциплинам. Его рассматривают и как метод научного познания, и как самостоятельный вид деятельности. Компьютерное моделирование – это процесс создания компьютерных моделей для анализа и прогнозирования поведения различных процессов и явлений в разных областях знаний – физика, химия, биология, математика, инженерные науки. В компьютерное моделирование входят: построение математической модели с учетом оговоренных допущений и рамок ее применимости; разработка аналитических и численных алгоритмов решения сформулированной математической задачи; создание компьютерной программы; проведение вычислительного эксперимента; обработка результатов расчетов и формулировка выводов [1]. Применение систем компьютерной математики существенно облегчает и расширяет возможности проведения аналитических и численных вычислений, визуализацию и хранение данных на всех этапах компьютерного моделирования. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает студенту понимание сути исследуемых процессов и явлений, изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных [2, 3].

Задача. Пусть в пространстве R^3 находится бесконечно длинный токопроводящий эллиптический цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz. На цилиндр направлено однородное электростатическое поле напряженности $\vec{E}$ в отрицательном направлении оси Ox. На поверхности цилиндра S поддерживается заданный потенциал V. Определить напряженность и потенциал электростатического поля вне цилиндра для разных значений геометрических величин. Физические величины измеряются в системе СИ.

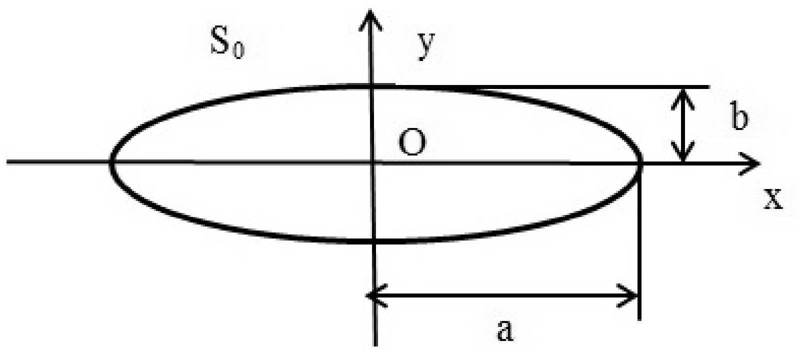


Рис. 1. Геометрия задачи

Постановка задачи (плоскопараллельная задача). Напряженность внешнего электростатического поля задается формулой $\vec{E} = -E\vec{i}$, где $\vec{i}$ – единичный вектор вдоль оси Ox. Потенциал внешнего электростатического поля U_0 связан с напряжённостью поля $\vec{E} = -E\vec{i}$ соотношением [4]

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U_0, \qquad -E\vec{i} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}U_0\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}U_0\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}U_0\vec{k}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}U_0 = E, \quad \frac{\partial}{\partial y}U_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}U_0 = 0, \quad U_0(x) = Ex.$$

Для решения задачи в точке O (см. рис. 1) введем декартовы $\{x, y\}$ и эллиптические $\{\mu, \varphi\}$ координаты, связанные соотношением [5]

$$x = c\,\mathrm{ch}\mu\cos\varphi,\quad y = c\,\mathrm{sh}\mu\sin\varphi,\quad 0 \le \mu < \infty,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

где a, b – большая и малая полуоси эллипса.

Сечение поверхности цилиндра S плоскостью Oxy описывается следующим образом:

$$S_0 = \{\,\mu = \mu_0, 0 \le \varphi \le 2\pi\},\ \ \mathrm{ch}\mu_0 = a / c.$$

Требуется найти потенциал вторичного электростатического поля U_1, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{1}{c^2(\mathrm{sh}^2\mu + \sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}U_1\right) = 0, \tag{1}$$

граничному условию на поверхности цилиндра S и условию на бесконечности

$$U_0(\mu_0, \varphi) + U_1(\mu_0, \varphi) = V(\varphi); \tag{2}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} U_1(\mu, \varphi) = 0. \tag{3}$$

Аналитическое решение задачи. Используя метод разделения переменных и учитывая условие на бесконечности (3), потенциал вторичного поля U_1 представим в следующем виде:

$$U_1(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))\exp(-n\mu),\ \ \mu \ge \mu_0\,.$$

Выполним граничное условие (2), учитывая представления потенциалов U_0, U_1. Получим

$$E\,c\,\mathrm{ch}\mu_0\cos\varphi + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))\exp(-n\mu_0) = V(\varphi). \tag{4}$$

Умножим обе части соотношения (4) на $\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)$, $m = 0,1,2...$, и проинтегрируем по переменной φ от 0 до 2π. Получим

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)d\varphi,\qquad a_1 = \frac{\exp(\mu_0)}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\cos\varphi d\varphi - E\,c\,\mathrm{ch}\mu_0\,,$$

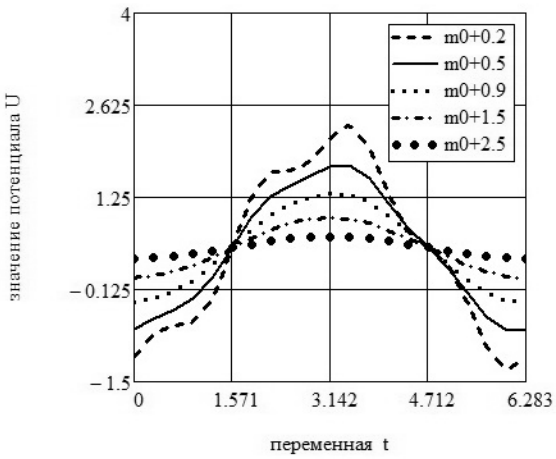
$$a_k = \frac{\exp(k\mu_0)}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\cos(k\varphi)d\varphi,\quad b_k = \frac{\exp(k\mu_0)}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\sin(k\varphi)d\varphi,\ \ k = 2,3,\ldots\,.$$

Вектор напряженности вторичного поля вычислим по формуле

$$\vec{E}_1 = -\operatorname{grad} U_1, \qquad \vec{E}_1 = -\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\mu + \sin^2\varphi}}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}U_1\vec{e}_\mu + \frac{\partial}{\partial\varphi}U_1\vec{e}_\varphi\right).$$

С помощью системы Mathcad [2] вычислим потенциал вторичного поля $U_1(\mu, \varphi)$, $\mu > \mu_0$, и построим графики.

На рис. 2 слева приведены графики потенциала $U_1(\mu, \varphi)$ для некоторых значений $\mu > \mu_0$ при $b/a = 0{,}5$, $a/c = 1{,}155$, $m_0 = 0{,}549$; справа – при $b/a = 0{,}25$, $\frac{a}{c} = 1{,}033$, $m_0 = 0{,}255$, $E = 1$. Потенциал на поверхности цилиндра $-V(\varphi)=1$, $\varphi \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi/4) \cup (\pi/2, 3\pi/4) \cup (\pi, 5\pi/4) \cup (3\pi/2, 7\pi/4)$.



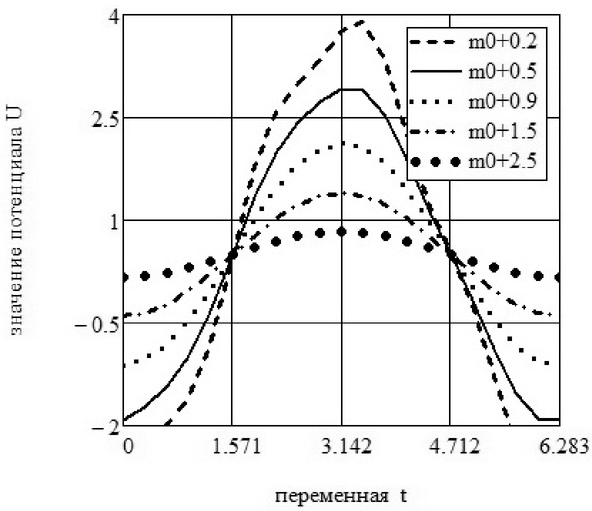


Рис. 2. Графики вторичного потенциала $U_1(\mu, \varphi)$, $\mu > \mu_0$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.

2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учеб. пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.

3. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – М.: Научный консультант, 2018. – С. 525–530.

4. **Шушкевич, Г. Ч.** Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.

5. **Ерофеенко, В. Т.** Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. – Минск: Наука и техника, 1989. – 255 с.

УДК 378, 510

ОБ ОЛИМПИАДЕ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В МГУ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

И. В. АСТАШОВА[1], М. С. РОМАНОВ[2], А. В. ФИЛИНОВСКИЙ[3],
Е. А. АСТАШОВ[2], В. В. РОГАЧЕВ[3]
[1]МГУ имени М. В. Ломоносова, РЭУ имени Г. В. Плеханова
[2]МГУ имени М. В. Ломоносова
[3]МГТУ имени Н. Э. Баумана, МГУ имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Олимпиада по дифференциальным уравнениям проводится кафедрой дифференциальных уравнений МГУ имени М. В. Ломоносова с 2003 г. в последний четверг апреля. Она включает в себя две олимпиады – олимпиаду по обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) и олимпиаду по дифференциальным уравнениям с частными производными (УрЧП).

Цель олимпиады – повышение интереса студентов к математическим наукам, в том числе – к дифференциальным уравнениям (которые служат основой как для решения фундаментальных математических проблем, так и для математического моделирования), а также выявление способных к научным исследованиям талантливых студентов для дальнейшей научной работы с ними.

Вариант каждой олимпиады, как правило, содержит около десяти задач. Студентам необходимо решить максимальное количество задач. Варианты составляются так, что необходимые для решения предложенных задач методы охватывают все основные разделы курса. Наряду с «учебными» задачами, в вариантах присутствуют и задачи исследовательского характера – с целью повышения творческой активности студентов, которым представляется возможность проявить себя при решении нестандартных задач.

С каждым годом интерес студентов к олимпиадам возрастает. Уже несколько лет в каждой из олимпиад и по ОДУ, и по УрЧП принимают участие студенты не только МГУ, но и других университетов Москвы, других городов и зарубежных вузов.

Студенты бакалавриата, специалитета, магистратуры московских вузов участвуют в олимпиаде очно, остальные участники – дистанционно.

Авторами задач олимпиады в разные годы являлись сотрудники кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ: И. В. Асташова, В. В. Быков, А. Ю. Горицкий, Т. О. Капустина, В. В. Рогачев, О. С. Розанова, М. С. Романов, И. Н. Сергеев, И. В. Филимонова, А. В. Филиновский, А. С. Шамаев, а в составлении задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям – также сотрудники кафедры теории динамических систем: О. Н. Агеев, Е. А. Асташов, А. А. Давыдов, М. Е. Липатов.

Тексты заданий олимпиад прошлых лет можно найти в [1, 2]. Приведем задачи варианта 2024 г. с краткими решениями.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям
25 апреля 2024 г.

1. Решите уравнение $(1+2x^2y\cos(x^2y))\,dx + x^3\cos(x^2y)\ dy = 0$.

2. а) Покажите, что существует такая непрерывная функция f, что функция

$$x(t) = e^{1/t} + \frac{1}{2t}$$

на всей своей области определения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

б) Есть ли у этого дифференциального уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а, решение, определённое на всей прямой $\mathbb{R}$?

в) Найдите все решения этого уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а).

3. Дано уравнение $y' - 2xy + 2y^2 = 1$.

а) Решите это уравнение, зная, что у него есть решение $y = x$.

б) Существует ли такое число $\delta > 0$, что график каждого решения $y = \varphi(x)$ $(x \geq 0)$ данного уравнения со свойством $|\varphi(0)| < \delta$ имеет наклонную асимптоту $y = x$?

в) Будет ли решение $y = \varphi(x)$ $(x \geq 0)$ данного уравнения асимптотически устойчивым?

4. Даны четыре системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}6 & 2{,}4\\ -2{,}4 & 2{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Укажите среди них все пары систем, фазовые портреты которых (без учёта направлений движения по траекториям) можно перевести друг в друга аффинными преобразованиями плоскости.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – такая функция класса C^1, что $\operatorname{sgn} f(x, y) = \operatorname{sgn} y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли быть, что у уравнения $y' + f(x, y) = 0$:

а) существует максимально продолженное вправо решение, не стремящееся к нулю при $x \to +\infty$;

б) единственное, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, решение – тождественный ноль?

6. Какие свойства линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами переносятся на аналогичные уравнения с переменными коэффициентами и характеристическим многочленом $L(\lambda, t)$ с коэф-

фициентами, зависящими от t:

а) многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ тогда и только тогда, когда функция $y = e^{\lambda_0 t}$ – решение уравнения;

б) если многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности $k > 1$, то функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ – решение уравнения;

в) если функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ при целом $k > 1$ является решением уравнения, то многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности k?

7. Верно ли, что для любой замкнутой выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и любой точки $(t_0, x_0) \in G$ дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, $(t, x) \in G$, $f \in C^1(G)$ имеет интегральную кривую, определённую на некотором замкнутом временно́м промежутке и содержащую эту точку хотя бы на конце этого промежутка?

8. Матрица линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, +\infty)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)d\tau = 0.$$

Пусть L: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$– непрерывно дифференцируемая и невырожденная при всяком $t \geq 0$ матрично-значная функция, причём

$$\sup_{t\geqslant 0}(|L(t)| + |L^{-1}(t)|) < \infty.$$

Чему может быть равна величина

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} B(\tau)d\tau,$$

где $B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$, $t \geq 0$?

9. Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\\ Dx^2 + 2Exy + Fy^2\end{pmatrix}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E, $F \in \mathbb{R}$ таковы, что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ и $D^2 + E^2 + F^2 > 0$.

а) Сколько решений, имеющих фазовую траекторию в виде луча, может быть у такого уравнения? Как эти лучи могут быть расположены на плоскости?

б) Каким образом устойчивость нулевого решения системы зависит от коэффициентов A, B, C, D, E, F?

в) Может ли система при каких-либо значениях коэффициентов иметь семейство замкнутых траекторий, обходящих вокруг начала координат?

Решения задач

Решение задачи 1.

Для уравнения подбирается интегрирующий множитель от одной переменной $\mu(x) = 1/x$, после домножения на который уравнение приобретает вид $d(\sin(x^2 y) + \ln|x|) = 0$. При умножении на μ теряется решение $x = 0$.

Ответ: $\sin(x^2 y) + \ln|x| = C$; $x = 0$.

Решение задачи 2.

а) Следует из монотонности функции x;

б) $x = 1$;

в) $x = e^{1/(t+C)} + \frac{1}{2(t+C)},\ x = 1$.

Решение задачи 3.

Данное уравнение является уравнением Риккати и $y = x$ – его частное решение. С помощью замены $y = x + z$ оно приводится к уравнению Бернулли $z' + 2xz + 2z^2 = 0$, которое имеет решения $z = 0$ и $z = \frac{1}{e^{x^2}\left(C + 2\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}$, где $C = 1/z(0)$ (в частности, при $C = 0$ получается решение, стремящееся к бесконечности при $x \to +0$, поэтому для решений с конечным значением при $x = 0$ имеем $C \neq 0$). Устойчивость решения $y = x$ исходного уравнения совпадает с устойчивостью нулевого решения полученного уравнения Бернулли, а стремление решения исходного уравнения (с некоторым значением при $x = 0$) к решению $y = x$ равносильно стремлению решения полученного уравнения Бернулли (с тем же значением при $x = 0$) к нулю.

Функция $\Phi(x) = 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ при $x \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом $\Phi(+\infty) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. Поэтому при $C > 0$ (что равносильно $z(0) > 0$) и при $C < -\sqrt{\pi}$ (что равносильно $-1/\pi < z(0) < 0$) функция $\Psi_C(x) = e^{x^2}\left(C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$ не обращается в ноль при $x \geq 0$. Таким образом, решение $z = 1/\Psi_C(x)$ определено при $x \in [0, +\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Поэтому ответ на вопрос п. б положительный: можно взять $\delta = 1/\sqrt{\pi}$. При $C > 0$ функция Ψ_C положительна и монотонно возрастает по x при $x > 0$, а решение $z = 1/\Psi_C(x)$ положительно, монотонно убывает и ограничено сверху числом $z(0) = 1/C$.

Рассмотрим теперь случай $C < -\sqrt{\pi}$. Заметим, что в этом случае $\Psi_C'^{(x)} = 2e^{x^2}\left(x\left(C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) + e^{-x^2}\right) =: 2e^{x^2} w_C(x)$ и $w'_C(x) = C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt < 0$. Поскольку $w_C(0) = 1 > 0 > w_C(+\infty) = -\infty$, то существует единственная точка $x_1 \in (0;\ +\infty)$, в которой w_C и Ψ_C' обращаются в ноль и меняют знак с плюса на минус, а значит, x_1 – точка максимума функции Ψ_C и минимума (отрицательного) функции $1/\Psi_C$. Нетрудно также проверить, что $\Psi_C(x_1) = -1/x_1$. Кроме того, $w_C(-2/C) = -2 - 4C^{-1}\int_0^{-2/C} e^{-t^2}\,dt + e^{-4/C^2} \leqslant -2 - 2C^{-1}\sqrt{\pi} + 1 < 0$ при $C < -2\sqrt{\pi}$. Значит, при $C < -2\sqrt{\pi}$ (т. е. при $\left(-2\sqrt{\pi}\right)^{-1} < z(0) < 0$) имеем $x_1 < -2/C$, $z(x_1) = 1/\Psi_C(x_1) = -x_1 > 2/C = 2z(0)$. Значит, если $|z(0)| < \varepsilon/2$, то при всех $x \geq 0$ имеем $|z(x)| \leq |z(x_1)| = |-x_1| = |2z(0)| < \varepsilon$. Из всего сказанного следует, что решение $z = 0$ ($x > 0$) уравнения Бернулли, а значит, и решение $y = x$ ($x > 0$) исходного уравнения, будет устойчивым по Ляпунову, а с учётом результата п. б – также асимптотически устойчивым.

Ответ: а) $y = x$ и $y = x + \frac{1}{2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx}$ (неопределённый интеграл включает в себя аддитивную константу); б) да; в) да.

Решение задачи 4.

Ответ: первая и вторая.

Все перечисленные системы задают сёдла. Аффинными преобразованиями можно совместить асимптоты двух сёдел, но это ещё не значит, что их фазовые портреты совпадут, т. к. траектории решений имеют разные (хотя и визуально похожие) формы.

Если перевести асимптоты седла на координатные оси (привести систему к жордановой форме), траектории седла можно будет записать в виде $y = Cx^a$, где a – отрицательный показатель. Форма решения определяется этой степенью, которая, в свою очередь, определяется отношением собственных значений матрицы, и это отношение не изменить аффинным преобразованием координат. Так что совместить можно только те фазовые портреты, которые изображают гиперболы с одинаковым a. Собственные значения матриц такие: 6 и −3, −2 и 4, 1 и −1, 2 и −3, поэтому совместить можно только портреты первых двух систем.

Примечание – У матрицы 2×2 четыре элемента и каждое седло тоже полностью определяется четырьмя параметрами:

– первый параметр: направление асимптоты роста;

– второй параметр: направление асимптоты убывания;

– третий параметр: отношение собственных значений;

– четвертый параметр: скорость движения точки по траекториям фазового портрета (на фазовых портретах этот параметр не сказывается).

Решение задачи 5.

Ответ: а) да; б) да.

Пусть $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$. Разделяя переменные, найдем общее решение рассматриваемого уравнения: $y(x) = y(0)\exp(\operatorname{arctg} x)$. Оно стремится к $y(0)\exp(\pi/2)$ при $x \to +\infty$. Этот предел равен 0 только при $y(0) = 0$, т. е. при $y(x) \equiv 0$. Возможны и другие подходящие функции $f(x, y)$.

Решение задачи 6.

Ответ: а), б) да; в) нет.

а) Подстановка функции $y = e^{\lambda_0 t}$ в уравнение и сокращение на $y = e^{\lambda_0 t}$ даёт уравнение $L(\lambda, t) = 0$.

б) Если оператор уравнения имеет вид $L(d/dt, t) = l(d/dt, t) \cdot (d/dt - \lambda_0 I)^k$, то его применение к функции $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ даёт $L(d/dt, t)y = l(d/dt, t)\ 0 = 0$.

в) Контрпример: функция $y = te^t$ ($k = 2$) является решением уравнения 1-го порядка $t\dot{y} - (t + 1)\,y = 0$, характеристический многочлен $L(\lambda, t) = t\lambda - (t + 1)$ которого имеет переменный корень $\lambda = 1 + 1/t \neq 1$.

Решение задачи 7.

Ответ: нет.

Решение

Например, задача Коши

$$\dot{x} = 0, (t, x) \in G \equiv \{(t, x): t^2 + x^2 \leq 1\},\ x(0) = 1$$

не имеет ни одного решения, определенного на промежутке.

Решение задачи 8.

Из формулы Лиувилля – Остроградского получаем для фундаментальной матрицы X системы A равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \det X(t) = 0.$$

Заметим, что $Y(t) \equiv L^{-1}(t)\,X(t)$ – фундаментальная матрица системы B. Из ограниченности L и L^{-1} следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \det Y(t) = 0,$$

откуда по формуле Лиувилля – Остроградского получаем, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} B(\tau)d\tau = 0.$$

Решение задачи 9.

Предположим, что решение с фазовой траекторией в виде луча есть. Тогда его можно записать в виде $y = \alpha x$. От системы уравнений, исключая переменную t, можно перейти к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Dx^2+2Exy+Fy^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}.$$

Если подставить $y = \alpha x$ в это уравнение, после преобразований получится соотношение

$$\alpha(A + 2B\alpha + C\alpha^2) = D + 2E\alpha + F\alpha^2.$$

Левая часть выражения определяет кубическую (или меньшей степени) параболу, проходящую через ноль, правая – произвольную квадратичную параболу либо прямую. У них может быть не более трёх общих точек и эти точки могут располагаться где угодно. Также возможен вариант, когда левая и правая части полностью совпадают, т. е. в таком случае годится любая α.

Дальше нам поможет такое наблюдение: если заменить $x \longmapsto -x$, а потом $y \longmapsto -y$, то значения правой части системы не изменятся никак (в отличие от линейного случая, где такая замена поменяла бы знак правой части). В двух симметричных относительно (0, 0) точках векторы скорости будут одинаковыми. Значит, сам фазовый портрет после центральной симметрии перейдёт сам в себя, но изменит направление стрелок. Фазовые портреты линейных систем центрально-симметричны с учётом направления стрелок.

Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Решений-лучей может быть либо ни одного, либо два, либо четыре, либо шесть, либо они заполняют всю плоскость, за исключением одной прямой. Объясним, почему это так.

Из-за симметричности фазового портрета лучи образуют пары, где одно решение входит в особую точку, а другое – выходит, и вместе такая пара образует прямую. У обоих лучей из пары одинаковые значения α.

Значит, если уравнение выше имеет 0, 1, 2, 3 решения α, то среди решений дифференциальной системы было 0, 2, 4, 6 решений в виде луча соответственно.

Также возможна ситуация, когда левая и правая части уравнения выше совпадают и ему удовлетворяют любые значения α, тогда весь фазовый портрет можно разбить на выходящие из (0, 0) лучи.

В таком случае, если мы начнём обходить особую точку по окружности, то в некоторый момент, когда решения, идущие в особую точку, сменятся решениями, идущими из неё. Отсюда следует, что решения, идущие в ноль, и решения, выходящие из него, отделены друг от друга прямой, или же прямыми из неподвижных точек – и на самом деле такая прямая может быть только одна. В самом деле, если бы нашлись две такие прямые, на которых $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$, то квадратные трёхчлены в системе дифференциальных уравнений были бы одинаковы с точностью до множителя, но в таком случае уравнение на α имело бы всего одно решение, что противоречит предположению.

2. Устойчивости у нулевого решения нет никогда – если какая-то траектория стремится к нулю, то у неё есть выходящий из нуля центрально-симметричный двойник, который нарушит устойчивость.

3. Замкнутых траекторий быть не может. Если есть замкнутая траектория, то у неё должен быть центрально-симметричный двойник. Либо это – она сама (периодическая траектория сама по себе симметрична), либо нет, и двойник пересекает, или пересекает с касанием саму траекторию. Все эти варианты невозможны. Пересечение траекторий без касания противоречит самому определению

дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. Пересечение с касанием противоречит теореме о существовании и единственности (правые части системы удовлетворяют условию Липшица). Если мы предполагаем, что траектория симметрична сама себе – мы не сможем непротиворечиво указать направления движения по ней, этому будет препятствовать одинаковость векторов скорости в симметричных точках.

Олимпиада по уравнениям с частными производными 25 апреля 2024 г.

1. Решите в классе обобщенных функций задачу Коши

$$u''' + 3u'' + u'' - 5u = \delta''(x-1) + \theta(x),\, u|_{x<0} = 0,$$

где $\theta -$ функция Хевисайда.

2. Найдите классическое (класса $C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\})$) ограниченное решение задачи

$$u_{xx} = (\operatorname{sgn} y) u_{yy},\ u|_{y=0} = \sin^2 x$$

в плоскости $\mathbb{R}^2$ и докажите его единственность.

3. Существует ли такая гармоническая функция $u \in L_1(R^2)$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, u(2^k, 2^k)$ расходится?

4. Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) \colon x \in R, 0 < t < T\}$ задачу Коши

$$u_t = (x^2+1)\big((x^2+1)u_x\big)_x, \quad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Верно ли, что для любого ограниченного классического решения этой задачи выполнен принцип максимума $\sup\limits_{(x,t)\in Q_T} u \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$?

5. Найдите все функции $u(x)$, гармонические в области $\Omega = \{x \in R^3 \colon 0 < |x| \leqslant 1\}$, равные нулю при $|x| = 1$ и удовлетворяющие условию $\lim\limits_{|x|\to 0} |x|\, u(x) = 2024$.

6. В секретной лаборатории колеблется струна из экспериментального материала, закрепленная на концах и имеющая длину π. К струне подключена большая кнопка. При нажатии кнопки скорость распространения волн в струне мгновенно меняется, а именно увеличивается вдвое. Когда кнопку отпускают, скорость распространения волн принимает исходное значение. Скорость и форма струны меняются непрерывно. Пусть в начальный момент времени струна имела нулевую скорость, а её форма задавалась уравнением $u(x,0) = \sin^2 x$. Возможно ли так подобрать моменты нажатия и отпускания кнопки, чтобы отклонение

струны от положения равновесия в какой-то точке $(x,t) \in (0,\pi)^2$ превысило по модулю 2024?

7. Пусть $\Omega = (0, 1)^2$. При каких значениях $A \in \mathbb{R}$ функционал

$$J(u) = \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy + A \int_\Omega u\, dxdy + \int_{\partial\Omega} xudS$$

имеет минимум на пространстве $W_2^1(\Omega)$?

8. Пусть обобщенная функция $\delta_{S_{1/2}}$ определена соотношением

$$\left(\delta_{S_{1/2}}, \varphi\right) \equiv \int_{x^2+y^2=1/4} \varphi\,(x,y)\, dS.$$

Существует ли обобщенное решение задачи $\Delta u = \delta_{S_{1/2}}$ в области $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $u|_{x^2+y^2=1} = 0$? Если да, найдите его.

Решения некоторых задач

Решение задачи 2.

В полуплоскости $y < 0$ нужно решать уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Так как $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$, решение ищем в виде $u_- = \frac{1}{2} + Y(y)\sin 2x$. Подстановка в уравнение дает $Y(t) = C_1 e^{2y} + C_2 e^{-2y}$.

Из ограниченности следует, что $C_2 = 0$, из краевого условия – что $C_1 = -1/2$. Единственность вытекает из продолжения на всю плоскость и теоремы Лиувилля.

В полуплоскости $y > 0$ нужно решать волновое уравнение $u_{xx} = u_{yy}$, для единственности необходимо два начальных условия. Поскольку u и u_y должны быть непрерывны, одно условие $u|_{y=0} = \sin^2 x$, другое $u_y\big|_{y=0} = (u_-)_y\big|_{y=0} = \sin 2x e^{2y}|_{y=0} = -\sin 2x$. Находим u_+ по формуле Даламбера.

Ответ: $u(x,y) = u_\pm$, $y > (<) 0$, $u_+ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\big(\sin 2(x+y) + \sin 2(x-y) - \cos 2(x+y) + \cos 2(x-y)\big)$, $u_- = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x e^{2y})$.

Решение задачи 3.

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, u(2^k, 2^k)$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left|u(2^k, 2^k)\right| = +\infty$. Тогда по теореме о среднем для некоторого $\delta > 0$ круги $B_{\delta k^2}\left((2^k, 2^k)\right)$ для различных k не пересекаются и

$$+\infty = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left|u(2^k, 2^k)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\pi\delta^2 k^2} \left| \int_{B_{\delta k^2}\left((2^k,2^k)\right)} u\,(x)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{\delta k^2}\left((2^k,2^k)\right)} |u(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{R^2} |u(x)|\,dx,$$

функция $u \notin L_1(\mathbb{R}^2)$.

Решение задачи 4.

Ограничимся случаем $\varphi = 0$. Если принцип максимума выполнен, то исходная задача имеет ровно одно ограниченное решение $u \equiv 0$.

Сделаем такую замену переменных $\xi = \xi(x)$, что $(x^2+1)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$.

Например, можно взять $\xi = \operatorname{arctg} x$. В этом случае уравнение сводится к задаче

$$u_t = u_{\xi\xi}, \quad \xi \in (-\pi/2,\ \pi/2), \qquad t > 0, \qquad u|_{t=0} = 0.$$

Данная задача недоопределена. Добавив граничные условия вида $u|_{\xi=-\pi/2} = t$, $u|_{\xi=\pi/2} = t$, мы получим отличное от нуля, ограниченное в $(-\pi/2,\ \pi/2) \times (0, T)$, решение задачи в переменных ξ, а значит, и отличное от нуля, ограниченное в Q_T, решение исходной задачи.

Решение задачи 5.

Обозначим $v = u - \frac{2024}{|x|}$. Функция v – гармоническая в области Ω, при этом $v(|x|) = o(|x|^{-1})$ при $x \to 0$. По теореме об устранимой особенности v – гармоническая в единичном шаре. На границе шара она тождественно равна константе –2024. Значит, $v \equiv -2024$.

Тогда $u = \frac{2024}{|x|} - 2024$.

Решение задачи 6.

Предположим, что кнопку нажимали в моменты времени $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$ и отпускали в моменты времени $t_2, t_4, \dots, t_{2n}$. На каждом интервале (t_i, t_{i+1}) струна описывается уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

где $a = 1$ или $a = 2$.

Решение представимо в виде ряда $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,(t) \sin kx$.

Если функция u ограничена величиной 2024, то при всех k и при всех $t \in (0, \pi)$

$$|b_k| = \frac{|(u, \sin kx)|_{L_2(0,\pi)}}{\|\sin kx\|^2_{L_2(0,\pi)}} \leqslant \frac{2024\pi}{\pi/2} = 4048.$$

Функции $b_k(t)$ и $b_k{}'(t)$ – непрерывные и удовлетворяют почти всюду (кроме точек $t = t_i$) уравнению $b_k{}'' = -a^2(t)k^2 b_k$, где $a(t)$ – кусочно-постоянная функция со значениями $\{1; 2\}$ и точками разрыва $t_1, \ldots, t_{2n}$.

На каждом интервале (t_i, t_{i+1}) выполнено равенство

$$|b_k{}'(t)|^2 + a^2k^2b_k^2(t) = \text{const}.$$

Будем увеличивать a в тот момент, когда $b_k(t) = 0$, уменьшать, когда $b_k{}'(t) = 0$.

Тогда, с одной стороны, $4k^2b_k^2(t_{i+1}) = |b'_k(t_i)|^2$, а с другой – $|b_k{}'(t_{i+2})|^2 = k_k^2 b_k^2(t_{i+1})$, откуда $b_k{}'(t_{i+2}) = 2b_k{}'(t_i), b_k(t_{i+1}) = 2b_k(t_{i-1})$, i – нечетно.

Поскольку $b_k = A\sin k(t + \text{ф})$ на каждом промежутке гладкости, интервал между переключениями можно выбрать не превосходящим периода функции $\sin kt$, что является величиной порядка $1/k$.

Таким образом, за время T функцию b_k можно увеличить в qTk раз, где $q > 1$.

С другой стороны, из начальных условий $b_k(0) \sim k^{-p}, p \in \mathbb{N}$.

Так как $q^{Tk}k^{-p} \to \infty$, то найдется настолько большое k, что в результате некоторой последовательности нажатий величина b_k превзойдет 4048.

Решение задачи 7.

Подставим $u = c \in \mathbb{R}$. Тогда

$$J(u) = \int_\Omega Ac\,dxdy + \int_{\partial\Omega} xc\,dS = c\left(A + \int_{\partial\Omega} x\,dS\right).$$

Если $A \neq -\int_{\partial\Omega} x\,dS = -2$, то минимум не существует, т. к. $J(u)$ принимает все возможные значения из $\mathbb{R}$.

В противном случае, минимумом будет решение задачи $2\Delta u = -2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -x$.

Решение задачи 8.

Поскольку любая функция из W_2^1 (Ω) имеет интегрируемый с квадратом след на окружности $x^2 + y^2 = 1/4$ и $\int_{x^2+y^2=1/4} u^2\,dS \leqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, то δ_{S_1} является линейным непрерывным функционалом на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. По известной теореме, соответствующая задача Дирихле для оператора Лапласа однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Так как задача инвариантна относительно поворотов, будем искать радиально-симметричное решение $u = U\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. При $x^2+y^2 \neq 1/4$ функция u – гармоническая.

Отсюда $U(r) = \begin{cases} A, & r < 1/2 \\ B + D\ln r, & r > 1/2. \end{cases}$ Из граничных условий получаем $B = 0$. Осталось посчитать обобщенный лапласиан функции $U\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, чтобы подобрать A и D.

Пусть $\varphi \in D(\Omega)$. Тогда, с учетом формулы Грина

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}=1/2} \varphi\, dS = (\Delta u, \varphi) = (u, \Delta\varphi) =$$

$$= \int_{\sqrt{x^2+y^2}<1/2} A\,\Delta\varphi dx + \int_{1/2<\sqrt{x^2+y^2}<1} D\ln r\,\Delta\varphi dx =$$

$$= \int_{\sqrt{x^2+y^2}=1/2} A\,\varphi_r dS - \int_{\sqrt{x^2+y^2}=1/2} D\ln r\varphi_r dS + \int D\frac{\partial}{\partial r}\ln r\varphi dS.$$

Отсюда $D\frac{\partial}{\partial r}\ln r\Big|_{r=1/2} = 1$, $A = D\ln 1/2$, т. е. $D = 1/2$, $A = \frac{-\ln 2}{2}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асташова, И. В.** Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям на механико-математическом факультете МГУ / И. В. Асташова, А. С. Шамаев, Т. О. Капустина // Современные проблемы математики и механики: к 80-летию механико-математического факультета МГУ. – М. : Моск. ун-т, 2016. – Т. 9, вып. 3. – С. 32–53.

2. Сайт кафедры дифференциальных уравнений мехмата МГУ имени М. В. Ломоносова. – URL: http://new.math.msu.su/diffur/olympR.htm.

Научное издание

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 20 февраля 2025 года)

Печатается в авторской редакции

Редакторы *И. В. Голубцова*, *А. А. Подошевко*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать 31.01.2025. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 5,25. Тираж 10 экз. Заказ № 55.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.