МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 22 февраля 2024 года)

Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2024

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1
П72

П72 **Преподавание** математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context: материалы Междунар. науч.-практ. семинара / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2024. – 95 с.: ил.
ISBN 978-985-492-304-8.

В сборнике представлены материалы научно-практического семинара, традиционно проводимого в Белорусско-Российском университете.

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1

ISBN 978-985-492-304-8

СОДЕРЖАНИЕ

АРСЛАНБЕКОВА С. А., МУРЗИНА Э. Ф. О проведении итогового тестирования 5

ASKAROVA D. B., JOLDASBAEVA R. B. Mixed problems for forced vibration of a rectangular membrane with a delaying argument 8

АСТАШОВА И. В., ЕЖАК С. С. О работе с талантливыми студентами 10

БОНИЦКАЯ О. В., ДУДИНА Ю. В. Использование библиотек Python при изучении теории вероятностей и математической статистики 15

БУТОМА А. М. О некоторых аспектах проведения практических занятий по математике в техническом вузе 18

ВЕЛИКОВИЧ Л. Л. Теория решения задач как идеология принятия решений в условиях структурно-информационной неопределенности в математике 20

ГАРИСТ В. Э. Метод наименьших квадратов в системах компьютерной математики 24

ДИК Е. Н., БАГАУТДИНОВА И. И. Изучение условий стабильности технологического процесса средствами прикладной программы Mathcad 28

ЖАМУРАТОВ К., УМАРОВ Х. Р., ТУРДИМУРОДОВ Э. М. О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором 31

ЗАМУРАЕВ В. Г. Решения наиболее сложных задач XIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике 35

ЗАСИМОВИЧ Е. В., РОМАНОВИЧ Л. А., САКОВИЧ Н. В., АДАШЕВ Ж. К. Особенности разработки учебно-методического пособия по дисциплине «Алгебраические структуры и векторные пространства» 40

КЛЮКИНА Е. А. Опыт использования лекции-провокации в процессе обучения бакалавров дисциплине «Алгебра» 42

КОЗЛОВ А. Г. Использование Google Golaboratory и языка программирования Python на лабораторных занятиях при изучении темы «Булевы функции» 45

КУЗНЕЦОВА В. А., БОНИЦКАЯ О. В., ИНЧЕНКО О. В. Применение математических пакетов для вычисления определенных интегралов 47

ЛЫКОВА К. Г. Развитие интеллектуальной мобильности обучающихся в цифровой образовательной среде 49

МАКОВЕЦКАЯ О. А. Цифровой двойник учебного курса дисциплины как способ организации управляемой самостоятельной работы 52

МАКОВЕЦКИЙ И. И. Дополнительные возможности системы дистанционного обучения Moodle 55

МАРЧЕНКО И. В. Использование MS Moodle при проведении коллоквиума 56

МУРЗИНА Э. Ф. Профессионально ориентированное содержание дисциплины «Математика» 58

ОРЛОВА Т. Ю. Система упражнений для математического кружка по теме «Ряды» 61

ПРИМАК И. У. О рабочей программе дисциплины «Квантовые вычисления» для направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» 64

РОМАНЕНКО А. А. Об изучении дисциплины «Теория функций комплексной переменной» 65

СЕРЫЙ А. И. Об использовании блок-схем при решении задач по электродинамике в курсе теоретической физики 68

СТАРОВОЙТОВА Е. Л. Проблема индивидуализации обучения математике бакалавров технического профиля 71

СТАРОВОЙТОВА Е. Л. Управление учебно-познавательной деятельностью студентов в процессе обучения математике как методическая проблема 74

СТАРОВОЙТОВА Т. С. Математическая подготовка студентов: проблема активных методов обучения 77

ТАДЖИЕВ М., ГАИМНАЗАРОВ О. Г. Поиск и отбор одаренных студентов и организация целевой подготовки с учетом их способностей к математике 79

ТАДЖИЕВ М., ДЖАКАЕВА К. Д. Применение производной к исследованию кратных корней кубического уравнения 83

ХАЦКЕВИЧ Г. А., РУСИЛКО Т. В. Особенности преподавания прикладной статистики для студентов инженерных специальностей 85

ШУШКЕВИЧ Г. Ч., ШУШКЕВИЧ С. В. Аналитическое решение разностных уравнений, используя систему MathCAD 87

ШУШКЕВИЧ Г. Ч., ШУШКЕВИЧ С. В. Применение Sympy для аналитического решения волнового уравнения 91

УДК 629.027

О ПРОВЕДЕНИИ ИТОГОВОГО ТЕСТИРОВАНИЯ

С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Э. Ф. МУРЗИНА
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

С введением информационных образовательных технологий распространенной формой проверки знаний студентов стало тестирование. Рассмотрим примеры заданий итогового тестирования, ежегодно проводимого в нашем вузе. Тест содержит задания разного уровня: задание с выбором одного ответа из четырех предложенных, задания с выбором двух-трех ответов из четырех, задание, где ответ вписывает студент. В интернет-тестировании предусмотрена возможность выбирать темы для проверки знаний. При этом учитывается, что при уменьшении количества тем (разделов) вносятся коррективы в содержание: увеличивается количество заданий по оставшимся разделам. Соответственно, изменяется и качественная составляющая заданий.

Так, в приведенном задании (рис. 1) методом подбора довольно сложно прийти к правильному ответу.

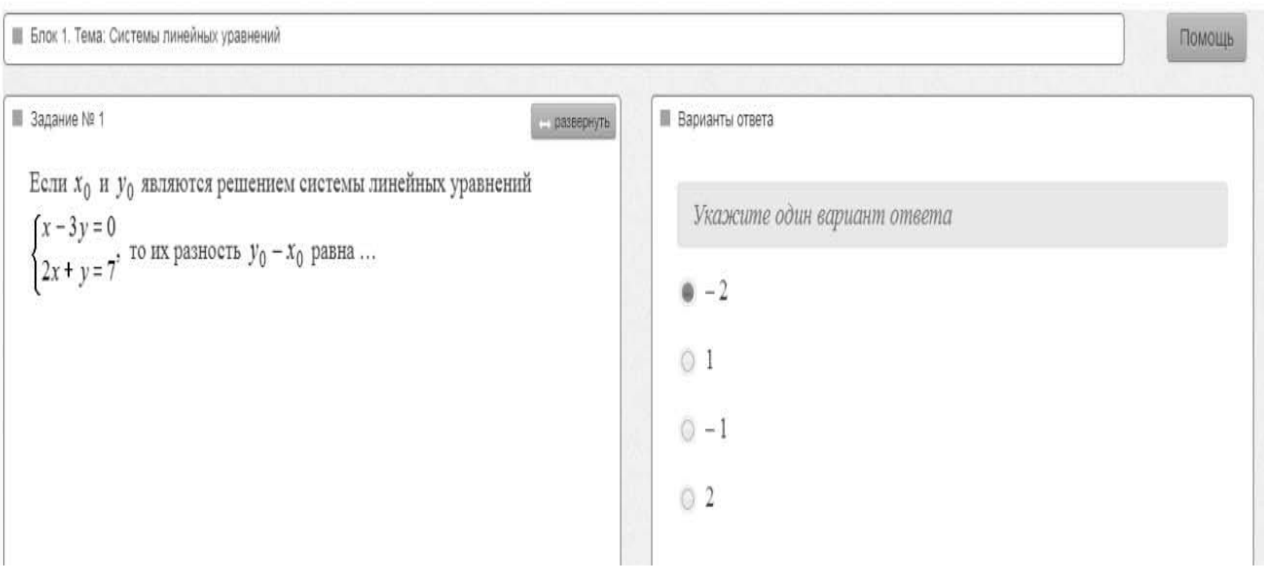


Рис. 1. Подбор ответа

В следующем задании при вычислениях и при использовании онлайн-калькулятора или инженерных программ ответ часто приводится в виде с раскрытыми скобками или в виде дроби с общим знаменателем (рис. 2). Что также требует определенных навыков.

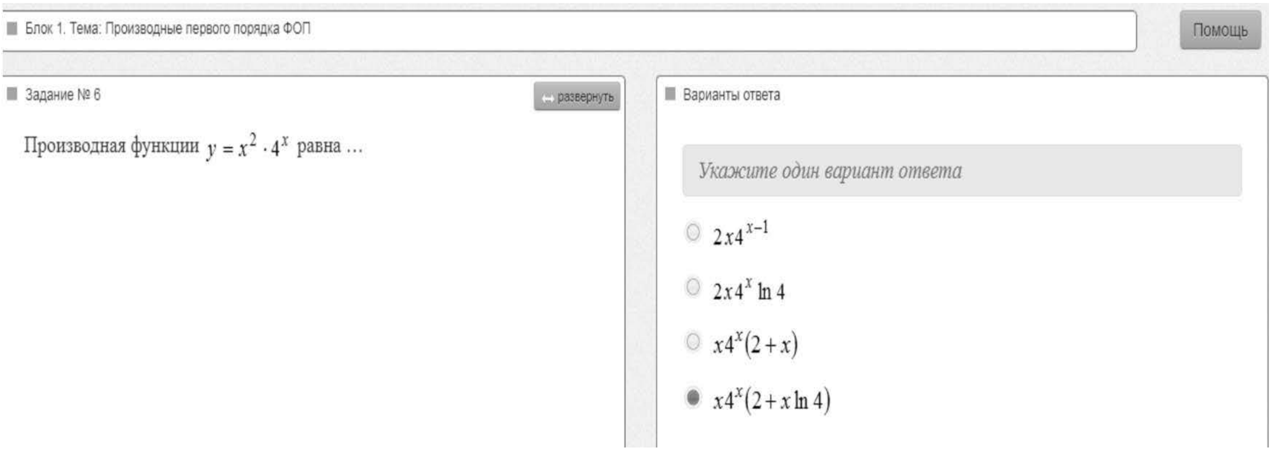


Рис. 2. Равносильность результата

В каждом разделе присутствуют задания, которые адресованы обучающимся с разным уровнем подготовки (рис. 3).

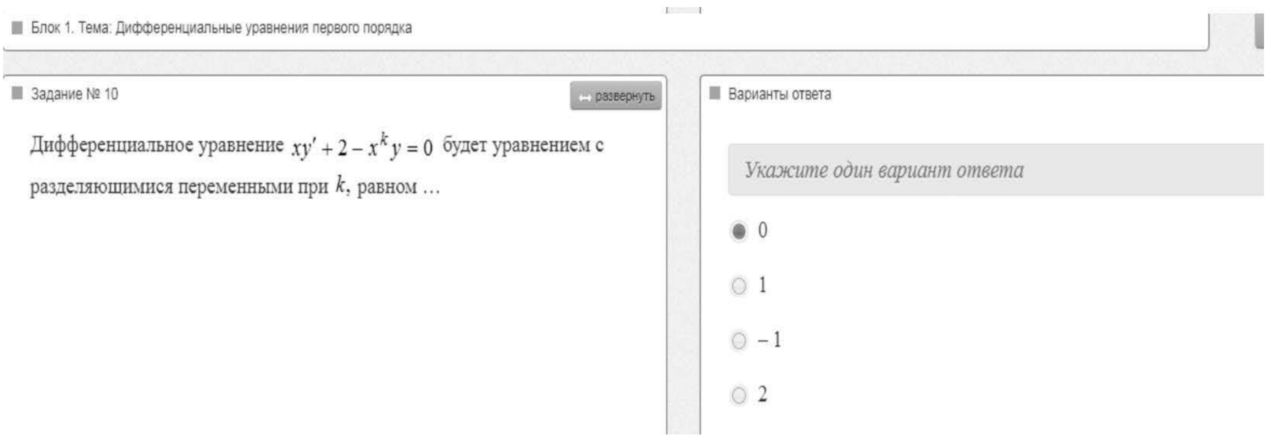


Рис. 3. Распознавание вида уравнения

Интересна вторая часть, где присутствуют задания, в которых необходимо выполнить ряд преобразований. Причем требуется не только знание алгоритма действий, но и понимание как применить алгоритм в конкретной ситуации (рис. 4).

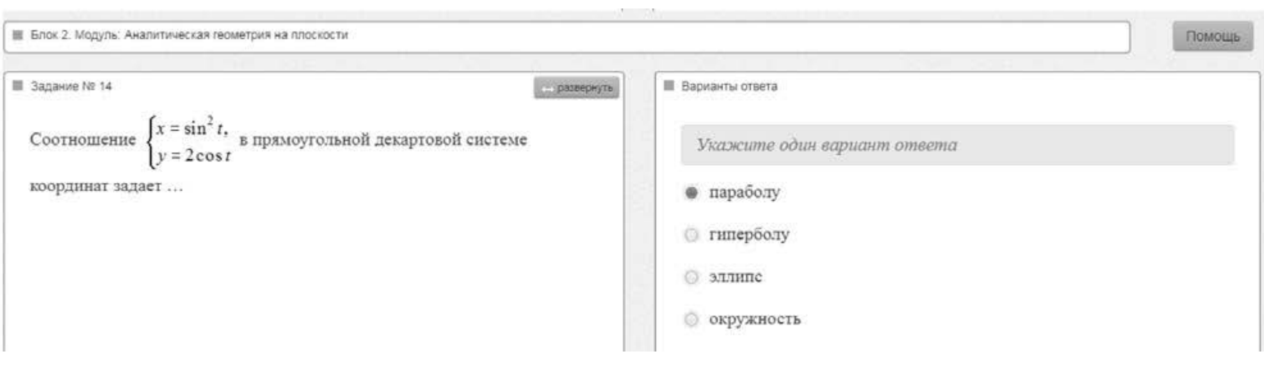


Рис. 4. Преобразование условия

Задачи третьего блока можно решать как в общем виде, так и в каждом конкретном случае. Это дает возможность разработать алгоритм действий при выполнении задания. Такая работа интересна обучающимся с высоким уровнем знаний, а разработанный алгоритм дает возможность преподавателю повысить уровень знания других обучающихся.

Разнообразность заданий (по содержанию разделов и по способам решения), содержащихся в интернет-тесте, позволяет объективно оценить знания, даже если обучающиеся имеют возможность использовать онлайн-калькулятор или какое-либо программное обеспечение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Творчество и аденилатциклазная активность / Е. Н. Дик [и др.] // Образование: гибкие технологии. Педагогическая психофизиология. Нейропедагогика: материалы Респ. науч.-практ. конф., посвящ. развитию образования на основе приоритетных направлений науки и техники, утв. Правительственной комис. РФ от 21.07.1996 г.: в 2 ч. – Уфа: БО РПО, 1996. – Ч. 2. – С. 44–45.

2. **Дик, Е. Н.** Организация модульно-рейтинговой системы при обучении математики / Е. Н. Дик, Н. А. Костенко // Инновационные методы преподавания в высшей школе: материалы Всерос. науч.-метод. конф. с междунар. участием. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2012. – С. 68–71.

3. **Дик, Е. Н.** Традиции и инновации в преподавании математики / Е. Н. Дик, Н. А. Костенко // Инновационные методы преподавания в высшей школе: материалы Всерос. науч.-метод. конф. с междунар. участием. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2012. – С. 71–73.

4. **Дик, Е. Н.** Многофакторная структура интеллекта при реализации многоуровневого обучения в современных университетах / Е. Н. Дик // Современное состояние, традиции и инновационные технологии в развитии АПК: материалы Междунар. науч.-практ. конф. в рамках XXIX Междунар. специализир. выставки «Агрокомплекс-2019». – Уфа: Башкир. ГАУ, 2019. – С. 58–61.

5. **Дик, Е. Н.** Индивидуальные особенности энергетики интеллекта / Е. Н. Дик // Психология на службе Республики Башкортостан: материалы Регион. науч.-практ. конф. – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 1998. – С. 83–85.

6. **Дик, Е. Н.** Формирование профессиональных компетенций в период освоения современных стандартов / Е. Н. Дик // Качество продукции, технологий и образования: материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф. – Магнитогорск: МГТУ им. Г. И. Носова, 2019. – С. 260–263.

7. **Дик, Е. Н.** Метод линейного программирования в задаче о получении прибыли / Е. Н. Дик, И. И. Багаутдинова // Инновационное развитие современного агропромышленного комплекса: материалы Нац. науч.-практ. конф., посвящ. памяти д-ра техн. наук, проф. Л. М. Максимова. – Ижевск: Удмурт. ГАУ, 2022. – С. 341–344.

8. **Дик, Е. Н.** Математическое обоснование некоторых условий эксплуатации агротехники / Е. Н. Дик // Агроинженерная наука XXI века: науч. тр. Всерос. (нац.) науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию Казанского ГАУ. – Казань: Казан. ГАУ, 2022. – С. 138–143.

УДК 517.929

MIXED PROBLEMS FOR FORCED VIBRATION OF A RECTANGULAR MEMBRANE WITH A DELAYING ARGUMENT

D. B. ASKAROVA, R. B. JOLDASBAEVA
Karakalpak State University
Nukus, Uzbekistan

In the article, the basic starting problem for the equation of forced vibration with the delaying argument of a single membrane was discussed. Okay, this matlab is a basic starting problem

$$u_{tt}(t,x,y) = a^2[u_{xx}(t-\tau,x,y) + u_{yy}(t-\tau,x,y)] + f(x,y); \tag{1}$$

$$u(t,x,y) = \varphi(t,x,y), \quad t \in [0;\tau],\ x \in [0,p],\ y \in [0,q]; \tag{2}$$

$$u(t,0,y) = u(t,p,y) = 0, \quad u(t,x,0) = u(t,x,q) = 0 \tag{3}$$

we are concerned with the problem of defining singular boundary conditions $t > \tau$ for the solution of the graph, where $\tau > 0$, a is a constant number and t is continuous with respect to the starting function $\varphi(t,x,y)$, and therefore is a doubly continuously differentiable function with respect to x and y, defined in the domain of the function $f(x,y)$, $t \geq 0$, $x \in [0,p]$, $y \in [0,q]$ is a continuous function.

The solution is two solutions

$$\underset{\varphi}{u}(t,x,y) = \underset{\varphi}{\vartheta}(t,x,y) + \underset{0}{w}(t,x,y) \tag{4}$$

we are looking for it in the form of addition, where the basis of the function $\underset{\varphi}{\vartheta}(t,x,y)$ is the beginning

$$\begin{gathered}\vartheta_{tt}(t,x,y) = a^2[\vartheta_{xx}(t-\tau,x,y) + \vartheta_{yy}(t-\tau,x,y)];\\ \vartheta(t,x,y) = \varphi(t,x,y), \quad t \in [0;\tau],\ x \in [0,p],\ y \in [0,q];\\ \vartheta(t,0,y) = \vartheta(t,p,y) = 0,\ \vartheta(t,x,0) = \vartheta(t,x,q) = 0\end{gathered} \tag{5}$$

the basis of a single boundary value problem, the function $\underset{0}{w}(t,x,y)$

$$\begin{gathered}w_{tt}t,x,y) = a^2[w_{xx}(t-\tau,x,y) + w_{yy}(t-\tau,x,y)] + f(x,y);\\ w(t,x,y) = 0, \quad t \in [0;\tau],\ x \in [0,p],\ y \in [0,q];\\ w(t,0,y) = w(t,p,y) = 0; \quad w(t,x,0) = w(t,x,q) = 0\end{gathered} \tag{6}$$

we can choose the solutions of the non-singular boundary value problem.

The solution of the basic starting single boundary value problem (5) according to the Foure method, the variables are separated

$$\vartheta(t,x,y)=T(t)X(x)Y(y)$$

we search in the type of multiplication and

$$\underset{\varphi}{\vartheta}(t,x,y)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\left[\underset{1}{T_{kn}}(t)\varphi_{kn}(0)+\underset{t}{T_{kn}}(t)\varphi'_{kn}(0)+\int_0^{\tau}\underset{t}{T_{kn}}(t-s)\varphi''_{kn}(s)ds\right]\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y$$

w will have a resolution in the form, here

$$\underset{1}{T_{kn}}(t)\varphi_{kn}(0)+\underset{t}{T_{kn}}(t)\varphi'_{kn}(0)+\int_0^{\tau}\underset{t}{T_{kn}}(t-s)\varphi''_{kn}(s)ds$$

appear according to $T(t)$ what we mean

$$T''_{kn}(t)+a^2(\lambda_{1k}^2+\lambda_{2k}^2)T_{kn}(t-\tau)=0;$$

$$T_{kn}(t)=\varphi_{kn}(t),\ \ t\in[0,\tau]$$

the solution of the basic initialization problem of the type, where the initialization is a function $\varphi_{kn}(t)$

$$\varphi_{kn}(t)=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q\varphi(t,x,y)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}ydxdy$$

is defined in the type.

The solution of the non-unique boundary value problem (6) can be found in line form based on functions with individual components.

$$w(t,x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}R_{kn}(t)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y,$$

there

$$\underset{0}{w}(t,x,y)=\sum_{k,n=1}^{\infty}(1-\underset{1}{T_{kn}}(t))\frac{f_{kn}}{a^2(\lambda_{1k}^2+\lambda_{2n}^2)}\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y$$

will be here

$$R_{kn}(t)=(1-\underset{1}{T_{kn}}(t))\frac{f_{kn}}{a^2(\lambda_{1k}^2+\lambda_{2n}^2)}$$

Functions $R_{kn}(t)$ to functions

$$R''_{kn}(t) + a^2(\lambda_{1k}^2 + \lambda_{2n}^2)R_{kn}(t-\tau) = f_{kn},$$
$$R_{kn}(t) \equiv 0, \quad t \in [0,\tau], \quad k,n = 1,2,3,...$$

the solution to the basic initialization problem is here

$$f_{kn} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x,y)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}ydxdy.$$

By moving $\underset{\varphi}{\vartheta}(t,x,y)$ and $\underset{0}{w}(t,x,y)$ to their places in (4), we get the following solution of the boundary value problem for the non-single vibration equation of the type (1)–(3) of a single membrane:

$$\underset{\varphi}{u}(t,x,y) = \sum_{k,n=1}^{\infty}\left[\underset{1}{T_{kn}}(t)\varphi_{kn}(0) + \underset{t}{T_{kn}}(t)\varphi'_{kn}(0) + \int_0^\tau \underset{t}{T_{kn}}(t-s)\varphi''_{kn}(s)ds\right]\times$$
$$\times\ \sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y + \sum_{k,n=1}^{\infty}(1-\underset{1}{T_{kn}}(t))\frac{f_{kn}}{a^2(\lambda_{1k}^2+\lambda_{2n}^2)}\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y.$$

REFERENCES

1. **Vladimirov, V. S.** Uravneniya matematicheskoy fiziki / V. S. Vladimirov. – Moscow, 1971.

2. **Mıshkis, A. D.** Lineynıe differencialnıe uravneniya s zapazdıvayushim argumentum / A. D. Mıshkis. – Moscow, 1972.

УДК 378, 510

О РАБОТЕ С ТАЛАНТЛИВЫМИ СТУДЕНТАМИ

И. В. АСТАШОВА
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
С. С. ЕЖАК
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Москва, Россия

В знак высочайшей общественной значимости профессии преподавателя, 2023 г., год 200-летия со дня рождения одного из основателей российской педагогики Константина Дмитриевича Ушинского, президентом России В. В. Путиным был провозглашен Годом Педагога и Наставника. А по инициативе ректора Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова И. В. Лобанова и проректора К. В. Екимовой на базе Высшей школы кибертехнологий, математики и статистики при поддержке ее директора В. А. Титова в университете в этом году была создана математическая учебно-проектная лаборатория «Аналитические методы исследования прикладных задач» (зав. лабораторией д-р физ.-мат. наук, проф. И. В. Асташова).

Для повышения интереса молодежи к науке, в том числе популяризации математики, выявления способных к научным исследованиям талантливых студентов и работе с ними, а также привлечения будущих специалистов для работы в университете, на базе лаборатории был проведен ряд мероприятий: студенческая научно-методическая конференция с подготовкой сборника трудов, математический праздник, летняя выездная школа, прочитаны лекции школьникам.

По результатам работы постоянно действующего межвузовского научного семинара «Качественная теория дифференциальных уравнений для студентов, аспирантов и молодых специалистов» (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова – Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова – Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, руководители: д-р физ.-мат. наук, проф. И. В. Асташова, А. В. Филиновский, секретарь, канд. физ.-мат. наук, доц. С. С. Ежак) была проведена Международная учебно-научная конференция «Качественная теория дифференциальных уравнений и смежные вопросы». В конференции приняли участие 39 человек (студенты, аспиранты, школьники, ППС) из разных учебных заведений: Brno University of Technology, Department of Mathematics; МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедры дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математического анализа, высшей геометрии и топологии, теории динамических систем; МГТУ имени Н. Э. Баумана; РЭУ имени Г. В. Плеханова, Высшая Школа Кибертехнологий, Математики и Статистики; ГБОУ города Москвы «Шуваловская школа № 1448».

На конференции были представлены доклады по математическим направлениям в разных сферах (экономика, физика, IT-технологии) и фундаментальным вопросам математики. Самым юным участником стал Ким Георгий, ученик 10 класса ГБОУ города Москвы «Шуваловская школа № 1448», который совместно со своим руководителем Натальей Брюховой представил доклад на тему «Пособие для учеников 9 математического класса по геометрии: «Стереометрия на пальцах». По результатам работы конференции был опубликован сборник трудов.

В рамках «Математического праздника» для студентов – действующих и потенциальных участников математического кружка подготовки к Олимпиадам (руководитель И. В. Асташова) и всех интересующихся математикой была организована экскурсия в Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, где студентам было предложено прикоснуться к математическим фактам с интересом и пользой. Увлекательную и познавательную экскурсию провел канд. физ.-мат. наук, зав. лабораторией популяризации и пропаганды математики, старший научный сотрудник Андреев Николай Николаевич, первый российский ученый, ставший лауреатом Премии Лилавати – престижной математической премии за выдающийся вклад в популяризацию математики (2022 г.). Участники узнали о магии футбольного мяча, о чипсах формы гиперболического параболоида, окружностях Вилларсо, доске Гальтона, стереографической проекции, геоиде как форме земной поверхности, оптическом свойстве параболы, физическом смысле геодезических, первой шагающей машине, послужившей началом зарождения теории приближения функций. Исследовали мир квадратных уравнений с помощью интерактивной программы. Узнали о принципах, использующихся при изображениях фигур, основанных на применении леммы Сарда и теоремы Уитни. Нашли свою дату рождения в десятичном изображении числа пи. Попробовали свои силы в увлекательных и познавательных головоломках (например, в доказательстве теоремы Пифагора без единой формулы). Участники получили новые интересные знания из истории развития математики в России от П. Л. Чебышева и Н. Н. Лузина до наших дней, узнали или вновь открыли для себя имена великих математиков, как классиков, так и современников. Отдельное внимание было уделено А. Н. Колмогорову, 120-летие которого отмечалось в 2023 г. Студенты получили список книг для погружения в увлекательный мир математики и много новой информации для дальнейших размышлений.

Одни из сентябрьских выходных студенты Высшей школы кибертехнологий, математики и статистики РЭУ имени Г. В. Плеханова провели с двойной пользой – отправились в Выездную летнюю математическую школу по подготовке к студенческим олимпиадам по математике в спортивно-оздоровительный лагерь «Руза». Это был наш первый опыт проведения подобных школ, куда были приглашены не только студенты, принимающие участие в олимпиадах, но и студенты, заинтересованные в углублении своей математической подготовки с целью дальнейшего ее использования в своей научной и практической работе. Мы постарались сделать поездку познавательной, веселой и серьезной одновременно, так чтобы все ее участники смогли повысить свой уровень знаний и навыков, еще раз потренироваться, участвуя в командной работе.

В организации поездки вместе с нами принимали участие выпускники РЭУ Полина Варакута и Артем Фаллер. И, конечно, ее успех был бы невозможен без поддержки и замечательного приема, который нам оказали сотрудники лагеря.

Студенты участвовали в математическом квесте, математических играх, слушали лекции о применении дифференциальных уравнений в актуальных прикладных задачах, участвовали в командной олимпиаде по математике, игре «Что? Где? Когда?» и турнире головоломок. Все участники получили в подарок книги.

Организация олимпиад хорошо знакома всем, поэтому остановимся на организации квеста, который вместе с нами проводился студентами-победителями олимпиад для студентов младших курсов. Несмотря на то, что вопросы были достаточно простые, из-за непривычного формата игры борьба между командами была серьезной и продолжалась более двух часов.

Приведем правила игры и задачи.

Правила

1. Есть 7 станций по одной задаче на каждой.

2. Каждая команда стартует на одной из станций (например, в зависимости от своего номера). У каждой команды есть путевой лист, где отмечается, на каких станциях она побывала.

3. Есть правильный маршрут по станциям (цикл), который известен только организаторам.

4. На станции команда получает условие задачи, решает её и сдаёт ответ дежурному на станции. Дежурный не сообщает команде, верный ли ответ, но ставит в путевом листе отметку о посещении его станции и отправляет на следующую станцию, сообщая ее номер. Давшая правильный ответ команда отправляется на следующую станцию по правильному маршруту, давшая неправильный – на любую другую станцию, кроме той, с которой она пришла на текущую станцию, и той, на которую должна была бы пойти по правильному маршруту. Команда может оказываться на одной и той же станции несколько раз (и каждый раз будет решать там одну и ту же задачу).

5. Цель команды – обойти все 7 станций за время игры (1,5–2 ч) и сделать это за наименьшее количество переходов.

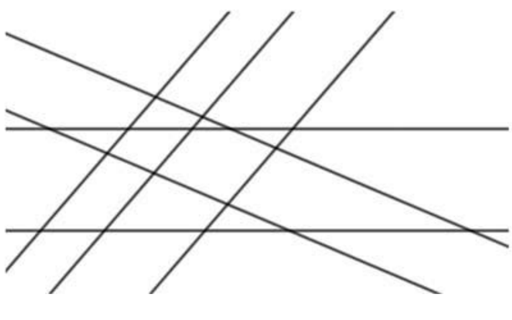
Задачи

1. На танцплощадке собрались 6 юношей и 6 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

2. Клавдия Семёновна сохранила в телефоне семизначный номер своего внука. Однако, позвонив ему, она обнаружила, что записала семизначный номер неправильно – пропустила какую-то одну цифру. Сколько различных номеров придётся обзвонить Клавдии Семёновне, чтобы точно дозвониться до внука?

3. В ряд выписана строка из цифр, причём любые две соседние цифры образуют число, которое делится на 17 или на 23. Первая цифра – 9. Какой может быть 999-я цифра?

4. На рисунке изображено 7 прямых, из которых две пары параллельных и одна тройка параллельных. Сколько есть треугольников, все стороны которых лежат на этих прямых?



5. На день рождения Диане подарили торт, и мама разрезала его на $a \times b \times c$ одинаковых кусочков: a кусков в высоту, b – в ширину, c – в длину. Друзья Дианы съели верхний слой торта, передний, задний и оба слоя с боков торта, а оставшиеся куски торта разбросали по столу. В итоге на столе осталось 4 куска торта. Сколько кусков торта могли съесть друзья Дианы?

6. Грузчики Коля и Петя носят ящики. Переноска маленького ящика занимает у Пети 1 мин, а у Коли 3 мин. Зато большой ящик Коля переносит за 5 мин, а Петя – за 6. Всего им нужно перенести 10 больших и 10 маленьких ящиков. За какое наименьшее время они могут это сделать?

7. В каждой клетке квадрата 3 × 3 лежит монета орлом вверх. Какое наименьшее количество монет нужно перевернуть, чтобы в результате не оказалось трех монет, расположенных в одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали и лежащих одинаково (то есть все три орлом вверх или все три решкой вверх)?

Ответы

1. 720 способами.
2. 64 номера.
3. 4 или 7.
4. 12 треугольников.
5. 28, 32 или 41 кусок.
6. За 33 минуты.
7. 4 монеты.

Правильный маршрут по станциям: 1 → 5 → 6 → 3 → 2 → 4 → 7 → 1.

Студенты поделились самыми тёплыми впечатлениями о мероприятии: «*Поездка в спортивно-оздоровительный лагерь «Руза» стала самым ярким и интересным событием второй недели сентября. Мы участвовали в математических играх, квестах, слушали лекции и просто весело и с пользой проводили время среди преподавателей и других заинтересованных ребят. В первый день прошел математический квест, полный интересных задач, мы тренировались собирать головоломки, слушали лекции о применении дифференциальных уравнений в жизни и многое другое. На второй день нам были предложены для решения олимпиадные задачи, что пробудило во многих желание в дальнейшем принимать участие в олимпиадах. Выезд был прекрасным и интересным времяпрепровождением, все отлично отдохнули, поближе познакомились друг с другом и теперь готовы больше времени посвящать математике*».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. А. Григорьян, С. В. Конягин. – Москва: МГУ, 1987. – 310 с.

2. Олимпиада Ломоносов – 2021–2022 по математике / И. В. Асташова [и др.] // Математика в школе. – 2023. – № 4. – С. 24–34.

3. Открытая Международная студенческая Интернет-олимпиада по математике: учебное пособие / А. А. Колчев [и др.]. – Йошкар-Ола: Стринг, 2020. – 220 с.
4. Математическая составляющая / ред.-сост. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин. – Москва: Математические этюды, 2019. – 367 с.

УДК 378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕК PYTHON ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

О. В. БОНИЦКАЯ, Ю. В. ДУДИНА
Тульский государственный университет
Тула, Россия

Одним из важнейших разделов математики для студентов IT-специальностей является теория вероятностей и математическая статистика. Понимание базовых понятий данного раздела помогает программистам в освоении анализа данных, прогнозирования и машинного обучения, искусственного интеллекта и криптографии. Однако часов на изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» выделяется довольно мало, поэтому удается рассмотреть и заложить знания только основных теорем и положений курса. Поэтому необходимо вносить изменения в образовательный процесс, делая его более быстрым, но без потери качества и углубленности изучения дисциплины.

При обучении будущих IT-специалистов имеет смысл уделить внимание междисциплинарным связям, и при изучении теории вероятностей и математической статистики использовать информационные технологии и языки программирования, основы которых студентам к моменту изучения дисциплины должны быть уже известны. К тому же использование учебных материалов с применением в них информационных технологий позволяет повысить успеваемость студентов [1].

Поэтому представляется целесообразным внедрение в курс лабораторных работ [2, 3], примеры выполнения которых приведены в работе, либо с помощью домашних заданий и самостоятельной работы ознакомить студентов с основными библиотеками Python, предназначенных для обработки данных и оценки параметров статистического распределения, посредством реализации специализированных функций на сервисе Google Colaboratory.

Выбор данного сервиса обусловлен его доступностью, сервис полностью бесплатный. Google Colaboratory предоставляет возможность работать с кодом на языке Python через Jupyter Notebook, не устанавливая на свой компьютер дополнительных программ. Также довольно удобно выполнять проверку работ, студенты открывают доступ преподавателю к своим блокнотам на Google Диске с возможностью вносить изменения и комментарии [4].

Основными библиотеками для подготовки и анализа данных являются NumPy и Pandas. Функции, входящие в указанные библиотеки, позволяют буквально в одну строчку кода выполнять сложные вычисления для большого набора данных. Пример вычисления основных описательных статистик, таких как медиана, мода, среднее и стандартное отклонение, приведен на рис. 1.

```
df = pd.DataFrame(np.random.randint(0, 10, size=(50, 2)),
                  columns=['x', 'y'])
df.head()
```

	x	y
0	0	6
1	6	4
2	4	8
3	5	3
4	7	8

```
df.x.median()
```

```
5.0
```

```
df.x.mode()
```

```
0    6
Name: x, dtype: int64
```

```
df.x.mean()
```

```
4.5
```

```
df.x.std()
```

```
3.0388639123118066
```

Рис. 1. Статистические характеристики

Еще одним вариантом выведения вышеуказанных характеристик является использование функции describe (рис. 2). Также на рисунке показан один из способов нахождения коэффициента корреляции.

```
df.describe()
```

	x	y
count	50.000000	50.000000
mean	4.500000	5.140000
std	3.038864	2.850063
min	0.000000	0.000000
25%	2.000000	3.000000
50%	5.000000	6.000000
75%	7.000000	8.000000
max	9.000000	9.000000

```
df.corr(method='pearson')
```

	x	y
x	1.000000	-0.144915
y	-0.144915	1.000000

Рис. 2. Описательная статистика и корреляция

Для визуализации данных можно использовать библиотеку Matplotlib. С ее помощью можно легко строить различные графики и диаграммы, при этом имеется возможность индивидуальной настройки выводящихся данных: изменение размера, цвета, подписи осей координат и т. д. На рис. 3 представлен вариант построения гистограммы частот одновременно для двух наборов данных и матрицы рассеяния. Визуализация помогает определить закон распределения и выявить зависимость между двумя величинами. Так как данными для рассмотренных в работе примеров являлся массив случайных чисел, то из матрицы рассеяния видно, что корреляции между величинами нет.

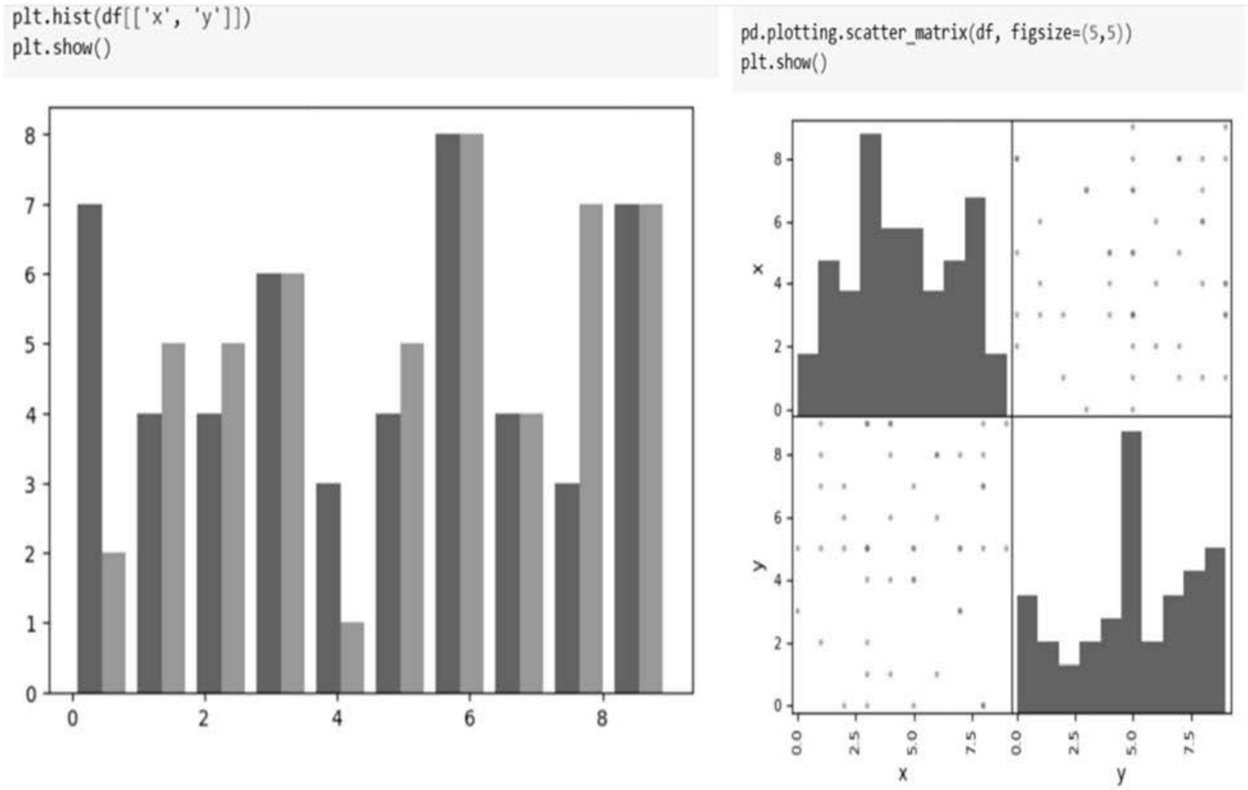


Рис. 3. Визуализация данных

Внедрение в курс лабораторных работ должно стать связующим звеном между теорией вероятностей, статистикой и применением полученных знаний в области анализа данных, прогнозирования, искусственного интеллекта. Включение данного рода деятельности студентов в образовательную программу формирует новые стратегии в изучении дисциплины, ведет к образованию новых инновационных направлений процесса обучения, его преобразованию согласно запросам современного рынка труда в сфере IT.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марченко, И. В.** Анализ эффективности формационных технологий в методических материалах по математике / И. В. Марченко, Л. А. Романович // Проблемы устойчивого раз-

вития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран: сб. науч. ст. IX Междунар. научн.-практ. конф., Могилев, 1 июня – 30 июня 2022 г. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2022. – С. 105–108.

2. Внедрение цифровых технологий в образовательный процесс при изучении теории вероятностей и математической статистики / Л. А. Белая [и др.] // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф., Воронеж, 12–14 дек. 2022 г. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2023. – С. 1282–1285.

3. Формирование цифровых компетенций обучающихся при изучении математической статистики / Л. А. Белая [и др.] // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф., Воронеж, 13–15 дек. 2021 г. – Воронеж: Вэлборн, 2022. – С. 1471–1473.

4. **Попов, А. С.** Использование сервиса Google Colab в дистанционной образовательной среде вуза / А. С. Попов // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы Всерос. науч.-метод. конф. (с междунар. участием), Оренбург, 25–27 янв. 2021 г. – Оренбург: Оренбург. гос. ун-т, 2021. – С. 4282–4286.

УДК 372.8:51

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

А. М. БУТОМА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Существенным условием успешности учения является высокая активность студентов в процессе выполнения учебной работы. Поэтому при проведении практических занятий ставятся задачи вовлечения в учебный процесс как можно больше студентов, развития их заинтересованности изучаемыми разделами математической науки, проявления ими исследовательского подхода к процессу решения заданий. Остановимся на некоторых нетрадиционных формах проведения практических занятий, позволяющих решать перечисленные задачи.

«Групповая дискуссия» – такая форма организации практического занятия, при которой происходит выработка разнообразных решений в условиях спорности обсуждаемого вопроса методом побуждения детального выражения и пояснения своих мыслей у каждого участника дискуссии. Цель проведения данного занятия – постановка проблем, связанных с предложенными студентам математическими задачами, разрешение возникающих спорных вопросов, обсуждение и принятие к сведению различных проектов решений задач и способов их применений [1].

Например, при изучении векторного произведения векторов предлагается задача в следующей формулировке: «Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$, $C(4;5;2)$». После обдумывания условия задачи студенты предлагают варианты решений данной задачи. Предположим, студент A для решения этой задачи предлагает сначала найти длины сторон треугольника ABC, как длины соответствующих векторов, а затем найти площадь треугольника по формуле Герона, а студент B предлагает использовать для нахождения площади данного треугольника векторное произведение. Далее к обсуждению подключаются и другие студенты группы. Таким образом, в процессе дискуссии выбирается наиболее рациональное решение предложенной задачи.

«Совещание» – форма организации групповой учебной деятельности на практическом занятии, которая позволяет выработать решения задач на основе данных, полученных непосредственно от представителей нескольких «мини-групп». Состав и количество таких «мини-групп» подбирается в зависимости от количества студентов, уровня их математической культуры. После получения задания и процесса короткого «совещания» каждая «мини-группа» формулирует свое решение предложенной преподавателем задачи или предлагает идеи по ее решению. Цель данного практического занятия состоит в осуществлении обмена мнениями, активизации математического мышления каждого студента [1].

Указанные формы организации обучения целесообразно применять на таких практических занятиях, на которых рассматривается относительно небольшое количество задач, например, при изучении скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, уравнений прямой линии на плоскости.

При использовании на практических занятиях вышеуказанных форм организации обучения студентам для решения предлагаются задачи как базового, так и повышенного уровня с постепенно нарастающей сложностью. При этом преподавателем оцениваются не только знания, умения и навыки, но, прежде всего, активное участие в учебном процессе – работа у доски, дополнения с места, количество рациональных предложений по решению задачи. Визуальный текущий контроль студентов позволяет получить такие данные о каждом учащемся, как, например, отношение к учебе, степень познавательной активности и сознательности при решении предложенных задач. Результаты наблюдений учитываются для своевременного выявления неуспеваемости, а также в общей итоговой оценке.

Еще одна нестандартная форма организации учебной деятельности на практическом занятии – «Командная игра». Эту форму можно применять как для одного практического занятия, так и для целого блока практических занятий, объединенных общей темой и включающей большое количество примеров и задач, например, при изучении тем «Предел функции в точке и на бесконечности», «Основные методы интегрирования». Цель «командной игры» состоит в формировании повышенной мотивации и интереса к решению математических задач, формировании умений и навыков индивидуального и совместного принятия решений [1].

Конечно же, применение определенных форм организации обучения зависит от конкретной педагогической ситуации. Однако использование преподавателем нестандартных форм организации обучения наряду со стандартными позволяет создавать мотивирующую учебную среду и развивать познавательные потребности студентов, формировать у них навыки умственной деятельности высокого уровня, развивать творческие способности и исследовательские навыки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутома, А. М.** К вопросу использования различных форм практических занятий по математике для студентов вузов / А. М. Бутома // Кулешовские чтения: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 26–27 апр. 2007 г. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2007. – С. 349–351.

УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАК ИДЕОЛОГИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СТРУКТУРНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИКЕ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

«*Все-таки в науке есть что-то захватывающее. Дело пустяковое – количество фактов, а берешь колоссальный дивиденд в виде умозаключений*».

Марк Твен «Жизнь на Миссисипи»

Теория принятия решений (ТПР), зародившись в недрах кибернетики, давно уже превратилась в самостоятельную науку, востребованную во многих областях человеческой деятельности (см., например, [1, 2]). Одним из ее основных понятий является понятие операции. «Под словом «операция» следует понимать организованную деятельность в любой области жизни, объединенную единым замыслом, направленную к достижению определенной цели и имеющую характер повторяемости, т. е. многократности … . В данном определении подчеркиваются две особенности операции: ее целевая направленность и повторяемость» [1, с. 226].

Занимаясь много лет решением математических задач, я, наконец-то, понял, что ТРЗ (мой авторский проект) [3] есть наука, изучающая способы принятия решений в условиях структурно-информационной неопределенности, т. е. когда известна часть всей структуры (остальную часть придется создать) и неполная информация, которую и придется дополнить (воссоздать). Поскольку в ТРЗ речь идет, в первую очередь, о математических задачах, то приведем несколько примеров решения математических задач с анализом моментов принятия решений. Для дальнейшего нам потребуется совершить еще один экскурс в [1, с. 272]: «Задача принятия решений (ЗПР) в условиях неопределенности определялась нами ранее как задача выбора оптимальной стратегии в операции, исход которой помимо стратегий оперирующей стороны и ряда фиксированных факторов (детерминированных или стохастических, или тех и других вместе) зависит также от некоторых неопределенных факторов, неподвластных оперирующей стороне и *неизвестных ей в момент принятия решения*».

Приведем также некоторые сведения из ТРЗ [3]. В качестве первичных (неопределяемых) понятий ТРЗ мы принимаем: объект, субъект, связь, действие. *Операцией* будем называть некоторую последовательность действий (в частности, она может состоять из одного действия). *Ситуацией* будем называть любое множество объектов и связей между ними. Минимальная ситуация содержит два объекта и одну связь. Назовем ее *связной парой*. Под *задачей* будем понимать упорядоченную четверку (Ω, A, B, X), где Ω – носитель задачи, A – условие (множество посылок), B − заключение (множество следствий), X – решение задачи как процесс добычи информации. Подчеркнем, что A, B – это информационные компоненты задачи, в которых речь идет о свойствах Ω, а X – неизвестное, которое надо найти (создать). Ну, а теперь к примерам задач.

Задача 1. Найти количество целых решений неравенства

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}\le 5. \tag{1}$$

Несмотря на то, что я уже добросовестно вычитал теорию квадратного трехчлена, подчеркнув особенную важность процедуры выделения полного квадрата, у учащихся примеры такого типа вызывают некоторую оторопь: знаем, что что-то надо делать, но не знаем как. Начинаются действия методом проб и ошибок: а) приведем к общему знаменателю и раскроем скобки; б) введем замену $x + 2 = t$ и далее по предыдущему сценарию (и опять – тупик); в) дополним левую часть (1) до полного квадрата суммы (– бесполезно) и, наконец; г) дополним правую часть до полного квадрата разности:

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=\left(x^2-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2\right)+\frac{4x^2}{x+2}=$$

$$=\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}\le 5.$$

Здесь уже над принятием решения думать особо не придется: $\frac{x^2}{x+2}=t$ и далее имеем стандартное квадратное неравенство.

Примечание – Многочисленные примеры на применение указанной процедуры имеются в [4, с. 143–146]. Там также приведен пример № 87, вполне аналогичный (1).

Задача 2. Найти произведение корней уравнения

$$x-\sqrt{x^2-100}=\frac{(x-10)^2}{2x+20}. \tag{2}$$

Решение

Первый шаг абсолютно стандартный: находим ОДЗ

$$\begin{cases} x^2-100\ge 0 \\ x\ne -10 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-10)\cup[10;+\infty).$$

А вот теперь предстоит принять решение, что же делать дальше? Поскольку область определения состоит из двух частей, то естественно попытаться разбить решение тоже на две части (интервала).

I. $x\in[10;+\infty)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x = 10 не является корнем уравнения (2). Следовательно, $x\in(10;+\infty)$. Хотя, по-видимому, это лишнее. А вот теперь ключевой момент в ЗПР – и здесь не обойтись без догадки. Введем замену:

$$\sqrt{x-10}-\sqrt{x+10}=z. \tag{3}$$

Именно по этому поводу Ричард Беллман (Bellman), американский математик, профессор математики, электротехники и медицины в Южнокалифорнийском университете утверждал: «В математике изобретательность никогда не будет вытеснена аксиоматикой». Равенство (3) не является непосредственным следствием (2), но два его радикала в (2) все же имеются.

Возводя обе части (3) в квадрат, получаем очень продуктивную связь:

$$2x-2\sqrt{x^2-100}=z^2. \tag{4}$$

Дальнейшее не требует больших умственных усилий, ибо (3) с точностью до двойки, совпадает с левой частью (2).

$$2\left(x-\sqrt{x^2-100}\right)=\frac{(x-10)^2}{x+10} \Rightarrow \left(\sqrt{x-10}-\sqrt{x+10}\right)^2=\frac{(x-10)^2}{x+10}.$$

Откуда

$$\left|\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}\right|=\frac{|x-10|}{\sqrt{x+10}}.$$

Учитывая, что $x \in (10;+\infty)$, получаем

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=\frac{x-10}{\sqrt{x+10}} \Rightarrow x+10-\sqrt{x^2-100}=x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-100}=20 \Rightarrow x^2=500 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{500} \\ x>10 \end{cases} \Rightarrow x_1=\sqrt{500}.$$

II. $x \in (-\infty;-10)$. Опять перед нами ЗПР и опять придется чего-то придумывать. Введем замену:

$$x=-t. \tag{5}$$

Имеем

$$x<-10 \Rightarrow -t<-10 \Rightarrow t>10.$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$-t-\sqrt{t^2-100}=\frac{(-t-10)^2}{2(-t)+20} \Rightarrow t+\sqrt{t^2-100}=\frac{(t+10)^2}{2(t-10)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(t+\sqrt{t^2-100}\right)=\frac{(t+10)^2}{t-10} \Rightarrow \left(\sqrt{t+10}+\sqrt{t-10}\right)^2=\frac{(t+10)^2}{t-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t+10}+\sqrt{t-10}=\frac{t+10}{\sqrt{t-10}} \Rightarrow \sqrt{t^2-100}+t-10=t+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2-100}=20 \Rightarrow t^2=500 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{500} \\ t=-x \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=\sqrt{500} \Rightarrow x_2=-\sqrt{500}.$$

Ответ: $x_1x_2=\sqrt{500}\cdot(-\sqrt{500})=-500.$

Замечания

1. При решении задачи 2 можно обойтись и без изобретательства, если в левой части уравнения использовать формулу сложного радикала.

2. В заключение хочется еще раз подчеркнуть, что ТРЗ можно рассматривать как ТПР в математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория прогнозирования и принятия решений: учебное пособие / С. А. Саркисян [и др.]; под ред. С. А. Саркисяна. – Москва: Высшая школа, 1977. – 351 с.: ил.

2. **Лиоба Верт.** Экономическая психология. Теоретическое и практическое применение: пер. с нем. / Лиоба Верт. – Харьков: Гуманитарный центр, 2013. – 432 с.

3. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач : новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – Москва: БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

4. **Великович, Л. Л.** Подготовка к экзаменам по математике: учебное пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 классов / Л. Л. Великович. – Москва: Народное образование, 2006. – 610 с.

УДК 378.147

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Метод наименьших квадратов (сокращённо МНК) используется в двух контекстах. Во-первых, это важнейший инструмент регрессионного анализа при построении моделей на основе зашумленных экспериментальных данных. Во-вторых, МНК работает как метод аппроксимации, вне связи с математической статистикой.

В классической модели парной линейной регрессии $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ по экспериментальному набору значений $(x_i; y_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$, расчёт коэффициентов модели МНК традиционно производится как решение нормальной системы алгебраических уравнений $\begin{cases} \beta_0 \cdot n + \beta_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ \beta_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \end{cases}$ С учётом принятых в математической статистике обозначений искомое решение удобно получить в форме $\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}; \\ \beta_0 = \overline{y} - \beta_1 \cdot \overline{x}. \end{cases}$

На решаемую задачу сглаживания экспериментальных данных можно смотреть так же, как на решение несовместной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 = y_1; \\ \beta_0 + \beta_1 \cdot x_2 = y_2; \\ \quad \ldots \\ \beta_0 + \beta_1 \cdot x_n = y_n \end{cases}$ или $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ в матричной форме.

Набор $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ – псевдорешение СЛАУ $\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 = y_1; \\ \beta_0 + \beta_1 \cdot x_2 = y_2; \\ \quad \ldots \\ \beta_0 + \beta_1 \cdot x_n = y_n. \end{cases}$

Матричная форма МНК решения поставленной задачи имеет вид: $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$. Здесь $F = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$ – матрица плана эксперимента, построенная в соответствии с видом модели $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. При этом построенная матрица $\left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T$ фактически является псевдообратной для матрицы системы $F = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$. Поскольку указанные матричные операции реализованы в любой системе компьютерной математики, то принципиально задача решена. При этом в некоторых системах компьютерной математики также реализовано явное обращение к псевдообратной матрице.

Проиллюстрируем указанные подходы к решению конкретной задачи с применением систем СКМ: SMath Studio [1], Mathcad. Причины выбора СКМ SMath Studio указаны в [2].

Пусть имеются следующие экспериментальные данные (табл. 1).

Считая, что между величинами x и y существует линейная зависимость, установить параметры этой зависимости.

Расчёты удобно свести в таблицу (табл. 2).

Табл. 1

x_i	17,30	17,08	18,30	18,80	19,20	18,50
y_i	537	534	550	555	560	552

Табл. 2

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	17,3	537	9290,1	299,29
2	17,08	534	9120,72	291,7264
3	18,3	550	10065	334,89
4	18,8	555	10434	353,44
5	19,2	560	10752	368,64
6	18,5	552	10212	342,25
$\sum$	109,18	3288	59873,82	1990,236
	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x^2}$
	18,197	548,000	9978,970	331,706

Согласно МНК, рассчитаем $\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}; \\ \beta_0 = \overline{y} - \beta_1 \cdot \overline{x} \end{cases}$ или $\begin{cases} \beta_1 = 12,252; \\ \beta_0 = 325,055. \end{cases}$

Получим тот же результат в матричной форме. В СКМ SMath Studio последовательно строим матрицы: F^T, $F^T \cdot F$, $\left(F^T \cdot F\right)^{-1}$, $\left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T$ (рис. 1).

$$f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17,3 & 17,08 & 18,3 & 18,8 & 19,2 & 18,5 \end{bmatrix} \qquad f^{\mathrm{T}} \cdot f = \begin{bmatrix} 6 & 109,18 \\ 109,18 & 1990,2364 \end{bmatrix}$$

$$\left(f^{\mathrm{T}} \cdot f\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 94,119 & -5,163 \\ -5,163 & 0,284 \end{bmatrix}$$

$$\left(f^{\mathrm{T}} \cdot f\right)^{-1} \cdot f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4,796 & 5,932 & -0,367 & -2,948 & -5,014 & -1,399 \\ -0,254 & -0,317 & 0,029 & 0,171 & 0,285 & 0,086 \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Построение матриц в СКМ SMath Studio

Теперь искомый набор коэффициентов модели $\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}$ есть результат матричного умножения (рис. 2).

$$\left(f^{\mathrm{T}} \cdot f\right)^{-1} \cdot f^{\mathrm{T}} \cdot y = \begin{bmatrix} 325,055 \\ 12,252 \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Расчет коэффициентов модели в СКМ SMath Studio

В некоторых СКМ генерация псевдообратной матрицы возможна с помощью встроенных функций. В частности, такая функция присутствует в СКМ Mathcad. Результат обращения к ней (и проверка) представлены на рис. 3.

$$\mathrm{geninv}(f) = \begin{pmatrix} 4.796 & 5.932 & -0.367 & -2.948 & -5.014 & -1.399 \\ -0.254 & -0.317 & 0.029 & 0.171 & 0.285 & 0.086 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{geninv}(f)\cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 1.172 \times 10^{-13} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{geninv}(f)\cdot y = \begin{pmatrix} 325.055 \\ 12.252 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Построение псевдообратной матрицы в СКМ Mathcad

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт программы SMath Studio [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме. – Дата доступа: 03.01.2024.

2. **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февр. 2021 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 35–37.

УДК 51:378.14

ИЗУЧЕНИЕ УСЛОВИЙ СТАБИЛЬНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА СРЕДСТВАМИ ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММЫ MATHCAD

Е. Н. ДИК, И. И. БАГАУТДИНОВА
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

В работе изучается стабильность технологического процесса по исследованию номинального значения контролируемого признака. Реализация выдвинутой проблемы происходит средствами прикладной программы Mathcad инженерных расчетов с интерпретацией результатов. Рассмотренная задача изучается магистрами инженерно-технических направлений по дисциплинам «Математические модели и методы в технике», «Математические модели и методы в энергетике». Статистические методы объективно исследуют характер связи и достоверность технологического процесса производства.

При исследовании результатов измерений случайной величины, как правило, неизвестны либо параметры выборки, либо связывающая их закономерность. Оценивает свойства эмпирического ряда – предположение, называемое статистическая гипотеза. Статистическая гипотеза формулирует утверждение о закономерностях исследуемого процесса. Далее рассчитываются статистические величины, по значениям которых делается вывод о принятии или отвержении статистической гипотезы. И, как следствие, делается вывод о закономерностях исследуемого процесса.

Основную, значимую, нулевую гипотезу обозначают H, а другую конкурирующую – K.

Рассмотрим задачу, представляющую часть статистического исследования изучаемого признака. Производственное оборудование может изменить свою конфигурацию, которая приводит к изменению оптимального значения контролируемой величины. В нашем случае случайная величина распределена нормально согласно закону статистики. Поэтому за состоянием технологического процесса ведутся наблюдения. Для проверки стабильности технологического процесса через каждые две смены изучают выборку объема $n = 10$. По результатам каждой смены исследовали две выборки и получили данные контролируемого признака: $(19{,}4\ 19{,}9\ 20{,}2\ 20{,}1\ 20{,}4\ 19{,}8\ 20{,}5\ 19{,}6\ 20{,}3\ 19{,}9)$, $(19{,}2\ 19{,}4\ 19{,}8\ 20{,}0\ 19{,}2\ 19{,}1\ 19{,}5\ 19{,}3\ 19{,}1\ 19{,}7)$.

В математической статистике существует достаточное число способов анализа исследовательской выборки. Сначала проводят первичную обработку данных, затем применяют критерии оценки доверительных интервалов значений случайных величин. В случае исследования многофакторных моделей строят регрессионные и корреляционные зависимости.

Для проверки устойчивости процесса стоит применить гипотезу о равенстве средних значений $H : a_x = a_y$ для малого объема выборок. В качестве конкурирующей принимаем гипотезу $K : a_x \neq a_y$. Для проверки гипотезы по выборочным данным вычислим статистику

$$t = \frac{x_в - y_в}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2\right]}}\sqrt{\frac{nm}{n+m}},$$

где $x_в, y_в$ – средние выборочные контролируемых значений признака; S_x^2, S_y^2 – соответствующие исправленные выборочные дисперсии.

Рассчитываемый параметр t подчиняется распределению Стьюдента с $k = n + m - 2$ степенями свободы. Найдем критическое значение параметра t по таблице, поскольку уровень значимости $\alpha = 0,05$ и число степеней свободы $k = n + m - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$. $t_{кр} = t_{двуст.кр.}(\alpha, k) = t_{двуст.кр.}(0,05;18) \approx 2,10$. При $-t_{кр} < t < t_{кр}$ нулевая гипотеза (о равенстве математических ожиданий двух выборок) принимается, а вне этого интервала гипотеза отвергается (отсутствие равенства математических ожиданий двух выборок).

В силу больших вычислений в формуле наблюдаемого значения критерия, его расчет провели в прикладной математической программе Mathcad. Встроенные функции достаточно быстро ведут расчет требуемых параметров и обработку результатов исследования.

$$X := \begin{pmatrix} 19.4 \\ 19.9 \\ 20.2 \\ 20.1 \\ 20.4 \\ 19.8 \\ 20.5 \\ 19.6 \\ 20.3 \\ 19.9 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 19.2 \\ 19.4 \\ 19.8 \\ 20 \\ 19.2 \\ 19.1 \\ 19.5 \\ 19.3 \\ 19.1 \\ 19.7 \end{pmatrix} \qquad \alpha := 0.1 \qquad n := 10 \qquad m := 10$$

$$t := \frac{mean(X) - mean(Y)}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)\cdot Var(X) + (m-1)\cdot Var(Y)\right]}}\sqrt{\frac{nm}{n+m}};$$

$$\left|t_{набл.}\right| = 3.881; \quad qt(1-\frac{\alpha}{2}, n+m-2) = 2.10 .$$

Полученное значение $\left|t_{набл.}\right| > t_{кр.}$, т. е. $\left|t_{набл.}\right| > qt(1-\frac{\alpha}{2}, n+m-2)$; $3{,}881 > 2{,}10$. Таким образом, полученное значение наблюдаемого критерия $\left|t_{набл.}\right| = 3{,}881$ вышло за пределы критической области $-2{,}1 < t < 2{,}1$, не попало в область принятия нулевой гипотезы о равенстве математических ожиданий двух выборок. Значит, различие выборочных средних $x_в = 20{,}01$, $y_в = 19{,}43$ статистически значимо и необходимо принять конкурирующую гипотезу о том, что средние размеры контролируемого признака, например, диаметров изготовляемых изделий не равны $K : a_x \neq a_y$, т. е. произошла разладка оборудования. Технологический процесс по наблюдению значений контролируемого признака не является стабильным и требует реконструкции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арсланбекова, С. А.** Инструментальное управление учебной познавательной деятельностью студента / С. А. Арсланбекова // Инженерное обеспечение в АПК: науч. сб. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2015. – С. 3–5.

2. **Арсланбекова, С. А.** Блог как форма успешной организации информационного взаимодействия преподавателя и студента в вузе / С. А. Арсланбекова, Л. Н. Титова, Е. П. Жилко // Инновации в образовании. – 2019. – № 4. – С. 122–129.

3. **Арсланбекова, С. А.** О возможности повышения эффективности деятельности учителя / С. А. Арсланбекова // Образование в современной школе. – 2004. – № 4. – С. 47.

4. Повышение качества образования в области цифрового инжиниринга / С. А. Арсланбекова [и др.] // Формирование профессиональной направленности личности специалистов – путь к инновационному развитию России: сб. ст. IV Всерос. науч.-практ. конф. – Пенза, 2022. – С. 18–22.

5. **Арсланбекова, С. А.** Целостный подход к формированию у учащихся представлений о математике как науке / С. А. Арсланбекова // Образование в современной школе. – 2002. – № 6. – С. 22–24.

6. **Арсланбекова, С. А.** Реализация развивающего потенциала естественно-математических дисциплин на основе проектно-технологического подхода (на примере математики): дис. ... канд. пед. наук / С. А. Арсланбекова. – Уфа, 2003.

7. **Арсланбекова, С. А.** Проблемы когнитивной визуализации дидактических объектов / С. А. Арсланбекова, Н. Н. Манько, Ф. Ф. Ардуванова. – Уфа: Башкир. гос. пед. ун-т, 2007.

8. **Арсланбекова, С. А.** Дидактический дизайн – средство развития личности студента / С. А. Арсланбекова // Состояние, проблемы, перспективы АПК: материалы Междунар. науч.-

практ. конф., посвящ. 80-летию ФГОУ ВПО Башкирский ГАУ, Уфа, 30 сент. – 1 окт. 2010 г.: в 2 ч. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2010. – Ч. 2. – С. 11–15.

УДК 517.927.4

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

К. ЖАМУРАТОВ, Х. Р. УМАРОВ, Э. М. ТУРДИМУРОДОВ
Гулистанский государственный университет
Гулистан, Узбекистан

Краевая задача, поставленная для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом в области с подвижной (неизвестной) границей с помощью функции Грина, редуцируется к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений [1]:

$$u_1(x,t)=\int_0^{z_0}\varphi_1(\xi)G_1\left(x,\xi;a_1^2t\right)d\xi+a_1^2\int_0^t G_{1\xi}\left(x,0;a_1^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{x+z(\tau)}{4a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x+z(\tau))^2}{4a_1^2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\right\}d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{x-z(\tau)}{4a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-z(\tau))^2}{4a_1^2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\right\}d\tau+$$

$$+a_1^2\int_0^t q_0^-(\tau)G_1\left(x,z(\tau);a_1^2(t-\tau)\right)d\tau-$$

$$-\bar{\gamma}\int_0^t d\tau\int_0^{z(\tau)}G_1\left(x,\xi;a_1^2(t-\tau)\right)f\left(u_1(\xi,\tau)-1,\tau\right)d\xi; \qquad (1)$$

$$u_2\left(\overline{y},t\right)=erfc\,\frac{\overline{y}}{\sqrt{t}}+\int_0^\infty \varphi_2\left(\xi\right)G_1\left(\overline{y},\xi;t\right)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty z'\left(\tau\right)u_{2\xi}\left(\xi,\tau\right)G_1\left(\overline{y},\xi;t-\tau\right)d\xi; \tag{2}$$

$$u_3\left(\overline{y},t\right)=\int_0^\infty \varphi_2'(\xi)G_2\left(\overline{y},\xi;t\right)d\xi-\int_0^t d\tau\int_0^\infty z'\left(\tau\right)u_3\left(\xi,\tau\right)G_{2\xi}\left(\overline{y},\xi;t-\tau\right)d\xi; \tag{3}$$

$$z'\left(t\right)=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{F\left(t,z,z',u_1,u_{1x},\varphi\right)\Big|_{t=\tau}}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}d\tau. \tag{4}$$

В системе уравнений (1)–(4) неизвестными являются функции u_1, u_2, u_3 и z. $G_1\left(x,\xi;t\right)$ и $G_2\left(x,\xi;t\right)$ так называемые функциями Грина, соответственно, первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности в четверть плоскости определяются формулами

$$G_1\left(x,\xi;t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left\{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t}\right\}-\exp\left\{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4t}\right\}\right];$$

$$G_2\left(x,\xi;t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left\{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t}\right\}-\exp\left\{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4t}\right\}\right];$$

$$\exp z=e^z\;,\; erfc\, z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha\;;\; z\left(t\right)=\frac{l\left(t\right)}{a_2\sqrt{\pi}}\;,$$

где $l\left(t\right)$ – неизвестная подвижная граница; φ_1, φ_2, f, F – данные известные функции; $\overline{y}=\overline{x}-z(t)$, $\overline{x}=\dfrac{x}{a_2\sqrt{T}}$; a_1, a_2 – положительные постоянные, $q_0^-=\left.\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=z(t)-0}$.

Как известно [2], оператор дифференцирования является неограниченным оператором и, следовательно, решение (4) может быть неустойчивым к малым изменениям данных задачи.

Поскольку начальное значение искомой функции $u_1\left(x,t_1-0\right)=\varphi_1\left(x\right)$

и $u_2(x,t_1-0)=\varphi_2(x)$ на отрезке $(t_0,t_1]$ известно лишь приближенно, то функции φ_1 и φ_2 задаются с некоторой погрешностью σ. Учитывая это, будем их в дальнейшем обозначать через φ^σ и систему (1)–(4) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1^\sigma &= A_1(x,t;u_1,u_3,u_4); \\ u_2^\sigma &= A_2(x,t;u_3,u_4); \\ u_3^\sigma &= A_3(x,t;u_3,u_4); \\ u_4^\sigma &= A_4(t,u_1,u_3,u_4), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $u_3=u_{2x}$; $u_4=z'(t)$; $z(t)=z_0+\int\limits_0^t u_4(\tau)d\tau$; A_i $(i=1,2,3,4)$ – правые части уравнений (1)–(4) соответственно.

В силу отмеченного выше относительно уравнения (4) обстоятельства, задача решения системы (1)–(4), вообще говоря, является некорректно поставленной задачей [2].

А. Н. Тихоновым разработан новый подход к решению некорректно поставленных задач, позволяющий строить приближенные решения таких задач. В основе этого метода лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора.

Следует отметить, что если предварительно не исследовать корректность поставленной задачи, в частности устойчивости относительно данных, то нельзя быть уверенным в достоверности полученных результатов. Это особенно важно при численном решении задач.

Пусть φ^σ и φ приближенное и точное значения функции $u(x,t)$ при $t\to t_1-0$ и погрешность в начальных данных удовлетворяет неравенству

$$\left\|\varphi-\varphi^\sigma\right\|_{C^2}=\max\left(\left\|\varphi_1-\varphi_1^\sigma\right\|_{C^2};\left\|\varphi_2-\varphi_2^\sigma\right\|_{C^2}\right)\le\sigma.$$

Осуществим регуляризацию оператора A_4 следующим образом.

Четвертое уравнение системы (5) можно записать в области изображения Лапласа в виде

$$\hat{u}_4=\sqrt{p}\,\hat{F}, \tag{6}$$

где $\hat{u}_4=\int\limits_0^\infty u_4e^{-pt}dt;$ $\hat{F}=\int\limits_0^\infty Fe^{-pt}dt.$

Имея в виду предельное равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}=\sqrt{p},$$

вместо уравнения (6) рассмотрим уравнение

$$\hat{u}_4 = \sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} \cdot \hat{F}; \quad \alpha > 0, \tag{7}$$

совпадающее с (6) при $\alpha \to 0$.

Числовой параметр σ характеризует погрешность исходных данных системы (5). Параметр регуляризации α надо брать согласованным с погрешностью σ. Эта согласованность должна быть такой, чтобы при $\sigma \to 0$, т. е. при стремлении приближенных исходных данных к точному, приближенные регуляризированные решения $u_i^{\alpha\sigma}$ должны стремиться к точному решению u_i системы (5).

Установлена связь между α и σ в следующем виде:

$$\omega(\alpha) = \lambda \cdot \sigma^{\beta}, \tag{8}$$

где $\beta > 0$; $\lambda = \text{const} > 0$; $\omega(\alpha) = \left|1 - \exp\left\{-\alpha\sqrt{p}\right\}\right|$.

Если параметр регуляризации α брать как решение уравнения (8), очевидно, что при $\sigma \to 0$, то $\omega(\alpha) \to 0$ и тем самым

$$\left\|u_4^{\alpha\sigma} - u_4\right\| \to 0.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жамуратов, К.** К построению математической модели задачи фильтрации с учетом испарения / К. Жамуратов, М. Досанов, Ж. Рахмонов // Современные материалы, техника и технология: материалы 2 Междунар. науч.-теорет. конф. – Курск, 2012.

2. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1979.

3. **Умаров, Х. Р.** Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу / Х. Р. Умаров, К. Жамуратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 3 (8-4). – С. 303–307.

4. Search problem on graphs in the presence of limited information about the search point / X. Narjigitov [et al.] // Modern Science and Research. – 2016. – № 2 (5). – P. 1166–1170.

5. **Жамуратов, К.** К приближенному решению одной задачи теории фильтрации для малых значений времени / К. Жамуратов, Х. Р. Умаров, Ж. Т. Курбонов // Научный альманах. – 2021. – № 1–2. – С. 48–53.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XIII ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

XIII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1, 2] состоялась 23 февраля 2023 г. В соревновании приняли участие 40 студентов и аспирантов из 21 вуза Беларуси, Китая, Объединенных Арабских Эмиратов, России и Таджикистана. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчете количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Университета Фудань (Шанхай, Китай) Ху Синцзянь, давший 27 правильных ответов. Второе место занял студент Пекинского университета (Китай) Оуян Минхуэй (20 правильных ответов), третьим стал студент университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия) Захар Яковлев (18 правильных ответов).

Наиболее сложными заданиями тринадцатой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1–3. Задачу 1 решил один участник, а правильные ответы в задачах 2 и 3 смогли дать по два участника.

Задача 1 [3, с. 234]. При каком наибольшем n найдется n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

Решение

Рассмотрим прогрессию, у которой $b_1 = 2^{20}$, а $q = \dfrac{5}{4}$. Поскольку $b_1 > 10^6$, $b_{11} = 56^{10} < 10^7$ и все ее члены от первого до 11-го – целые числа, то 11 первых членов этой прогрессии являются семизначными числами.

Докажем от противного, что прогрессии, содержащей 12 требуемых членов, не существует. Пусть $q = \dfrac{m}{k}$ – знаменатель прогрессии ($\dfrac{m}{k}$ – несократимая дробь), b_1 – ее первый член. Можно считать, что $q > 1$. Иначе рассмотрим 12 этих членов в обратном порядке. Так как $\dfrac{m}{k}$ несократима, а $b_{12} = \dfrac{b_1 m^{11}}{k^{11}}$ – целое число, то b_1 делится на k^{11} и $b_{12} \geq m^{11}$. Если предположить, что $m > 4$, то получим $b_{12} \geq 5^{11} > 10^7$, что противоречит условию. Значит, $m \leq 4$ и наименьшее возможное значение q равно $\dfrac{4}{3}$. Теперь получаем $b_{12} = q^{11} b_1 > 10 b_1 > 10^7$, что противоречит условию.

Ответ: 11.

Задача 2 [4, с. 65]. Найдите сумму решений уравнения

$$\left(\operatorname{tg} x + \sin x\right)^{1/2} + \left(\operatorname{tg} x - \sin x\right)^{1/2} = 2 \operatorname{tg}^{1/2} x \cos x,$$

принадлежащих отрезку $\left[0, 2\pi\right]$.

Решение

Поскольку $\operatorname{tg} x + \sin x = \operatorname{tg} x \left(1 + \cos x\right) = 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \dfrac{x}{2}$, а $\operatorname{tg} x - \sin x = 2 \operatorname{tg} x \sin^2 \dfrac{x}{2}$, данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2} \operatorname{tg}^{1/2} x \left(\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \left|\sin \frac{x}{2}\right| - \sqrt{2} \cos x \right) = 0.$$

Первые решения получим при $\operatorname{tg} x = 0$, $x = k\pi$. Остальные решения нам доставят корни уравнения

$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{2} \cos x,$$

при которых $\operatorname{tg} x > 0$ (случай $\operatorname{tg} x = 0$ уже исследован). Решим вначале последнее уравнение, а затем исключим те решения, которые не удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} x > 0$. Возведем это уравнение в квадрат и, чтобы не нарушить равносильности, добавим ограничение $\cos x \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 1 + \left|\sin x\right| = 2\cos^2 x; \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Так как $2\cos^2 x = 2 - 2\sin^2 x = 2 = 2\left|\sin x\right|^2$, то придем к уравнению

$$2\left|\sin x\right|^2 + \left|\sin x\right| - 1 = 0\,.$$

Решая его, найдем $\left|\sin x\right| = \dfrac{1}{2}$, т. е. $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$. Корнями данного уравнения будут $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$. Если $k = 2n$, то $\cos x = \cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$, если же $k = 2n + 1$, то $\cos x = \cos\left(\pi \pm \dfrac{\pi}{6}\right) < 0$.

Остается вспомнить, что $\operatorname{tg} x < 0$.

Таким образом, решениями исходного уравнения являются $x = k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. Отрезку $\left[0, 2\pi\right]$ принадлежат решения $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$. Их сумма равна $\dfrac{19\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{19\pi}{6}$.

Задача 3 [5, с. 65]. Последовательность $\left(a_n\right)$ задана соотношениями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n \geq 1$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Решение

Заметим, что

$$a_{n+1}^2 - 4 = \left(a_n^2 - 2\right)^2 - 4 = a_n^2\left(a_n^2 - 4\right) = a_n^2 a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2 - 4\right) = \ldots =$$

$$= \left(a_n a_{n-1} \ldots a_1\right)^2 \left(a_1^2 - 4\right) = 21\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^2}$$

для всякого натурального n.

Легко установить, что при всех n $a_n > 2$. Действительно, $a_1 > 2$, а $a_{n+1} = a_n^2 - 2 > 2^2 - 2 = 2$, если только $a_n > 2$. Поэтому

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^2} \le \lim_{n\to\infty} 4 \cdot 2^{-2n} = 0.$$

Следовательно,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(21 + \frac{4}{\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^2}\right) = 21,$$

т. е. искомый предел равен $\sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

Правильный ответ в задании 1 дал Олег Клименко (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). Правильные ответы в задании 2 дали Ху Синцзянь и Константин Пакульневич (университет ИТМО), в задании 3 – Ху Синцзянь и Артем Скворцов (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 4–6, правильные ответы в которых дали 22, 21 и 19 участников соответственно.

Задача 4 [6, с. 34]. Вычислите сумму

$$\left[\frac{2024}{2}\right] + \left[\frac{2025}{4}\right] + \left[\frac{2027}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{2023 + 2^n}{2^{n+1}}\right] + \ldots,$$

где $\left[x\right]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: 2023.

Задача 5 [3, с. 126]. Клетчатая полоска 1×15 занумерована числами 0, 1, …, 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на 1, 2 или 3 поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. При каких начальных положениях фишки при правильной игре выигрывает второй игрок? Запишите в ответ сумму номеров соответствующих клеток.

Ответ: 24.

Задача 6 [7, с. 88]. При каком наименьшем действительном значении λ многочлены $P\left(x\right) = x^3 - \lambda x + 2$ и $Q\left(x\right) = x^2 + \lambda x + 2$ имеют общий корень?

Ответ: -1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.

2. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач XII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 48–52.

3. **Горбачев, Н. В.** Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 560 с.

4. **Ваховский, Е. Б.** Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. – Москва: Наука, 1969. – 496 с.

5. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский [и др.]. – Киев: Вища школа, 1984. – 240 с.

6. **Морозова, Е. А.** Международные математические олимпиады. Задания, решения, итоги: пособие для учащихся / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – Москва: Просвещение, 1976. – 288 с.

7. Сборник задач по алгебре: учебное пособие / Под ред. А. И. Кострикина. – Москва: Наука, 1987. – 352 с.

УДК 511:003.26 (075.8)

ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА»

Е. В. ЗАСИМОВИЧ, Л. А. РОМАНОВИЧ, Н. В. САКОВИЧ
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь
Ж. К. АДАШЕВ
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан
Ташкент, Узбекистан

Разделы «Алгебраические структуры» и «Векторные пространства» – традиционные для курса алгебры физико-математических специальностей университетов. Систематическое изложение теоретических основ этих разделов представлено во многих учебных пособиях, задачный материал также включен в сборники задач по курсу алгебры.

На кафедре математики МГУ имени А. А. Кулешова накоплен многолетний опыт преподавания алгебры и теории чисел, который нашел отражение в [1–4]. Работа в этом направлении продолжается в настоящее время. Отметим некоторые аспекты этой работы и связанные с ними особенности разработки учебно-методических материалов по курсу «Алгебраические структуры и векторные пространства».

Во-первых, в 2022 г. принят общегосударственный классификатор Республики Беларусь «Специальности и квалификации» ОКРБ 011–2022. Вследствие этого возникла необходимость корректировки учебных планов специальностей. Это, в свою очередь, привело к необходимости переработки учебных программ изучаемых дисциплин. Так, в частности, разделы «Алгебраические структуры» и «Векторные пространства» курса алгебры выделены в отдельную дисциплину «Алгебраические структуры и векторные пространства». Естественным образом возникла необходимость в разработке комплекса учебно-методических материалов для организации учебной деятельности студентов по изучению данной дисциплины. Учебное пособие «Алгебраические структуры и векторные пространства» является одним из элементов комплекса учебно-методических материалов для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов. Все содержание пособия разбито на два модуля: «Алгебраические структуры», «Векторные пространства». Каждый модуль состоит из отдельных тем, в которых материал распределен в соответствии с содержанием программы. Теоретический материал по этим темам является абстрактным и, как показывает опыт, довольно сложен для восприятия большинством современных студентов, поэтому для успешного усвоения теоретических знаний приведены примеры, иллюстрирующие абстрактные понятия. В конце каждой темы предложена система упражнений, позволяющая осуществить контроль усвоения материала. Использованные задачи частично составлены авторами, частично заимствованы из [3, 5].

Во-вторых, одним из приоритетных направлений модернизации образования является повышение роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом и усиление ответственности преподавателей за развитие навыков этой работы у студентов. Важной формой организации самостоятельной работы является выполнение и защита индивидуальных расчетно-графических работ. Нами разработаны индивидуальные задания и методические указания к ним по разделам курса: «Алгебраические структуры», «Векторные пространства», «Линейные операторы».

Предложенная систематизация учебно-методических материалов удобна с позиции используемого в работе блочно-модульного подхода в оценке работы студента, которая складывается как из собственно оценки знаний, умений и навыков студента по темам модулей, так и за счет других позиций: посещение занятий, ведение конспекта, выполнение индивидуальных заданий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кольца: методические указания и задачи для самостоятельного решения / Сост. В. Н. Борбат, Н. В. Сакович. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2002. – 32 с.

2. Практические занятия по алгебре и теории чисел: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / М. П. Лельчук [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 302 с.

3. **Радьков, А. М.** Алгебра и теория чисел: атлас для самостоятельной работы: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – 286 с.

4. **Сакович, Н. В.** Сборник индивидуальных заданий по алгебре. Векторные пространства. Евклидовы пространства. Линейные операторы / Н. В. Сакович. – Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2011. – 30 с.

5. **Шнеперман, Л. Б.** Сборник задач по алгебре и теории чисел: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. Б. Шнеперман. – Минск: Вышэйшая школа, 1982. – 223 с.

УДК 378.147

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛЕКЦИИ-ПРОВОКАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ БАКАЛАВРОВ ДИСЦИПЛИНЕ «АЛГЕБРА»

Е. А. КЛЮКИНА
Петрозаводский государственный университет
Петрозаводск, Россия

Актуальность и обоснование выбора образовательной технологии. Лекция по дисциплине «Алгебра» предполагает логически стройное, систематически последовательное и ясное изложение материала. Она экономична по времени благодаря одновременному охвату большого количества студентов (более 100 человек), а именно четырех групп: 22101–22104. Однако традиционная лекция является по сути пассивным методом изучения теоретического материала для обучающихся, поскольку они не могут на протяжении всей лекции удерживать внимание на предмете, следовательно, усваивается небольшая часть преподаваемого материала. Для качественного повышения уровня усвоения лекционного материала студентами начальных курсов используются различные современные варианты лекций, к которым относится так называемая лекция-провокация или лекция с заранее запланированными (преподавателем) ошибками. Эта современная образовательная технология как интерактивная форма проведения лекционного занятия значительно повышает интерес студентов к изучаемому материалу, стимулирует их контролировать в течение лекции предлагаемую преподавателем теоретическую информацию в поисках ошибки [2].

Современная образовательная технология – лекция-провокация применяется с сентября 2023 г. в процессе преподавания дисциплины «Алгебра» обучающимся первого курса по направлениям подготовки бакалавриата: «Прикладная математика и информатика» (профиль «Прикладная математика и информационно-коммуникационные технологии»), «Математика» (профиль «Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях»), «Педагогическое образование» (профили «Образование в предметных областях (Математика и информатика)»). Данная технология используется в ходе изучения следующих разделов дисциплины.

1. Алгебра матриц. Системы n линейных уравнений с n неизвестными.
2. Поле комплексных чисел.
3. Кольцо многочленов: от одной переменной, от нескольких переменных.

Цель и задачи использования технологии. *Целью* применения технологии является научить обучающихся применять теоретические знания из области алгебры по следующим темам: «Системы линейных уравнений, исследование их на совместность. Метод Гаусса. Решение квадратных систем линейных уравнений с тремя неизвестными», «Определители n-го порядка, их свойства и вычисление», «Матричный метод решения системы n линейных уравнений с n неизвестными», «Формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными» (раздел 1); «Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня из него. Корни из единицы» (раздел 2); «Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида» (раздел 3) для решения смоделированных практических задач.

Задачи использования данной технологии:

– знать основные понятия и методы фундаментальной математической дисциплины «Алгебра» по разделам 1–3;

– уметь применять фундаментальные знания, полученные в области алгебры, и использовать их в дальнейшем в профессиональной деятельности;

– уметь осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний (например, выбор метода решения системы линейных уравнений).

Студентам предлагается применить знание из области алгебры для решения смоделированных профессиональных задач, следовательно, ставится развивающая задача: определять и оценивать практические последствия возможных решений задачи.

Поскольку во время лекционного аудиторного занятия студенты работают в группах (деление идет по номеру группы), в связи с чем актуальной является воспитательная задача: работать в команде и осуществлять коммуникацию с остальными участниками образовательного процесса.

Методика реализации технологии. Этапы. На подготовительном этапе преподаватель заранее (за две недели) объявляет студентам, что будет лекция с запланированными ошибками, оговаривается список литературы из рабочей программы дисциплины (РПД) и тема, при изучении которой планируется использовать «замаскированные» преподавателем ошибки во время аудиторного лекционного занятия. Отметим, что такие преднамеренные ошибки затрагивают наиболее типичные случаи применения методов вычисления определителей, решения систем линейных уравнений и т. п., а не касаются малозначимых деталей, при этом число ошибок не должно быть слишком большим.

Во время обучающего этапа осуществляется организация работы студентов во время лекции-провокации в аудитории:

– формирование преподавателем целевой установки у обучающихся, а именно: преподаватель озвучивает цель использования лекции-провокации – качественное приобретение знаний по той теме раздела алгебры, про которую преподаватель информировал их заранее;

– знакомство обучающихся с инструкцией: поиск ошибок студентами осуществляется прямо по ходу лекции последовательно, начиная с группы 22101, заканчивая группой 22104. Преподаватель для каждой группы объявляет начало и затем окончание учебного материала, где может встретиться ошибка. Задает вопрос студентам соответствующей по очереди группы: «Где ошибка?». Если студенты данной группы не увидели ошибку, то очередь переходит к следующей группе. Ошибка исправляется преподавателем на доске с помощью комментариев нашедшей ее группы студентов;

– организация коллективной работы по группам (всего четыре группы: 22101–22104), в случае необходимости преподаватель консультирует обучающихся.

На заключительном этапе преподаватель осуществляет рефлексию над работой обучающихся, дает оценку этой работе, интересуется мнением обучающихся: насколько сложно им было находить «замаскированные» преподавателем ошибки, нужно ли еще усложнить поиск преднамеренных ошибок.

Материалы, средства, техническое оборудование. Теоретический материал, необходимый для организации лекции-провокации, изложен в учебниках по алгебре, указанных в РПД, конспектах лекций преподавателя, текстовых файлах, созданных преподавателем, распространяемых среди студентов заранее через старост групп. Также для изучения студентами темы «Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида» раздела 3 «Кольцо многочленов: от одной переменной, от нескольких переменных» применяется авторская разработка [1].

Результаты использования технологии. Лекции с преднамеренными ошибками показывают хорошие результаты: улучшается дисциплина во время проведения лекционного занятия, повышается заинтересованность студентов 1-го курса в изучении конкретных тем по дисциплине «Алгебра», что положительно отражается на активности в решении поставленных задач и уровне понимания теоретического материала, при этом степень активности при решении задач по изученным во время лекции-провокации темам на практических занятиях по данной дисциплине также заметно возрастает.

В качестве методов наблюдения за успеваемостью студента по вышеуказанным темам разделов 1 и 2 используется проверка знаний при проведении контрольных работ № 1 и 2 соответственно, а по разделу 3 – экзамен.

Так, в период с октября по ноябрь были получены следующие результаты проверки контрольных работ № 1 и 2 по темам разделов с соответствующими номерами: большинство студентов, писавших контрольную работу, успешно справилось с ее заданием. При этом даже у тех немногочисленных студентов, которым требовалось переписать контрольную работу, ошибки связаны не с теорией, а с невнимательностью в вычислениях, ошибках в обозначениях и неточности оформления решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирьянен, И. Т.** Алгебра. Многочлены : учебное пособие / И. Т. Кирьянен, Е. А. Клюкина. – Петрозаводск : ПетрГУ, 2019. – 27 с.

2. **Нечепуренко, Е. В.** Использование лекции с заранее запланированными ошибками при обучении студентов младших курсов / Е. В. Нечепуренко, Э. К. Карлова, К. О. Шарипов // Вестн. КазНМУ. – 2017. – № 3. – С. 399–401.

УДК 512.817:004.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GOOGLE GOLABORATORY И ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON НА ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ»

А. Г. КОЗЛОВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В курсе «Дискретная математика и математическое моделирование» на изучение темы «Булева алгебра» в учебной программе предусмотрено четыре лабораторных работы. В лабораторных работах используется язык программирования Python, на котором разрабатывается соответствующий код для решения поставленной задачи.

На рис. 1 приведен фрагмент кода на Python, который строит таблицу истинности для заданной булевой функции.

```
import pandas as pd
import itertools
# Создаем все возможные комбинации значений переменных x1, x2, и x3 (0/1)
variables = ['x1', 'x2', 'x3']
combinations = list(itertools.product([0, 1], repeat=len(variables)))
# функции для логических выражений
def expression1(x1, x2):
    return x1 or x2
def expression2(x1, x2, x3):
    return (x1 or x2) == x3
def expression3(x1, x2):
    return x1 and x2
def expression4(x1, x2, x3):
    return (x1 and x2) or x3
def expression5(x1, x2, x3):
    return ((x1 or x2) == x3) <= ((x1 and x2) or x3)
```

Рис. 1. Фрагмент кода на Python

Отчеты по лабораторным работам формируются в Google Colaboratory (Golab), при этом используется LaTex и язык текстовой разметки Markdown (рис. 2).

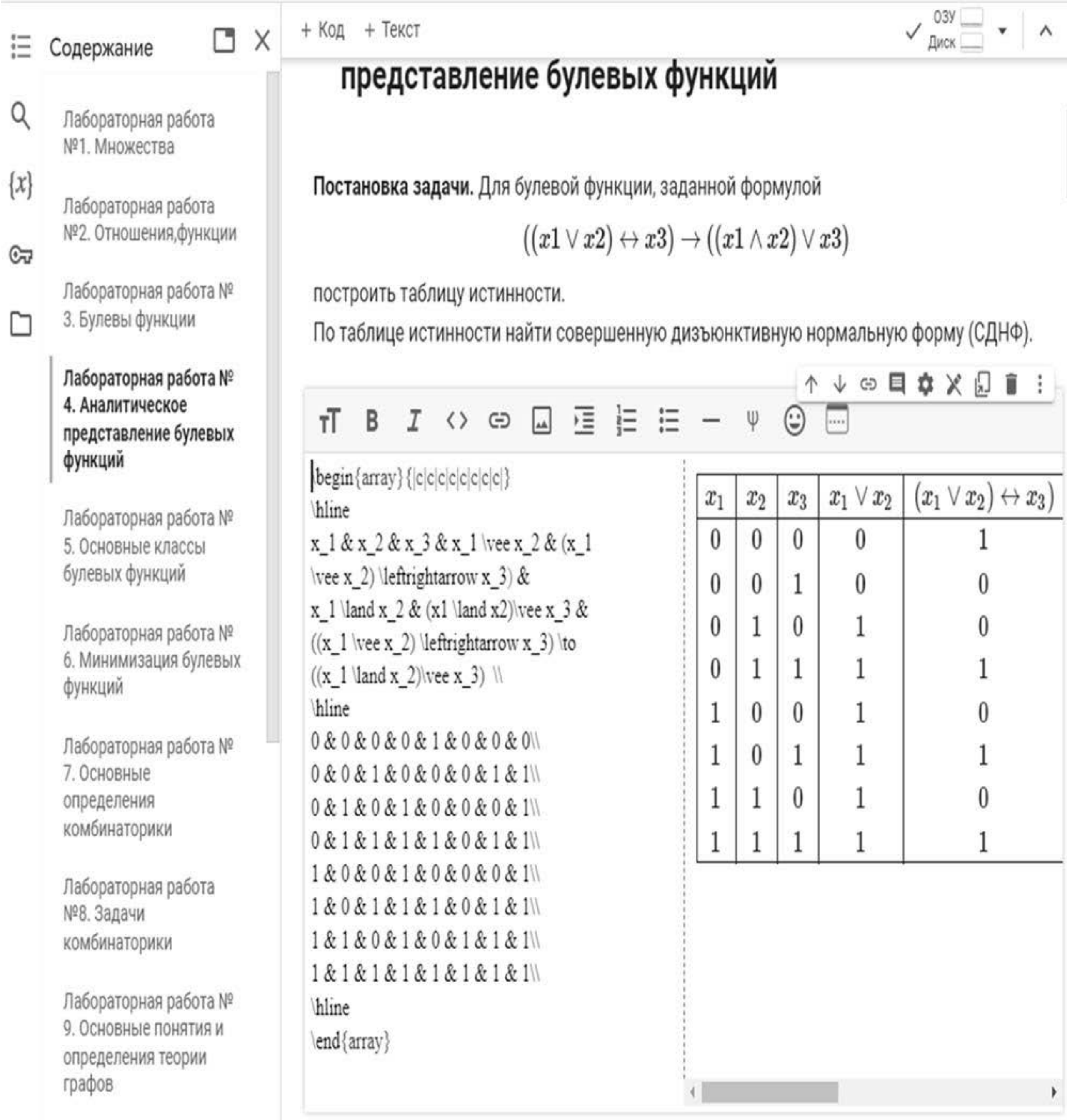


Рис. 2. Фрагмент отчета по лабораторной работе

Доступ к отчетам предоставляется преподавателю посредством функции «Поделиться», реализованной в Google Диске. Преподаватель получает уведомление на электронную почту и может в любой момент проконтролировать выполнения лабораторных работ, оставить комментарий, если есть неточности (рис. 3).

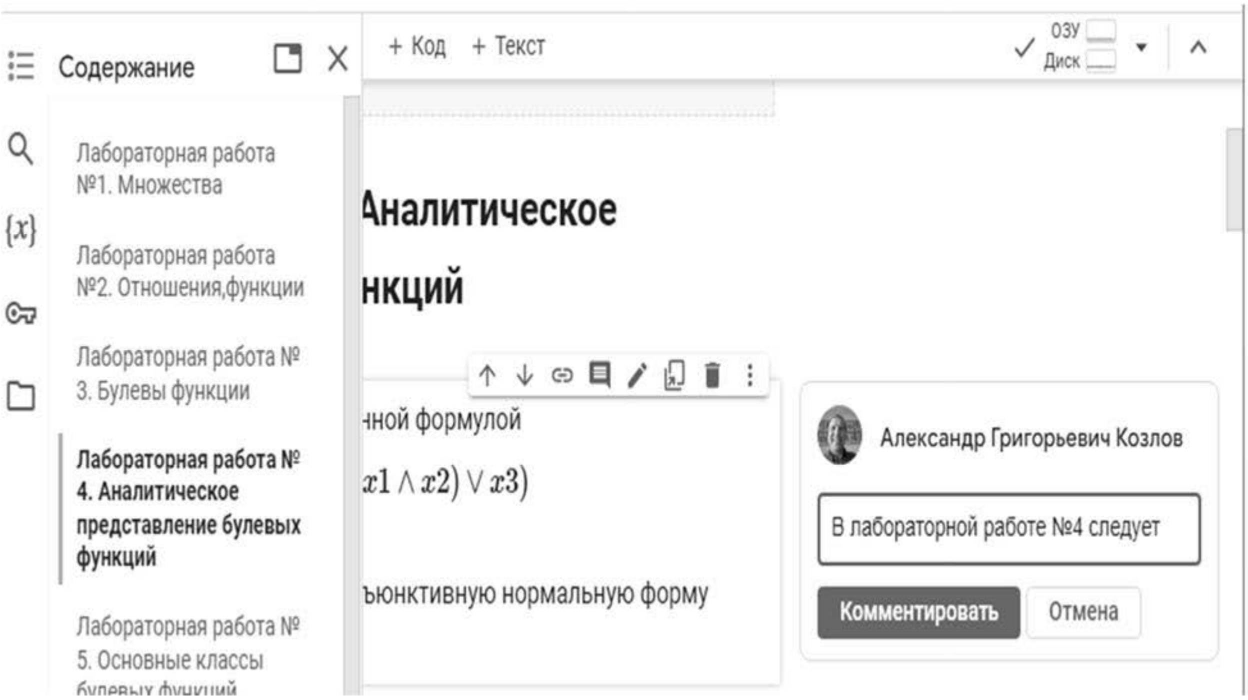


Рис. 3. Комментарий преподавателя

УДК 378

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. А. КУЗНЕЦОВА, О. В. БОНИЦКАЯ, О. В. ИНЧЕНКО
Тульский государственный университет
Тула, Россия

В настоящее время достижения в области математики и современной вычислительной техники находят широкое применение в самых разных областях жизни и деятельности человека. Накоплен достаточный опыт постановки и решения многих задач с помощью математических методов, и каждый современный специалист должен уметь применять эти методы в своей профессиональной деятельности. В математическом анализе часто встречаются задачи, точное аналитическое решение которых получить не удаётся. К таким задачам относятся, например, задачи, связанные с вычислением определенных интегралов. Тогда для их приближенного вычисления применяются, в том числе, численные методы. В этом случае задача состоит в применении некоторого алгоритма, который позволяет за конечное число шагов вычислить определенный интеграл и обеспечить необходимую точность вычислений. Такой процесс может оказаться весьма длительным и трудоемким. Применение математических пакетов в таких случаях призвано обеспечить получение быстрого и надежного результата. За специалистом остается лишь анализ полученных результатов и их интерпретация в условия решаемой задачи.

Во втором семестре в курсе математического анализа, рассчитанного на 24 ч аудиторной нагрузки, из которой 8 ч отведено на лекционные занятия и 16 ч на практические, дополнительно предусмотрена курсовая работа. Цель выполнения курсовой работы – углубленное изучение теоретического материала и отработка практических навыков применения методов качественного исследования и программных пакетов при вычислении определенных и несобственных интегралов, а именно использование стандартных функций, заложенных в математическом пакете wxMaxima.

Например, для вычисления приближенного значения интегралов используются методы численного интегрирования Ньютона – Котеса. В качестве заданий предлагается вычислить определенный интеграл аналитически, а также с помощью методов левых, правых, средних прямоугольников, метода трапеций и метода Симпсона с заданной точностью.

Пример выполнения одного из заданий. С помощью метода левых прямоугольников вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{0}(x+1)^2\sin 3x dx$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

```
(%i6) f(x):=  (x+1)^2·sin(3·x);
      numer : true;
      a: −1; b : 0;
      epsilon : 0.001;
      romberg(f(x), x, a, b);
(%o1) f(x):=(x+1)^2 sin(3 x)
(%o2) true
(%o3) −1
(%o4) 0
(%o5) 0.001
(%o6) −0.1859264653027625

(%i12) Jl(n):=ev((b−a)/n·sum(f(a+(b−a)/n·i), i, 0, n−1),numer);
       epsilon : 0.001;
       n : 1;while abs(Jl(n)−Jl(2·n)) > epsilon do n : n+1;
       n;
       Jl(2·n);
```

$$(\%o7)\quad Jl(n):=ev\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right), numer\right)$$

```
(%o8) 0.001
(%o9) 1
(%o10) done
(%o11) 14
(%o12) −0.185607624168928
```

Для определения количества отрезков разбиения, обеспечивающих заданную точность, был организован цикл. Получили $n = 14$, а результат вычисления интеграла: –0.185607624168928.

В качестве вывода необходимо провести сравнительный анализ использованных методов.

Такой подход к изучению методов вычисления определенных интегралов позволит сформировать у студентов понимание математического содержания конкретного метода (границ его применимости, погрешности и т. д.) и умение использовать современные программные средства. При этом весьма важным оказывается выбор базового программного средства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 672 с.

2. Применение цифровых технологий при изучении аналитической геометрии / Л. А. Белая [и др.] // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2023. – С. 1286–1290.

3. Применение цифровых технологий в математике / Л. А. Белая [и др.] // Опорный образовательный центр: сб. кейсов за 2021 год по развитию цифровых компетенций обучающихся по программам среднего профессионального и высшего образования. – Казань, 2021. – С. 93–96.

УДК 372.8

РАЗВИТИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ МОБИЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ[1]

К. Г. ЛЫКОВА
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
Елец, Россия

Одним из стратегических приоритетов государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» до 2030 г. выступает подготовка образованной, целеустремленной личности, способной критически мыслить, адекватно оценивать значимость проблем, принимать решения в условиях неопределенности, готовой к сотрудничеству и коллаборациям, отличающейся высокой мотивацией и инициативностью. Фундаментальной основой для развития этих способностей выступает физико-математическое образование, обладающее значи-

[1]Исследование выполнено в рамках работы ФИП «Развитие интеллектуальной мобильности обучающихся в цифровой образовательной среде университета»

мым потенциалом для совершенствования дидактических решений в направлении проявления такого важного образовательного эффекта, как интеллектуальная мобильность. Интегративное обучение математике, физике, информатике способствует взаимовлиянию и взаимообогащению различных областей знания, различных способов познания действительности, обеспечивая эффективное развитие способностей обучающегося к инноватизации, гибкому реагированию на изменяющиеся условия деятельности, быстрой адаптации к ним.

Для повышения качества обучения математики, физики, информатики необходима трансформация образовательного процесса с учетом глобальных трендов современного информационного общества, выражающихся в повсеместном внедрении цифровых технологий и предъявлении новых требований к обучающимся в плане наличия у них широкого спектра интеллектуальных умений, способностей креативно и самостоятельно мыслить, гибко реагировать на изменяющиеся условия жизнедеятельности, а также готовности к непрерывному личностному росту. Достижение указанных ориентиров предполагает поиск новых дидактических решений и эффективных практик развития у обучающихся такого важного качества, как интеллектуальная мобильность. Интеллектуальную мобильность следует рассматривать как интегрированное личностное образование, включающее интеллектуальные умения, творческие способности и личностные качества, дающие возможность обучаемому оптимальным образом находить, обрабатывать и применять информацию, принимать решения и оперативно действовать в стандартных и нестандартных ситуациях, выбирать наиболее эффективные подходы выполнения учебных задач.

Формирование интеллектуальной мобильности в обучающихся в цифровой образовательной среде приводит к улучшению полезных качеств личностного развития обучающихся, способствующих восприимчивости мировых тенденций и готовности им противостоять. Одним из эффектов данного качества является повышение проектно-исследовательской и конструкторской деятельности школьников и студентов средствами интегративного цифровизированного обучения математике, физике, информатике. Понятие интеллектуальной мобильности имеет сложный, многоаспектный характер, требует не только глубоких теоретических исследований, но и обоснованного практического решения.

Цифровая трансформация физико-математического образования, выражающаяся в повсеместном внедрении в учебный процесс цифровых технологий, обучающих и моделирующих программ, интерактивных модулей, виртуальных лабораторий, открывает широкие возможности для развития интеллектуальной мобильности, предоставляя инструменты для оперативного поиска и анализа растущего потока информации, побуждая к продуцированию новых идей и эффективному восприятию нововведений, оперативной смене видов и форм интеллектуальной деятельности.

Таким образом, поиск эффективных практик совершенствования возможностей интегративного цифровизированного обучения как средства развития интеллектуальной мобильности является актуальнейшей задачей современной дидактики. В качестве инструмента решения поставленной задачи является разработка модели развития интеллектуальной мобильности обучающихся, которая включает в свой состав целевой, содержательный, организационно-процессуальный и результативный компоненты, а также должна быть интегрирована в образовательную систему «школа – вуз» на основе консолидации развивающего потенциала различных учебных дисциплин (математики, физики, информатики) для обеспечения в образовательном процессе межпредметной интеграции содержания, современных методик и технологий преподавания.

Реализация такой модели развития интеллектуальной мобильности обучающихся будет способствовать совершенствованию учебно-методического и организационного обеспечения системы образования за счет внедрения цифрового формата развивающих образовательных технологий для ведения проектно-исследовательской и конструкторской деятельности школьников и студентов. Внедрение данной модели развития интеллектуальной мобильности позволит получить новый опыт обучения математике, физике, информатике в современной цифровой среде, раскрывающий многогранные междисциплинарные возможности в плане совершенствования интеллектуальной сферы личности.

Ключевым мероприятием в рамках данной модели является проведение региональной олимпиады «Вектор развития», основными целями которой являются развитие познавательного интереса у обучающихся СПО и 10–11 классов образовательных учреждений к углубленному изучению математики, информатики, физики; популяризация престижности знаний в точных науках среди молодого поколения; повышение математической (и в частности, финансовой), информационной и функциональной (через призму физики) грамотности обучающихся; создание оптимальных условий для выявления одаренных и талантливых школьников.

Практическая значимость реализуемой модели проявляется в улучшении качества образования в сфере технических наук за счет повышения уровня интеллектуальной мобильности обучающегося, подготовки совокупности методического инструментария, влияния цифровой образовательной среды на обучающегося, проявляющегося в углубленном изучении профильных предметов (математики, физики, информатики) с использованием новейших учебных ресурсов, формировании целенаправленной профессиональной ориентации, стимулирования к дальнейшему получению образования в университете.

Таким образом, результаты внедрения модели развития интеллектуальной мобильности обучающихся в цифровой образовательной среде могут быть использованы при освоении образовательных программ в системе общего, среднего профессионального образования с ориентацией обучающихся на освоение дисциплин технического профиля, расширяя их доступ к основам научной деятельности, работе в цифровой образовательной среде.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shen, W.** Reconceptualising international academic mobility in the global knowledge system: towards a new research agenda / W. Shen, X. Xu, X. Wang // Higher Education. – 2022. – № 84 (6). – P. 1317–1342.

2. **Куприяновский, В. П.** Интеллектуальная мобильность в цифровой экономике / В. П. Куприяновский // International Journal of Open Information Technologies. – 2017. – № 2. – С. 46–63.

3. **Манаева, Н. Н.** Формирование информационной мобильности студентов университета: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Н. Н. Манаева; Оренбург. гос. ун-т. – Оренбург, 2017. – 24 с.

4. Международная академическая мобильность в России: тенденции, виды, государственное стимулирование / С. В. Рязанцев [и др.] // Экономика региона. – 2019. – № 15 (2). – С. 420–435.

5. **Мочалов, Д. В.** Формирование интеллектуальной мобильности молодежи в современном обществе / Д. В. Мочалов // IV Нугаевские чтения: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Казань: ИГМА-Пресс, 2011. – С. 416–419.

УДК 378.147

ЦИФРОВОЙ ДВОЙНИК УЧЕБНОГО КУРСА ДИСЦИПЛИНЫ КАК СПОСОБ ОРГАНИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Цифровизация всех процессов жизнедеятельности требует от всех субъектов симметричной реакции, при этом сфера образования, как один из наиболее важных социальных институтов, должна реагировать на вызовы в числе первых [1]. В последние несколько лет в преподавании активно используются цифровые технологии: электронные лекции, презентации, интерактивные онлайн-курсы и т. д. Преподаватели разрабатывают электронные учебно-методические комплексы, однако ускоряющийся прогресс в цифровой отрасли требует новых, технологичных решений в сфере образования.

Технологические возможности, доступные широкой педагогической аудитории, позволяют создавать цифровые двойники (Digital twins) форм обучения – лекций, практических, а также лабораторных занятий. Роль преподавателя в аудитории колоссальна. Он несет информацию, стимулирует, развивает, мотивирует познавательный интерес обучающихся [2]. Однако в большинстве случаев образовательный процесс за пределами аудитории оказывается без надлежащего контроля и управления, хотя современная парадигма высшего образования подразумевает преимущественно управляемую самостоятельную работу обучающихся во внеучебное время [3, 4].

Решением данной проблемы может служить так называемый цифровой двойник учебного курса дисциплины. В литературе встречается множество определений данного понятия. В целях настоящей работы будем использовать определение, введенное в [5]: цифровой двойник – это цифровое представление активного уникального продукта или уникальной системы продуктов и услуг, которое включает в себя его выбранные характеристики, свойства, условия и поведение с помощью моделей, информации, а также данных в рамках одного или даже нескольких этапов жизненного цикла.

Цифровой двойник учебного курса позволяет обучающимся получить, закрепить, а также отработать полученные знания и навыки на практике при помощи упражнений, тестов, тренажеров; использовать информационный материал в большем объеме, тем самым экономить на учебном занятии время, разнообразить формы работы; автоматизировать шаблонную работу преподавателя. Преподаватель с помощью цифрового двойника мотивирует обучающихся на познавательную деятельность, отслеживает активность обучающихся, контролирует их успеваемость. Цифровой дойник курса может быть скопирован и модифицирован преподавателем при необходимости [6].

Для конструирования цифрового двойника требуется соответствующая информационная инфраструктура и программное обеспечение. В Белорусско-Российском университете созданы все необходимые условия для реализации подобной концепции: мощное серверное оборудование и высокоскоростное сетевое оборудование позволяет организовать бесперебойный широкополосный доступ к информационным ресурсам университета, а электронная образовательная среда Moodle (ЭОС Moodle) последней версии дает возможность реализовать интерактивные элементы цифрового двойника учебного курса.

Для создания цифрового двойника лекционного занятия необходимо иметь полнотекстовый конспект лекции с необходимыми дополнительными (в том числе интерактивными) материалами, ее педагогический сценарий, по возможности видеозапись лекции (с помощью прозрачной доски или графического планшета). В ЭОС Moodle цифровой двойник лекции реализуется с помощью ресурса «Элемент курса Лекция». Данный элемент курса позволяет настроить очередность фрагментов учебного материала, включающего текстовую информацию или видеофрагменты, при этом переходы между фрагментами могут быть нелинейными, в зависимости от правильности ответа на задание, таким образом можно управлять изучением нового материала, отправляя обучающегося еще раз ознакомиться с фрагментом материала. Такое построение интерактивной лекции дает возможность симулировать лекцию-беседу с ответами на вопросы преподавателя, однако данный формат обладает преимуществом, т. к. позволяет неоднократное повторение неправильных ответов обучающимся. При разработке цифрового двойника лекции необходимо особое внимание обратить на педагогический сценарий, поскольку именно интерактивная структура лекции обеспечивает максимальный уровень познавательной активности обучающихся.

Цифровой двойник практического занятия создается с помощью ресурсов «Элемент курса Семинар», «Элемент курса Задание» и «Элемент курса Тест». Каждое практическое занятие подразумевает выполнение определенного набора заданий по теме занятия. Успешность выполнения оценивается преподавателем. Ресурс «Элемент курса Семинар» позволяет организовать выполнение заданий с отправкой ответов в виде любого файла, а также оценивание правильности выполнения преподавателем и участниками учебной группы. Ресурс «Элемент курса Задание» позволяет выполнить задание и отправить ответ в виде файла любого типа, проверка разрешена только преподавателю.

ЭОС Moodle имеет достаточно мощный инструментарий разработки тестовых заданий, включающий различные типы тестов, в том числе и ряд интерактивных форматов, работающих по технологии drag-n-drop. Тестовое задание, включающее различные типы вопросов, позволяет произвести оценку сформированных навыков по итогам практического занятия.

Были разработаны цифровые двойники курсов «Теория вероятностей» и «Высшая математика» для обучающихся специальностей 6-05-0411-02 «Финансы и кредит» и 6-05-0311-02 «Экономика и управление на предприятии». Эксперимент по внедрению разработки проводился в течение учебного семестра. Системный подход в изучении дисциплин с использованием цифрового двойника показал высокие результаты текущей и промежуточной аттестации обучающихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкий, И. И.** Проблемы цифровизации в образовании / И. И. Маковецкий // Цифровая экономика, информационное общество и информационная безопасность: основные социально-экономический аспекты: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Санкт-Петербург: СПбУТУиЭ, 2021. – С. 152–156.

2. **Федулов, Ю. П.** Организация учебной деятельности в вузе и методика преподавания в высшей школе: учебное пособие / Ю. П. Федулов. – Краснодар: КубГАУ, 2019. – 155 с.

3. **Колдина, М. И.** Управление самостоятельной работой студентов вуза / М. И. Колдина, О. И. Ваганова, О. В. Трутанова // Карельский науч. журн. – 2017. – Т. 6, № 3 (20). – С. 39–42.

4. **Овчинникова, Л. П.** Модель самоуправляемой работы студентов / Л. П. Овчинникова // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6 (ч. 5). – С. 1253–1256.

5. **Stark, R.** Digital Twin. CIRP Encyclopedia of Production Engineering / R. Stark, T. Damerau. – 2019. – Vol. 66. – P. 1–8.

6. **Титова, А. В.** Цифровые двойники в повышении качества образовательных услуг / А. В. Титова, М. Ю. Сучкова // Технико-технологические проблемы сервиса. – 2021. – № 4 (58). – С. 57–63.

УДК 378.147

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ MOODLE

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В Белорусско-Российском университете при реализации образовательного процесса широко используются информационно-коммуникационные технологии, что регламентировано рядом нормативных актов университета. При этом в качестве электронной образовательной среды выбрана система дистанционного обучения Moodle (СДО Moodle) [1, 2]. СДО Moodle имеет достаточно широкий функционал для разработки электронных курсов учебных дисциплин, при этом функционал постоянно расширяется энтузиастами онлайн-образования.

В настоящее время преподавателями Белорусско-Российского университета разработано более 5000 электронных курсов, используются различные элементы курсов, в том числе и «Элемент курса Тест». К преобладающим типам относятся вопросы типов «Множественный выбор», «Короткий ответ», «Короткий числовой ответ», «Вычисляемый вопрос». Однако процесс добавления вопросов в СДО Moodle остается достаточно трудоемкой задачей, особенно в случае, если текст вопроса или ответы содержат формулы или изображения.

В целях решения данной проблемы в СДО Moodle университета внедрен комплект расширений, позволяющих импортировать ряд элементов курса из файлов MS Word.

Разработчик тестовых заданий и лекций должен использовать MS Word LTSC или Word 365, специальные шаблоны и макросы, поставляемые разработчиками http://www.moodle2word.net/, а также специальную разметку исходных файлов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкий, И. И.** Автоматизация анализа программного кода в среде Moodle / И. И. Маковецкий, О. А. Маковецкая // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 70–71.

2. **Грамбовская, Л. В.** Проблемы удаленного онлайн-тестирования по математике с применением LMS MOODLE [Электронный ресурс] / Л. В. Грамбовская, Л. А. Баданина // Междунар. науч.-исслед. журн. – 2023. – № 5 (131). – Режим доступа: https://research-journal.org/archive/5-131-2023-may/10.23670/IRJ.2023.131.41. – Дата доступа: 14.01.2024.

УДК 378.146:519.2(004.4)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MS MOODLE ПРИ ПРОВЕДЕНИИ КОЛЛОКВИУМА

И. В. МАРЧЕНКО
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

В большинстве словарей под коллоквиумом понимается «одна из форм учебных занятий, беседа преподавателя с учащимися (обычно в вузах) для выяснения знаний» [1, с. 123]. Коллоквиум по математическим дисциплинам традиционно проводился в виде устного мини-экзамена по теоретической части учебного материала. Кроме того, такая форма занятий была обязательна, входила в учебную нагрузку преподавателя, а число коллоквиумов рассчитывалось в зависимости от количества лекций по изучаемому курсу. Достоинства коллоквиума состояли в том, что студент при подготовке к нему изучал теоретический материал в более крупных порциях по сравнению с одним занятием; имел представление о том, как будет проходить предстоящий экзамен; более ответственно готовился к занятиям в течение семестра и др.

В настоящее время формы контроля над учебной деятельностью обучаемого в течение семестра выбираются преподавателем самостоятельно, они не отражаются в его учебной нагрузке и, по сути, проверка всех контрольных мероприятий проводится в личное время. Поэтому такая времязатратная форма, как коллоквиум, часто становится физически невозможна.

Однако хотелось бы в каком-то приближении сохранить те преимущества, которые давал коллоквиум. В этом отношении просто тестовый опрос по теоретическому материалу значительно проигрывает в связи с тем, что не способен выявить глубину понимания определенных тем и в целом может быть успешно пройден при обычном заучивании.

Исходя из вышеизложенных соображений, для специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика» были разработаны вопросы коллоквиума по математической статистике, который проводился с использованием образовательной системы Moodle. При этом соблюдались все принципы разработки тестов [2, с. 7–8]. В вопросах использовались следующие формы тестовых заданий.

1. Задания с выбором одного или нескольких правильных ответов из числа предложенных.

Пример 1 – Выборка называется повторной, если (выберите один ответ):

а) элементы повторяются определенное число раз;

б) при выборе элементов выполняют одни и те же действия;

в) выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность перед выбором следующего элемента;

г) в ней есть повторяющиеся значения.

Пример 2 – Выборочное среднее вычисляется по формулам (выберите несколько ответов):

а) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$;

б) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$;

в) $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mu_i$;

г) $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$.

2. Задания открытой формы, где ответ дописывается тестируемым.

Пример – Статистическая гипотеза называется параметрической, если … .

3. Задания на установление соответствия.

Пример – Определите верные и неверные утверждения:

– если коэффициент корреляции равен 0, то между признаками нет зависимости (верно/неверно);

– коэффициент корреляции равен 1 в случае линейной зависимости между признаками (верно/неверно);

– при отсутствии линейной зависимости между случайными величинами X и Y линии регрессии параллельны координатным осям (верно/неверно).

Коллоквиум студенты проходили вне аудитории в определенное время. На ответы отводилось два академических часа. Каждый вариант включал 10 вопросов по следующим темам: описательная статистика; числовые характеристики; статистические оценки; гипотетический метод; корреляционно-регрессионный анализ.

Проведенный сравнительный анализ отметок коллоквиума с отметками на устном экзамене дает следующие результаты. Для группы из 14 человек коэффициент корреляции равен 0,802. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ наблюдаемое значение критерия $t_{набл} = 4{,}62$, критическое значение критерия $t_{кр} = t_{0{,}05;12} = 2{,}18$ позволяют сделать вывод о том, что коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. между отметками за коллоквиум и за экзамен существует линейная зависимость.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Педагогический энциклопедический словарь / Под ред. Б. М. Бим-Бада. – Москва: Большая Рос. энцикл., 2003. – 528 с.

2. **Сидорик, В. В.** Теория и практика разработки тестовых заданий / В. В. Сидорик, О. И. Чичко. – Минск: БНТУ, 2010. – 49 с.

УДК 378.6

ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

Э. Ф. МУРЗИНА
Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

При изучении курса математики в аграрном вузе ориентировка студентов-агроинженеров в усвоении знаний курса должна быть направлена на применение их для решения задач производственного характера, ведь целью освоения дисциплины является осуществление фундаментальной профессионально ориентированной математической подготовки студентов, на базе которой в последующие годы обучения будет проходить специализация будущего профессионала в области цифрового инжиниринга в АПК. Существуют организационные проблемы в реализации такого обучения, т. к. математические и технические (профессиональные) знания представляют собой изолированные элементы в учебном процессе и, следовательно, стратегические меры по установлению соотношений между этими элементами являются неотъемлемой необходимостью.

Предлагаем строить математическую подготовку специалистов на принципах поэтапности и профессиональной направленности. Принцип поэтапности предполагает постепенное включение в изучаемое математическое содержание информации, имеющей определенное развивающее и научно-методическое значение для будущих специалистов [1, с. 44]. Профессиональная направленность определяет соответствие между потребностями направления подготовки и содержанием учебного курса и обеспечивает создание в курсах математики запаса концептуальных систем, математических моделей и методов исследования, которые широко и в достаточной мере используются при дальнейшем изучении дисциплины профессионального цикла и выполнении ВКР [2, с. 69].

При изучении математики детально изучаются следующие разделы.

1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Студент должен понимать систему координат на плоскости и в пространстве, преобразования координат; уметь определять линии первого и второго порядков; знать основные задачи прямой линии на плоскости, задачи плоскостей и прямых в пространстве; знать понятие касательной плоскости и нормали и др.

2. Элементы векторной алгебры. При изучении раздела необходимо не только дать определение вектора, изучить операции над векторами, проекции векторов, разложение векторов, но и объяснить, что вектор не только геометрическая величина, но и перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс, сила тока, а также важно дать дополнительные разъяснения по поводу векторного задания движения точки. Такое детальное изучение векторов важно для будущих инженеров. Например, дисциплины «Теоретическая механика», «Теория механизмов и машин» применяют математический аппарат, а именно векторную алгебру.

3. Элементы линейной алгебры. Студент должен понимать понятие матриц; знать разновидности матриц, их числовые характеристики, действия над матрицами; уметь решать системы линейных алгебраических уравнений. К решению СЛАУ сводятся много задач линейного программирования, молекулярной физики и других разделов фундаментальных наук.

4. Введение в анализ. Детально изучаются предел числовой последовательности и предел функции непрерывного аргумента, бесконечно большие и бесконечно малые функции, непрерывность функции, точки разрыва, производная и дифференциал функции одной переменной, исследование функции при помощи производной, геометрический и механический смыслы производной функции и др.

5. Неопределенный и определенный интегралы. Изучаются методы интегрирования, геометрические и физические приложения определенного интеграла, численное интегрирование.

6. Дифференциальные уравнения. Изучаются ДУ первого и высших порядков; особое место уделяется задачам, приводящим к дифференциальным уравнениям, т. к. ДУ применяются при решении задач дисциплин «Физика», «Теоретическая механика» (ДУ движения точки), «Сопротивление материалов» (ДУ движения массы и балки, ДУ равновесия изгибаемой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении) и др.

7. Теория вероятностей и элементы математической статистики. Изучаются элементарная теория вероятностей и случайные величины; особое внимание уделяется основам математической статистики, а именно элементам теории оценок и проверки гипотез, т. к. каждого студента ожидает применение методов математической статистики для обработки результатов эмпирического иссле-

дования, что является обязательным требованием к курсовым и выпускным квалификационным работам.

Перечисленные разделы математики не могут полностью охватить необходимый материал для владения дисциплиной. Причиной тому является ограниченное количество часов, отведенных на изучение материала: всего 86 ч аудиторной работы и 202 ч для самостоятельного изучения материала.

Следует отметить обязательное дидактическое сопровождение программы дисциплины информационными технологиями. При решении задач численными методами и задач, решаемых аналитическими методами, но требующих больших временных затрат и расчетов, используются таблицы Excel и прикладная программа Mathcad, что позволяет реализовать требования выполнения общепрофессиональной компетенции ОПК-1 ФГОС ВО «Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий» по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» [3, с. 8].

Все виды учебных занятий (лекции, практические и лабораторные занятия) имеют четкую структуру. На лекционных занятиях студенты составляют конспекты лекций, где кратко и систематически фиксируют основные положения, выводы, формулировки и обобщения. Практические занятия, в свою очередь, направлены на освоение рабочей программы и акцентируют внимание на целях и задачах, структуре и содержании дисциплины. В этом процессе студенты ведут конспектирование источников, подготавливают ответы на контрольные вопросы, изучают рекомендуемую литературу и решают задачи по алгоритму и другим методам. Лабораторные занятия, в свою очередь, предназначены для углубления, расширения и детализации знаний, полученных на лекциях [4, с. 47]. Они помогают студентам развивать навыки профессиональной деятельности, а также работать с конспектами лекций и методическими указаниями к выполнению лабораторных работ.

Принцип профессиональной ориентированности при преподавании дисциплины «Математика» заключается в более детальном изучении отдельных разделов этой дисциплины и использовании межпредметной интеграции в рамках учебного процесса. Межпредметная интеграция позволяет связывать знания и навыки, полученные в рамках различных предметов, и применять их в практической деятельности. В итоге использование принципа профессиональной ориентированности и межпредметной интеграции в преподавании математики повышает качество обучения и учебно-познавательную деятельность студентов. Это стимулирует их интерес к предмету и помогает им лучше подготовиться к будущей профессиональной деятельности, где математические знания являются неотъемлемой частью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Творчество и аденилатциклазная активность / Е. Н. Дик [и др.] // Образование: гибкие технологии. Педагогическая психофизиология. Нейропедагогика: материалы Респ. науч.-практ. конф., посвящ. развитию образования на основе приоритетных направлений науки и техники, Уфа, 21 июля 1996 г.: в 2 ч. – Уфа: БО РПО, 1996. – Ч. 2. – С. 44–45.

2. **Дик, Е. Н.** Организация модульно-рейтинговой системы при обучении математике / Е. Н. Дик, Н. А. Костенко // Инновационные методы преподавания в высшей школе: материалы Всерос. науч.-метод. конф. с междунар. участием. – Уфа: БО РПО, 2012. – С. 68–71.

3. Российская Федерация. Об утверждении федерального образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия»: приказ ФГОС, 29 авг. 2017 г., № 813. – Москва, 2017. – 16 с.

4. **Арсланбекова, С. А.** О возможности повышения эффективности деятельности учителя / С. А. Арсланбекова // Образование в современной школе. – 2004. – № 4. – С. 47.

УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Для работы со студентами, интересующимися математикой, в Белорусско-Российском университете организован математический кружок.

Ранее были рассмотрены системы упражнений для математического кружка по темам «Матрицы» [1], «Производная» [2], «Интегрирование» [3], «Векторы» [4], «Пределы» [5]. Продолжая тему работы математического кружка, приведем подборку задач по теме «Ряды».

На лекционных и практических занятиях по теме «Ряды» зачастую мало времени уделяется вопросу нахождения суммы числового ряда. Единого подхода для решения этого вопроса нет. Поэтому на кружке ему можно уделить особое внимание. Рассмотрим некоторые приемы.

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}$ [6].

Данный ряд сходится, поэтому его сумма $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+1)-3}{(n+1)!}=$ $=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$. Известно, что $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \forall x\in\mathbb{R}$.

При $x=1$ имеем $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$.

Аналогично $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=e-2$.

Получаем $S=2(e-1)-3(e-2)=4-e$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}$.

Данный ряд сходится, поэтому его сумма $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}-$ $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1}$. Предварительно найдем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Он сходится при $|x|<1$. Известно, что $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1$. Проинтегрировав этот ряд, получим $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln|1-x|, |x|<1$.

Используя полученный результат, найдем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}=-\ln\left|1-\frac{3}{4}\right|=\ln 4$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n+1}=\frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\left(-\ln\left|1-\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\ln 4-1.$$

Получаем $S=\ln 4-\left(\frac{4}{3}\ln 4-1\right)=1-\frac{1}{3}\ln 4$.

На занятии по данной теме, кроме разобранных выше, можно рассмотреть со студентами следующие задачи [6].

1. Вычислить $3^{1/3}\cdot 9^{1/9}\cdot 27^{1/27}\cdot\ldots$. Ответ: $\sqrt[4]{27}$.

2. Найти $\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot e^{1/3}\cdot e^{1/5}\cdot\ldots\cdot e^{1/(2n-1)}}{e^{1/2}\cdot e^{1/2}\cdot\ldots\cdot e^{1/(2n)}}$. Ответ: 2.

3. Найти значение выражения $\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\right)+\dfrac{2}{\pi^2}\int\limits_0^1\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$. Ответ: 1.

4. Найти $f^{(1998)}(-1)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$. Ответ: $-\dfrac{1998!}{2^{2000}}$.

5. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}\cos^2\dfrac{\pi n}{4}$. Ответ: $D_{cx}=\mathbb{R}$, $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-x}-2+x+\cos x\right)$.

6. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(1-x^2\right)^n}{n+1}$. Ответ: $D_{cx}=\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$, $S(x\neq\pm1)=\dfrac{\ln x^2}{x^2-1}$, $S(\pm1)=0$.

7. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n)-$ количество цифр в числе $n, n\in\mathbb{N}$. Ответ: $D_{cx}=(-0{,}1;\,0{,}1)$, $S(x)=\dfrac{9x}{1-10x}$.

8. Решить уравнение $4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{3^{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^n x}{n!}$. Ответ: 1.

9. Решить уравнение $4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^n x}{n!}$. Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}, n\geq 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Матрицы» / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 58–62.

2. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Производная» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 73–76.

3. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Интегрирование» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 80–83.

4. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Векторы» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными

студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 76–79.

5. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Пределы» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 83–85.

6. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2008. – 171 с.

УДК 378.141.4

О РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ ДИСЦИПЛИНЫ «КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ» ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ 01.03.04 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

И. У. ПРИМАК
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рабочая программа дисциплины «Квантовые вычисления» составлена на основании учебного плана, утверждённого ректором Белорусско-Российского университета, рег. № 010304-2.1 от 28.04.2023 г., в полном объеме соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриата по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», № 11 от 10.01.2018 г.

Основной целью изучения дисциплины «Квантовые вычисления» для указанного направления подготовки бакалавриата является обеспечение студентов базовыми знаниями в области квантовых вычислений и алгоритмов, а также приобретение навыков использования предлагаемого математического аппарата для решения практических задач, формирование системы ключевых компетенций.

В соответствии с указанной целью в рабочей программе предлагается изучение основных тем и вопросов дисциплины «Квантовые вычисления», таких как: основные определения и понятия квантовых вычислений; запутанные квантовые состояния; квантовая криптография; квантовые гейты; квантовые схемы и кодирование; телепортация; простейшие квантовые алгоритмы (алгоритм Дойча, алгоритм Дойча – Джозса, алгоритм Бернштейна – Вазирани); алгоритм Саймона нахождения периода периодической функции; алгоритм Гровера поиска в неупорядоченной базе данных; квантовое преобразование Фурье;

квантовая факторизация числа; устойчивость квантовых вычислений; квантовое исправление ошибок; квантовые классы сложности.

Дисциплина изучается в 7 семестре. Программа подготовки рассчитана на 1 семестр. Лекционный курс составляет 34 аудиторных часа, лабораторные занятия – 30 часов и 80 часов самостоятельной работы с учебной литературой по темам программы. В целом, контактная работа преподавателя со студентами составляет 64 аудиторных часа, а общее число часов, выделенных на дисциплину, – 144.

Предполагается, что для изучения данной дисциплины необходимо изучить и усвоить в рамках рабочих программ линейную алгебру, математический анализ, аналитическую геометрию, теорию вероятностей и случайные процессы, математическую статистику, теорию функций комплексной переменной, физику, теорию функций и функциональный анализ.

Перечень тем и вопросов рабочей программы подобран с учетом специфики подготовки специалистов данного направления подготовки, что позволит изучившим дисциплину успешно решать прикладные задачи, возникающие в профессиональной деятельности, а также успешно овладеть изучаемой в дальнейшем дисциплиной «Искусственный интеллект, машинное обучение, нейронные сети». Кроме того, результаты изучения дисциплины могут быть использованы в ходе практики и при подготовке выпускной квалификационной работы.

УДК 37.091.3:51

ОБ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

А. А. РОМАНЕНКО
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В 2021 г. в Белорусско-Российском университете открыта новая специальность «Прикладная математика», профиль «Разработка программного обеспечения». Согласно учебному плану подготовка студентов осуществляется по классическим математическим требованиям. Изучаются раздельно математические дисциплины, одной из которых является «Теория функций комплексной переменной».

Основными целями дисциплины являются: формирование высокого уровня математической культуры; развитие логического и алгоритмического мышления; развитие творческих способностей, навыков исследовательской работы и самостоятельного расширения математических знаний.

Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» изучается в четвертом семестре. На нее выделено 50 аудиторных часов, из которых 16 лекционных и 34 практических. Для данной дисциплины это, конечно же, мало. Материал значительно «богаче» математического анализа функций действительных переменных [1]. Но это принципиально не новый материал для студентов, однако он порой не имеет наглядных интерпретаций, что затрудняет его понимание. Так, например, графики элементарных функций комплексной переменной (ФКП) представляют собой две различные поверхности, которые описываются двумя функциями двух действительных переменных.

Тем не менее последовательное изложение материала, начиная с описания линий и областей с помощью комплексных чисел и далее отображения точек, линий и областей комплексной плоскости $z = x + iy$ на комплексную плоскость $w=u+iv$ при отображении $w = f(z)$, приводило к пониманию геометрического смысла и сущности ФКП. Определенные затруднения в понимании вызвало понятие многолистных функций, хотя это простой аналог периодической функции одной действительной переменной. Многозначность значений ФКП не вызвала затруднений. Однако анализ соответствия однолистности, многолистности, однозначности и многозначности функций приводил к полной путанице в этих понятиях.

Определенный восторг испытывали студенты связью тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной, однако обратные тригонометрические и гиперболические функции воспринимались чисто формально. Но это не столь важно, поскольку это чисто теоретические вопросы, практические приложения которых выходят за рамки курса.

Дифференцируемость и аналитичность ФКП, геометрический смысл модуля и аргумента производной не вызвали затруднений в понимании, а также восстановление аналитической функции по известной ее действительной или мнимой части на основании условий Коши – Римана, поскольку студенты знакомы с этими положениями из курса математического анализа функции действительной переменной и теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2] (решение уравнений в полных дифференциалах). Понятие конформности отображений осталось на уровне определения и наглядных иллюстраций ввиду краткости курса.

Интегрирование ФКП также не вызвало затруднений, поскольку студенты знакомы с криволинейными интегралами второго рода функции двух действительных переменных. Понравилось и вызвало удивление у студентов доказательство теоремы Коши для аналитической функции с использованием теоремы Грина в односвязной и многосвязной областях, а также доказательство интегральных формул Коши для функции и ее производных, хотя пришлось уверять студентов в справедливости ряда Тейлора для аналитических функций, поскольку степенные ряды изучаются после интегрирования ФКП. Большой интерес вызвали приемы вычисления контурных интегралов от аналитических функций не находя первообразных, а лишь пользуясь интегральными формулами Коши для функции и ее производных. На практических занятиях студенты с большим энтузиазмом выделяли под интегралами необходимые конструкции.

Изучение вопросов сходимости комплексных числовых и степенных рядов прошло без особых нюансов, поскольку все признаки абсолютной сходимости числовых и степенных рядов, в частности теорема Абеля, детально изучались в курсе математического анализа функций одной действительной переменной и логически продолжились для ФКП, при этом областью сходимости степенных рядов являлись точки, круги, кольца или вся комплексная плоскость. При разложении аналитических функций в ряды Тейлора – Маклорена пригодились приемы разложений, которые детально изучались в действительном анализе.

Некоторые сложности в изучении вызвали ряды Лорана, классификация особых точек, в частности существенно особая точка и бесконечно удаленная особая точка. Для их установления требовалось нахождение соответствующего предела. И если в случаях конечного и бесконечного предела не возникало вопросов, то в случае, когда предел не существует, а лорановское разложение содержит бесконечное число слагаемых в сингулярной части ряда, вопросов было много, и причиной этому было незнание факта существования предела (независимости значения предела от способа стремления $z \to z_0$, которых бесконечное множество). Установление порядка нулей и полюсов на основании нахождения соответствующих пределов, а также разложение в ряд Лорана функций в окрестности устранимой особой точки и полюсов и вычисление вычетов в этих точках не вызывало затруднения. При этом разложения в ряды Лорана выполнялись не по определению, а, как и в случаях ряда Тейлора – Маклорена, с помощью соответствующих приемов, основанных на таблице рядов Маклорена для основных элементарных ФКП и сообразительности. Слово «сообразить» понравилось студентам, они часто повторяли его, т. е. перед началом решения задачи говорили, что надо «сообразить».

Очевидно, что лекционных часов недостаточно для проведения всех доказательств и формирования устойчивых понятий математических положений теории ФКП. Многие положения приходилось излагать постулятивно, со ссылками на литературу для интересующихся. Не хватило времени на различные приложения ФКП. За пределами курса остались важные для практических применений вопросы, связанные с теоремой Руше, принципом аргумента аналитических функций, леммой Жордано и т. д. Однако следует заметить, при необходимости студенты в состоянии самостоятельно освоить эти вопросы, поскольку требуемые для этого знания получены.

Дисциплина вызвала определенный интерес и удивила студентов красотой математических положений и формул теории ФКП, таких как теорема Коши, интегральная формула Коши для функции и ее производных, вычисление контурных интегралов от ФКП не находя первообразных, некоторых определенных и несобственных интегралов с использованием интегральных формул Коши и теории вычетов, связью основных математических констант, например $e^{i\pi} = -1$ и т. д.

В целом, в группе присутствовала атмосфера учебы и интереса к предмету, и цели, изложенные ранее, достигнуты, а успешное освоение студентами данной дисциплины позволит им овладеть основами других математических дисциплин и сопутствующих им прикладных.

Необходимо отметить также, что постоянное внимание к учебным и житейским делам студентов куратора группы Александра Николаевича Бондарева поддерживало атмосферу учебы и состязательности в учебе, а также доброжелательности в отношениях и взаимопомощи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романенко, А. А.** О подготовке студентов по математическому анализу специальности «Прикладная математика» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 79–81.

2. **Романенко, А. А.** Об изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 92–95.

УДК 37.016:(517+537)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БЛОК-СХЕМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. И. СЕРЫЙ

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Брест, Беларусь

В курсе теоретической физики (в том числе в разделе «Электродинамика») присутствует заметное количество задач, которые не могут быть решены в одно-два действия. Нередко разбор решения содержит большое количество формул, сопровождаемых словесными комментариями (что куда подставляется, что из чего вычитается, что возводится в квадрат, интегрируется или дифференцируется, что следует из этих преобразований и т. д.). Не отвергая такую форму изложения материала, следует признать, что она нравится не всем, т. к. выглядит «запутанной», «утомительной» и т. д. Альтернативной формой изложения могут быть блок-схемы. Блок-схемам при решении задач в вузовском курсе физики на сегодняшний день не уделяется заметного внимания, хотя некоторая часть обучаемых (и преподавателей) такую форму подачи материала воспринимает позитивно.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу (текст с некоторыми изменениями заимствован из [1, с. 58]).

Задача. В резерфордовской модели атома водорода начальный радиус орбиты электрона (радиус атома) $r_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см, а электрон в атоме движется и излучает по законам классической электродинамики. Оценить время τ, в течение которого смог бы просуществовать электрон (и атом) в такой модели.

Ответ, сопровождаемый довольно краткими объяснениями (где, в частности, предполагается, что энергия электрона за период обращения меняется незначительно), можно найти в [1, с. 156]. Не затрагивая вопрос о том, во что мог бы превратиться атом, разберем решение (содержащее операции дифференцирования и интегрирования) в виде блок-схемы (рис. 1).

Будем использовать систему СГС и обозначения: J – мощность (интенсивность) излучения (используем формулу в нерелятивистском дипольном приближении [2, с. 241]); W – энергия излучения; t – момент времени; e – элементарный заряд; c – скорость света в вакууме; r – расстояние от электрона до центра ядра; υ – скорость электрона; a – ускорение, с которым движется электрон; m – масса электрона; F – сила во втором законе Ньютона; $F_{кул}$ – кулоновская сила; $F_ц$ – центростремительная сила; E_k – кинетическая энергия электрона; $E_П$ – потенциальная энергия электрона; $r_T = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ см – классический (томсоновский) радиус электрона.

Тонкие стрелки на схеме соответствуют подстановкам, жирные стрелки и фигурные скобки – следствиям. Исходные блоки (с любого из которых можно начинать рассуждения) закрашены серым цветом (более темным), блок с конечным результатом – также серым (более светлым).

Подставляя численные значения для r_0, r_T и c, окончательно получаем, что $\tau \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ с. Впрочем, выражать конечную формулу через r_T не обязательно. Можно перейти к численным расчетам сразу после нахождения интегралов.

Публикация дополняет статьи [3, с. 61; 4, с. 10–13], посвященные использованию блок-схем при решении задач по электродинамике.

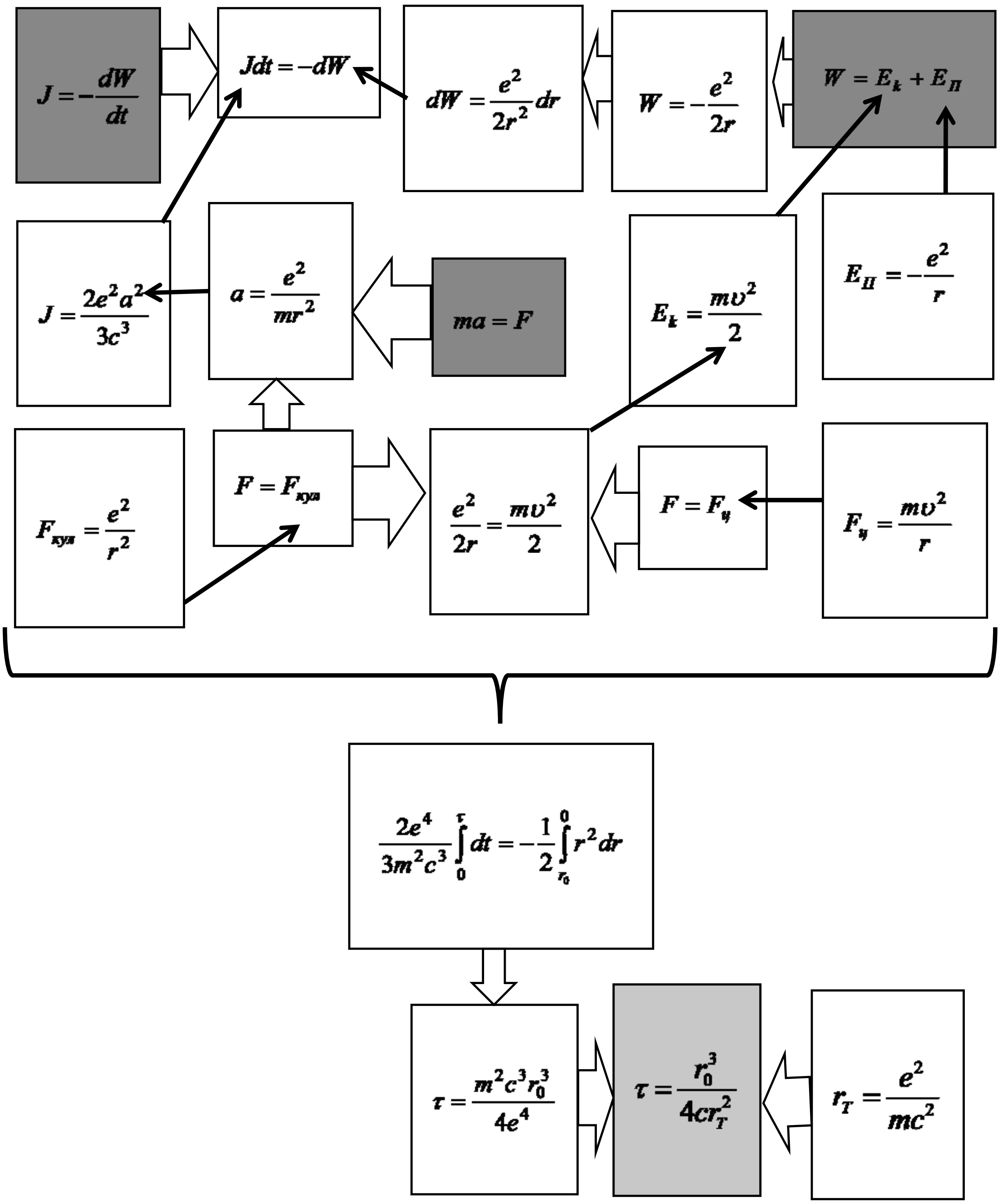


Рис. 1. Блок-схема решения задачи

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1984. – 319 с.

2. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика: учебное пособие для вузов: в 10 т. Т. 2: Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 8-е изд., стер. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 536 с.

3. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем при решении задач электростатики / А. И. Серый // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам: материалы XIV Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 29 марта 2022 г. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2022. – С. 61.

4. **Серый, А. И.** Об использовании блок-схем и таблиц при решении задач по теме «Электромагнитная индукция» / А. И. Серый // Наука, инновации, образование: актуальные вопросы XXI века: сб. ст. VIII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. – С. 10–13.

УДК 378. 016:51

ПРОБЛЕМА ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БАКАЛАВРОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Возрастающая роль математики в современной науке и технике определяет необходимость серьезной математической подготовки будущих специалистов технического профиля. Она должна быть ориентирована, в первую очередь, на формирование у будущих специалистов возможности исследования математическими методами широкого круга профессиональных проблем. Значимыми условиями решения указанной проблемы являются целесообразное и эффективное применение современных информационных технологий, а также творческое использование теоретических достижений в будущей профессионально-практической деятельности.

Вузовское образование в современных условиях, реализующее идеи компетентностного подхода, призвано обеспечить не столько набор знаний, умений и навыков студентов, сколько сформировать в ходе обучения способность будущих специалистов к анализу и разрешению проблемы в сложившихся нестандартных условиях.

Образовательные стандарты высшего образования определяют требования к подготовке студентов (в данном случае – математической). Их качественная реализация возможна при условии активности студентов в познании, осознанном и самостоятельном приобретении ими математических знаний, содержательных и процессуальных умений и навыков.

Объективные и субъективные причины снижения уровня математической подготовки абитуриентов, несоответствие математических знаний выпускников школ требованиям к знаниям первокурсников не позволяют эффективно реализовать принцип преемственности обучения с позиции целевой составляющей обучения математике в высшем учебном заведении: расширение и углубление школьных знаний по форме, содержанию и методам работы.

Уменьшение количества часов на изучение математики в вузе при переходе на новые образовательные стандарты, разный уровень математической подготовки первокурсников (математика изучается в первых двух семестрах), увеличение доли самостоятельной работы в соответствии с требованиями учебных (рабочих) программ, особенности методики преподавания математики в школе и в университете требуют от преподавателя математики поиска путей развития готовности бакалавров технического вуза к освоению содержания учебной дисциплины «Математика» с учетом различных образовательных возможностей и особенностей обучающихся. Это содержание способствует пониманию важности универсальности математических методов в решении задач описания технических явлений и процессов, проблем из других областей профессионально-практической деятельности будущих специалистов. К тому же освоение новых форм деятельности, способов решения профессиональных задач требует от системы высшего профессионального образования развития и укрепления индивидуальности каждого студента, что применительно к процессу обучения означает учет его индивидуальных качеств – интересов, потребностей, способностей, интеллекта и др.

Одним из направлений организации обучения математике, которое способствует решению проблемы качества подготовки обучающихся в высшей школе, отвечает требованиям социального заказа общества к специалистам технического профиля, соответствует запросам и потребностям самих студентов, является индивидуализация обучения. В основе индивидуализации обучения лежит принцип развития обучающихся и процесс его реализации посредством индивидуального и дифференцированного подходов.

Рассматривая индивидуализацию обучения как психолого-педагогическую проблему, характеризуют, в первую очередь, ее возможности создания условий для выявления, раскрытия и развития индивидуальных и творческих способностей обучающихся, направленность на активизацию саморазвития, углубления знаний, расширение учебных возможностей каждого обучаемого (Ю. К. Бабанский, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, В. А. Крутецкий, Г. М. Коджаспирова, И. Я. Лернер, М. И. Махмутов, П. И. Пидкасистый, Г. И. Щукина, И. Э. Унт, И. С. Якиманская и др.).

В педагогической литературе понятие индивидуализации обучения используется в различных значениях. Так, в Педагогическом энциклопедическом словаре указывается: «Индивидуализация – организация учебного процесса с учетом индивидуальных особенностей учащихся. Осуществляется в условиях коллективной учебной работы в рамках общих задач и содержания обучения. Позволяет создать оптимальные условия для реализации потенциальных возможностей каждого ученика» [1, с. 104].

Индивидуализация обучения представляется как организация учебного процесса на основе учета индивидуальных различий обучающихся. Выделяется индивидуализация в узком смысле (разработка индивидуальной траектории обучения для каждого обучающегося) и в широком смысле (создание условий для проявления в учебном процессе индивидуальных особенностей разными учащимися) [2].

Индивидуализация учебного процесса в вузе особо значима и эффективна с позиций требований личностно ориентированного обучения. В контексте такого обучения первостепенным является личность обучающегося (самобытность, самоценность), при этом субъектный опыт обучающегося сначала раскрывается, а затем согласовывается с содержанием образования [3].

Содержательный и процессуальный аспекты методики индивидуализации обучения математике студентов технического вуза связаны с разработкой требований к отбору содержания курса математики с точки зрения выделения в нем предметной, профессионально ориентированной и прикладной областей. При этом сохраняется целостность содержания в соответствии с уровнем математической подготовки студентов; учебный материал структурируется по уровням предъявления в соответствии с выделенными областями и определяются формы предъявления содержания.

Исследователи проблемы индивидуализации обучения в высшей школе отмечают, что современная организация процесса обучения, включая обучение дисциплинам математической направленности, требует особо изучения видов и форм индивидуализации обучения математике студентов технического вуза [4].

В теории и практике обучения математике в высшей школе рассмотрены отдельные стороны индивидуализации обучения, однако отмечается, что его учебно-методическое обеспечение в настоящее время в недостаточной степени способствует реализации идей такого вида обучения. Это подчеркивает актуальность рассматриваемой проблемы и необходимость ее последующего разрешения с позиций, например, разработки научных основ индивидуализации обучения математике студентов технических специальностей вузов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Педагогический энциклопедический словарь / Под ред. Б. М. Бим-Бада. – 3-е изд., стер. – Москва : Большая Рос. энцикл.; Дрофа, 2009. – 527 с.

2. **Корытов, И. В.** Дифференциация и индивидуальный подход в обучении высшей математике студентов технического вуза / И. В. Корытов, Г. С. Корытова // Вестн. Томского гос. пед. ун-та. – 2016. – Вып. 4 (169). – С. 33–41.

3. **Якиманская, И. С.** Личностно ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – Москва : Сентябрь, 1996. – 95 с.

4. **Кравец, О. Я.** Виды и формы индивидуализации обучения информатике студентов технического вуза / О. Я. Кравец, О. Ю. Заславская // Вестн. РУДН. – 2011. – № 1. – С. 71–80.

УДК 378. 016:51

УПРАВЛЕНИЕ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ КАК МЕТОДИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Современные требования к уровню профессиональной подготовки специалистов, конкретизированные особенностями каждой учебной дисциплины, направлены на их личностное развитие (уровень социализации, мировоззрение, профессиональное самоопределение) на основе мотивированной учебной деятельности получения профессиональных знаний, сформированности познавательных умений, навыков, способности к самообразованию и саморазвитию. Математика как учебная дисциплина в системе высшего инженерного образования средствами своего содержания способствует формированию и творческому развитию личности обучающегося, его мышления (качества креативности и критичности), умения эффективного и целесообразного анализа ситуации и принятия ее обоснованного решения. Математические знания и умения, являясь универсальным инструментом профессиональной деятельности специалиста технического профиля, обеспечивают понимание связей и отношений во всех сферах деятельности человека, совершенствуют формы и методы познавательной активности будущего специалиста в любой области применения имеющихся знаний, особенно в профессиональной.

Преподавание математики в техническом университете должно удовлетворить требования к профессиональной компетентности будущих инженеров в условиях сокращения количества часов на ее изучение. Учебная деятельность есть активное взаимодействие участников образовательного процесса. В связи с этим актуализируется проблема управления учебно-познавательной деятельностью студентов, в том числе и с точки зрения ее методической составляющей [1]. Управление познавательной деятельностью обучающихся характеризуется как целенаправленный процесс создания преподавателем таких условий обучения, которые обеспечивали бы в данном процессе позитивный характер познавательной активности, предоставляли возможность самореализации каждого студента в учебной деятельности, направляли на достижение поставленных целей и задач обучения математике, контролировали и корректировали с учетом индивидуальных особенностей студентов [2]. С точки зрения методики обучения математике это означает реализацию компонента методической системы обучения – поиск и выбор методов и средств управления познавательной деятельностью студентов в учебном процессе для дальнейшего успешного изучения математических дисциплин, а также специальных дисциплин по выбранной специальности.

Учебная деятельность включает определенную последовательность мотивационных состояний, которые побуждают эту деятельность в целом и поддерживают ее непрерывность и стабильность. Авторы-исследователи учебной деятельности выделяют элементы, составляющие ее мотивационную основу: сосредоточенное внимание на учебной ситуации; осознание смысла предстоящей деятельности; осознанный выбор мотива и др. [3]. М. В. Юракова указывает, что математическое содержание и индивидуальный опыт обучающихся обуславливают выполнение ими математической деятельности, при этом ее продуктивность во многом определяется мотивационной направленностью, представляющей собой совокупность причин, обуславливающих возникновение этой деятельности, выбор ее направления и способов осуществления [4].

Для эффективной реализации учебной деятельности важное значение имеют конкретные индивидуальные особенности обучающихся. Наиболее значимыми из них, по мнению Т. А. Боровских, являются следующие: обучаемость как общая способность к усвоению и применению знаний; умственное развитие, характеризующееся уровнем выполнения мыслительных операций по приобретению и использованию знаний; стиль мыслительной деятельности как сформированность наиболее эффективных приёмов и способов организации обучающимся собственной учебной деятельности; учебная мотивация – склонность обучающегося к различным видам и аспектам учебной деятельности; познавательная стратегия, которая заключается в умении обучающегося делать выводы в отношении своей дальнейшей познавательной деятельности [5]. Учет и целенаправленное развития этих особенностей, считает автор, способствует развитию познавательной активности, интеллектуальных качеств, самостоятельности и умению учиться.

Для управления учебно-познавательной деятельностью студентов важным является выбор технологий обучения и приемов, направленных на формирование и развитие общих компетенций. Формирование математических знаний, умений и навыков их применения при решении задач (внутрипредметных, межпредметных, практико и профессионально ориентированных) с выполнением анализа задачной ситуации, оценки возможности ее разрешения имеющимися знаниями и конструирование правильного решения имеют активные методы обучения. При использовании методов управления учебно-познавательной деятельностью студентов необходимо формировать у них понимание значимости выполнения определенной деятельности (составление опорной таблицы, составление плана изучения некоторого вопроса, подготовка презентации, решение задачи и т. д.) и представление о тех моделях или процессах реальной действительности, о которых идет речь в данной конкретной учебной ситуации. Мотивация необходимости изучения темы предметного содержания может быть проведена созданием проблемных ситуаций поискового или мотивирующего характера.

Математические задачи, связанные с абстрактными понятиями, как правило, решаются дедуктивным методом путем перехода от общего к частному. Формирование математических понятий может быть проведено в рамках абстрактно-дедуктивного и конкретно-индуктивного способов по определенным схемам. Студентам более понятны умозаключения, направление которых связано с переходом от частных посылок к общим (от частного к общему), т. е. используется индуктивный метод. Поэтому на занятиях по математике целесообразно начинать рассмотрение конкретных примеров с дальнейшим обобщением и переходом к выводам, объединяющим данный конкретный тип задач. Такой подход позволит выработать у обучающихся определенный алгоритм действий, способствующий активизации познавательной деятельности.

Качественная математическая составляющая высшего инженерного образования как необходимое условие формирования профессиональной компетентности выпускника вуза определяется рационально организованной и эффективно управляемой преподавателем учебно-познавательной деятельностью обучающихся, адекватной, в первую очередь, их индивидуальным познавательным возможностям и особенностям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Старовойтова, Е. Л.** Методические особенности преподавания математики в техническом вузе в контексте активизации учебно-познавательной деятельности студентов / Е. Л. Старовойтова // Матэматыка. – 2022. – № 1 (137). – С. 27–38.

2. **Савченко, Т. В.** Развитие познавательной самостоятельности студентов вуза / Т. В. Савченко // Концепт. – 2014. – Вып. 2. – С. 26–30.

3. **Дяченко, С. И.** Мотивация изучения «Математики» студентами «Нематематических» специальностей / С. И. Дяченко // Вестн. ТГПИ. – 2008. – № 1. – С. 205–210.

4. **Юракова, М. В.** Мотивация в процессе обучения математике / М. В. Юракова // Вестн. Брянского гос. ун-та. – 2011. – № 1. – С. 338–344.

5. **Боровских, Т. А.** Индивидуальные особенности учащихся и методы их диагностики и учёта в учебном процессе / Т. А. Боровских // Наука и школа. – 2010. – № 10. – С. 56–59.

УДК 378. 016:51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА СТУДЕНТОВ: ПРОБЛЕМА АКТИВНЫХ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Т. С. СТАРОВОЙТОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Проблема оптимизации математической подготовки студентов вузов является объектом исследования в методических работах и объектом деятельности преподавателей-практиков: разрабатываются новые концепции и подходы к обучению, технологии обучения, изучается опыт их использования в реальной практике обучения в высшей школе. Одно из направлений исследований в методике преподавания математики связано с отражением запросов современного общества к обучению и воспитанию социально активной личности, что актуализирует проблему поиска активных методов обучения и их эффективное использование в процессе обучения математике. Однако вопросы указанной тематики применительно к обучению студентов высшей школы и технических вузов, в частности, исследованы и представлены недостаточно.

Процесс познания обычно представляется последовательностью этапов: восприятие, запоминание, сохранение, воспроизведение, интерпретация полученных знаний. Состояние активности есть своеобразная ответная реакция обучающегося на условия деятельности, предложенные преподавателем. Активизация познания может осуществляться на всех указанных этапах, а может проявиться на каком-нибудь одном из них (или некоторых). Поэтому в практике обучения математике необходимо учитывать возможность включения студентов в учебную деятельность по разрешению проблемы с разной степенью активности: репродуктивно-подражательной, поисково-исполнительской и творческой (Г. И. Щукина). Учитывая содержательные характеристики указанных уровней познавательной активности, можно рассматривать их как методические основания для осуществления процессуальной составляющей, активизации познавательной деятельности обучающихся, поскольку выделенные уровни адекватны одной из классификаций методов обучения [1].

Научно-теоретический обзор основных этапов развития активных методов обучения, раскрытие их специфических особенностей, отражение взаимосвязи с традиционным обучением представлены в [2]. Предложены также методические разработки и практические рекомендации по проведению занятий с использованием активных форм и методов обучения.

Теоретический анализ проблемы активизации обучения позволил установить, что технология активных методов обучения основана на коллективной деятельности обучающихся. Она направлена на их взаимное обогащение в группе; на организацию совместных действий, ведущих к активизации учебно-познавательных процессов; на распределение начальных действий и операций; на коммуникацию, общение, без которых невозможны распределение, обмен и взаимопонимание; на обмен способов действия для решения проблемы; на взаимопонимание в соответствии с характером включения в совместную деятельность; на рефлексию, установление отношения участника к собственному действию и обеспечение адекватной коррекции этого действия [3].

При использовании активных методов обучения главным является не увеличение объёма передаваемой информации, не увеличение числа контрольных мероприятий, а создание дидактических и психологических условий осмысленного учения, обеспечение возможности включения в него обучающегося на уровне не только интеллектуальной, но личностной и социальной активности. Система активных методов обучения направлена главным образом не на изложение преподавателем готовых знаний, организацию их запоминания и воспроизведения обучающимися, а на самостоятельное овладение ими знаниями и умениями в процессе активной мыслительной и практической деятельности. Значение активных методов обучения определено моделью современного образования, рассматривающего их как методы, побуждающие обучающегося приближаться к поисковой, исследовательской деятельности [4].

Хотя применение активных методов обучения эффективно, но практическая реализация их преподавателями и студентами требует определенной подготовки знаний, опыта, творческого подхода и времени. Поэтому чаще всего в практике обучения применяются элементы активного обучения (через использование активных методов обучения) наряду с пассивным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беликова, Е. В.** Познавательная активность учащихся как инструмент обучения при реализации ФГОС в средней школе [Электронный ресурс] / Е. В. Беликова // Молодой ученый. – 2018. – № 34 (220). – С. 98–100. – Режим доступа: https: //moluch.ru/archive/220/52414/. – Дата доступа: 15.01.2024.

2. **Чечет, В. В.** Активные методы обучения в педагогическом образовании: учебно-методическое пособие / В. В. Чечет, С. Н. Захарова. – Минск: БГУ, 2015. – 127 с.

3. **Жук, О. Л.** Педагогика: учебно-методический комплекс для студентов педагогических специальностей / О. Л. Жук. – Минск: БГУ, 2003. – 383 с.

4. **Кудинов, С. И.** Активные методы обучения: учебное пособие / С. И. Кудинов, С. С. Кудинов, И. Б. Кудинова. – Москва : Рос. ун-т дружбы народов, 2017. – 168 с.

УДК 378.1.

ПОИСК И ОТБОР ОДАРЕННЫХ СТУДЕНТОВ И ОРГАНИЗАЦИЯ ЦЕЛЕВОЙ ПОДГОТОВКИ С УЧЕТОМ ИХ СПОСОБНОСТЕЙ К МАТЕМАТИКЕ

М. ТАДЖИЕВ
Институт исследования рынка труда
Ташкент, Узбекистан
О. Г. ГАИМНАЗАРОВ
Гулистанский государственный университет
Гулистан, Узбекистан

Одной из основных задач образовательных организаций является воспитание студенческой молодежи как одаренных людей, отвечающих требованиям общества и научно-технического развития, повышение уровня их знаний, научение глубоко и прочно усваивать основы науки, воспитание их таким образом, чтобы они стремились к постоянному совершенствованию своих знаний и могли самостоятельно дополнять их и применять на практике.

На этом этапе допустимо дать определение понятиям «одаренность», «способный и одаренный студент». Одаренность – это качество психики человека, которое систематически развивается на протяжении всей жизни и определяется способностью человека достигать более высоких результатов в одной или нескольких областях по сравнению с другими людьми [4]. Одаренность – это качественно уникальное сочетание способностей, определяющих положительный потенциал студента или группы студентов. Основное содержание понятия «способность» также означает «умение». Используемое на практике понятие «умение» выражает три основные сущности. Способность – это высокий уровень умения студента проявить себя в определенной деятельности, всесторонне развитая, чрезвычайно сильная и уникальная способность. Она достигается в результате неустанного труда, преодоления всех трудностей и мобилизации всех возможностей на пути совершенствования своих способностей. Одаренный студент – это студент, который с раннего детства развивал свои способности и интеллект, занимался любимым делом, получал от него удовлетворение, нашел возможность развивать свои способности и добился успеха. Русский ученый В. М. Экземплярский применил диагностический метод для изучения одаренных учащихся. Он высказал мнение о необходимости создания специальных школ для одаренных учеников и разработки специальных программ для их обучения. В начале 1920-х гг. В. М. Экземплярский, изучая эту проблему, отмечал, что он склонен изучать только хорошо развитые способности, исследовал взаимосвязь между ними. Ученый выразил критическое отношение к исследованиям, связывающим талант только с интеллектуальной сферой. В своей работе он сосредоточил внимание на проблеме диагностики индивидуальной одаренности [3].

Целью поиска и отбора одаренных студентов и организации их деятельности в образовательных организациях является формирование нового поколения молодых людей (национальной элитной молодежи), абсолютно разных по своим знаниям, мировоззрению, интересам, возможностям и склонностям к учебным предметам.

Задачи поиска и отбора одаренных студентов и организации их деятельности заключаются в следующем: сортировать и отбирать наиболее одаренных студентов, организовывать их целевую подготовку с учетом их интересов, способностей и склонностей; прежде всего найти талантливую молодежь, отделить и собрать ее в соответствии с будущим освоением ею определенной области науки, наладить систематическую работу среди первокурсников по дополнительной подготовке и ориентации на определенные цели; поддерживать учебно-методическую и научную деятельность наиболее одаренных студентов, усиливать их стремление и мотивацию к научной и творческой деятельности; в дальнейшем усиливать интерес молодежи к научной и исследовательской деятельности; достигать положительных результатов путем привлечения молодых людей в научные общества и клубы во время их обучения в академических лицеях, закреплять их за научными руководителями с конца первого года обучения и продолжать непрерывную и регулярную работу с ними путем выбора тем; обеспечивать участие одаренных студентов в республиканских и международных научных конференциях, научных олимпиадах, семинарах и конкурсах [5].

«Чему и как следует учить?», «Какова в этом роль педагога?», «Каковы пути и методы развития интеллектуального потенциала одаренных студентов?» – эти вопросы остаются актуальными. В настоящее время в образовательных учреждениях широко используются следующие формы научных исследований: научные кружки студентов младших курсов; участие студентов в научных обществах, научных конференциях, международных программах, конкурсах и олимпиадах на высших курсах. Исходя из этого, можно выделить следующую систему работы с одаренными студентами в образовательных учреждениях: работа в научных кружках и научных обществах; занятие научными исследованиями; участие в экзаменах, конкурсах, грантах; участие в олимпиадах; участие в научных конференциях [2].

Критерии поиска одаренной молодежи, ее отбора и определения статуса самого одаренного студента.

1. Достижения одаренной молодежи общеобразовательных школ, достигнутые в научной и творческой сфере.

2. Тот факт, что студенты добились высоких результатов и показателей в учебном процессе в течение первого года обучения.

3. Отличное знание одного из иностранных языков, умение свободно пользоваться средствами и методами информационных технологий.

4. Наличие статей, материалов диссертаций, в порядке исключения, научных трактатов, подготовленных одаренной молодежью в соответствующей области науки, опубликованных в издательствах республики и зарубежных стран.

5. Признание научных и творческих результатов, достигнутых одаренной молодежью в регионе, стране и за рубежом.

6. Наличие уникальной исследовательской программы, которая считается необходимой для развития научной и творческой деятельности одаренных студентов и признается систематизирующим фактором.

7. Научно-творческая деятельность одаренного студента с научным руководителем, признание наличия мотивации к занятиям деятельностью.

8. Регулярное участие студентов в научных обществах и студенческих кружках уже во время обучения в учебных заведениях, прикрепляясь к научным руководителям с конца первого курса и постоянно и регулярно работая с ними путем выбора тем и достижения положительных результатов.

9. Участие одаренных студентов в республиканских и международных научных конференциях, олимпиадах, семинарах, конкурсах.

10. Награждение и поощрение достижений одаренных студентов.

Организация учебно-методической и научно-творческой деятельности одаренных студентов.

1. Принципы работы с одаренными и способными студентами: создание отдельной рабочей учебной программы и программы ее реализации; индивидуализация обучения согласно пожеланиям обучающихся (по предметам по их выбору); предоставление студентам знаний, направленных на развитие творческих качеств (самостоятельность, креативность, инициативность, предприимчивость); создание необходимых условий для развития интеллектуальных способностей обучающегося.

2. Академический руководитель во взаимодействии с одаренным и способным студентом и преподавателями углубленно изучаемого предмета создает совместную рабочую программу и календарно-предметный план. Одаренным и способным студентам, достигшим высокого показателя, может быть предоставлено право свободного участия в программах по отдельным предметам (с согласия преподавателя). На основе поиска одаренных учащихся и организации их деятельности была разработана модель обучения одаренных учащихся [5].

3. В конце каждого учебного года рейтинг освоения преподаваемых предметов определяется согласно интеллектуальному потенциалу одаренного обучающегося и помещается в его личную папку.

По вопросам поощрения и награждения одаренных студентов и их руководителей можно высказать следующие предложения. Поощрение и награждение одаренных студентов и их руководителей.

1. Расходы по целевой программе обучения одаренных студентов осуществляются за счет внебюджетных средств образовательных организаций.

2. По итогам учебного года способные студенты, добившиеся высоких результатов, будут материально и морально поощряться руководством образовательных организаций в соответствии с рекомендациями закрепленных руководителей.

3. Виды дополнительного стимулирования и поощрения одаренных обучающихся могут быть расширены исходя из возможностей и направлений образовательных учреждений.

4. Научные руководители, консультанты и преподаватели, добившиеся высоких результатов в работе с одаренными студентами (победители олимпиад, конкурсов, студенческих научных работ, опубликованных научных статей и т. п.), рекомендуются к следующим поощрениям и наградам: благодарственное письмо; установление дополнительного ежемесячного оклада (при высоком общем рейтинге мастерства); вознаграждение в размере трехмесячного оклада по итогам учебного года; рекомендация к почетным степеням; отправка за границу для стажировки и обмена опытом; выдача направлений на курорты и в санатории.

Это положительно влияет, во-первых, на повышение качества образования в образовательных учреждениях, во-вторых, на подготовку одаренных студентов и организацию подготовки их руководителей на высоком уровне [1].

Исходя из вышеизложенного, внедрив систему «наставник – студент» в эффективную организацию преподавания математики в образовательных организациях, можно искать, сортировать и отбирать одаренных студентов нового поколения (национальную элиту), абсолютно отличающихся друг от друга, с точки зрения их знаний, мировоззрения, интереса, способностей и склонности к учебным предметам и математике, целесообразно совершенствовать способы целевого обучения в зависимости от их склонностей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований: постановление Президента Респ. Узбекистан, 7 мая 2020 г., ПП-4708 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.lex.uz.

2. **Рахматова, Ф. Г.** Теоретические и технологические аспекты работы с одаренными учениками: методическое руководство / Ф. Г. Рахматова. – Самарканд: Изд. дом им. Г. Гуляма, 2019. – 152 с.

3. **Экземплярский, В. М.** Проблема одаренности / В. М. Экземплярский. – Москва: Рус. книжник, 1923. – 126 с.

4. Рабочая концепция одаренности / Под ред. В. Д. Шадрикова. – Москва: Магистр, 2002. – С. 7–9.

5. **Джакаева, К. Д.** Совершенствование методики подготовки одаренных учащихся посредством эффективного преподавания алгебры в академических лицеях (на примере направ-

ления образования «Математика»: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / К. Д. Джакаева. – Ташкент, 2021. – 53 с.

УДК 512.1; 517.53.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАТНЫХ КОРНЕЙ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М. ТАДЖИЕВ
Институт исследования рынка труда
Ташкент, Узбекистан
К. Д. ДЖАКАЕВА
Нукусский инновационный институт
Нукус, Узбекистан

Множество различных алгебраических и геометрических задач сводятся к какому-либо уравнению, в частности к кубическому уравнению

$$x^3 + px^2 + qx + t = 0 \ . \tag{1}$$

Методы решения уравнений третьей степени (формула Кардано и др.) выходят за рамки программы обычной школы [1]. Поэтому если на олимпиаде попадается кубическое уравнение, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения такого уравнения. Одним из приёмов является применение производных.

Рассмотрим, как применяется производная к исследованию кратного решения $x_1 = x_2 \neq x_3$ уравнения (1). Для этого обозначим левую часть уравнения (1) через $y(x)$, т. е.

$$y(x) = x^3 + px^2 + qx + t,$$

и найдем производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = 3x^2 + 2px + q.$$

Теперь решаем квадратное уравнение

$$3z^2 + 2pz + q = 0. \tag{2}$$

Пусть уравнение (2) имеет два действительных корня: $z = z_1$ и $z = z_2$. Если выполняется равенство $p^2 - 3q = \frac{3}{2}|z_1 - z_2|$, то один из корней ($z_1$ или z_2) совпадает с x_1, т. е. $z_1 = x_1$ или $z_2 = x_1$. Пусть $z_1 = x_1$. Тогда третий корень уравнения (1) определяется из равенства $p^2 - 3q = |x_1 - x_3|$ или $x_3 = \frac{3}{2}z_2 - \frac{1}{2}x_1$.

Например, рассмотрим уравнение

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0.$$

Тогда уравнение (2) имеет вид

$$3z^2 - 14z + 16 = 0,$$

корень которого равен $z_1 = 2$ и $z_2 = \frac{8}{3}$. Проверяем равенство:

$$p^2 - 3q = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 1 = \frac{3}{2}|z_1 - z_2| = \frac{3}{2}\left|2 - \frac{8}{3}\right| = 1.$$

Выполнение этого равенства означает, что данное уравнение имеет кратное решение $x_1 = x_2 = z_1 = 2$. Теперь определяем третий корень данного уравнения из равенства $x_3 = \frac{3}{2}z_2 - \frac{1}{2}x_1$, т. е.

$$x_3 = \frac{3}{2}z_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 = 3,$$

или по теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ получим $2 + 2 + x_3 = 7$, откуда $x_3 = 7$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Захарченко, Ю. А.** Алгебраические уравнения высших степеней. От простого к сложному / Ю. А. Захарченко // Все для учителя математики. – 2017. – № 1. – С. 20–23.

УДК 519.2

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Г. А. ХАЦКЕВИЧ
Институт бизнеса Белорусского государственного университета
Минск, Беларусь
Т. В. РУСИЛКО
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Одним из требований к базовым профессиональным компетенциям специалиста, освоившего содержание образовательной программы высшего образования I ступени по инженерной специальности, является применение инструментария теории вероятностей и математической статистики для формирования вероятностного подхода в инженерной деятельности.

Согласно учебным планам УО «ГрГУ имени Янки Купалы» по специальностям «Искусственный интеллект», «Программное обеспечение информационных технологий», «Управление информационными ресурсами» учебная дисциплина «Прикладная статистика» относится к компоненту учреждения высшего образования. Цель данной учебной дисциплины – изучение статистических методов обработки и анализа данных, ориентированных на профессиональную деятельность специалиста, их практическое применение, в том числе с использованием статистических программных продуктов. Задачи учебной дисциплины связаны с формированием у студентов компетенций и компетентностей: владеть методами прикладной статистики и современными программными средствами обработки, анализа и синтеза статистических данных для выявления закономерностей, подготовки аналитических решений, экспертных заключений и рекомендаций в инженерной деятельности, а также для решения управленческих задач.

Вышеперечисленные специальности относятся ИТ-сфере, где важную роль играют искусственный интеллект и его подраздел – машинное обучение. Искусственный интеллект занимается автоматическим анализом, оптимизацией и поиском закономерностей в структурах данных для создания прогнозов, решения различных аналитических задач без вмешательства человека. Таким образом, искусственный интеллект базируется на алгоритмах, которые способны делать аналитические выводы из данных с помощью обучения на примерах. Понятия «анализ данных» и «аналитика», несомненно, включают традиционные статистические методы, с которыми специалисты, их использующие, должны быть как минимум знакомы.

При разработке алгоритмов машинного обучения, как правило, стараются уменьшить число изначальных допущений и более свободно используют различные методы и средства математической статистики для решения поставленной задачи, часто прибегают к эвристике. Традиционная математическая статистика консервативна в своих подходах к задачам и основана на строгих допущениях, особенно в вопросе распределения данных.

Большой проблемой в академических исследованиях и инженерных разработках становится то, что специалисты используют алгоритмы без их понимания и в итоге получают спекулятивные выводы. Становится нормой, что программист использует, например, библиотеку scikit-learn, написанную на языке Python, невежественно абстрагируясь от математической сути используемых алгоритмов. В то же время необходимо помнить, что достижения будущего часто скрыты в решениях, которые в прошлом заводили в тупик из-за слишком строгих математических ограничений.

Далее перечисляются базовые понятия математической статистики и основные статистические модели и методы, которые рекомендуется включать в учебные программы, учебники и учебные пособия по теории вероятностей и математической статистике, прикладной статистике для обучения студентов инженерных специальностей ИТ-сферы.

Прежде всего студентам необходимо иметь хорошую базу подготовки по теории вероятностей: случайные величины и их распределения вероятностей; нормальное распределение и его свойства; основные числовые характеристики случайных величин и их смысл; сходимость «по вероятности» и «почти наверное»; закон больших чисел; центральная предельная теорема.

Знакомство с математической статистикой начинается с изучения сущности выборочного метода, типов измерительных шкал, описательных статистик, графического представления данных. Студенты должны понимать принцип проверки статистических гипотез. Важно ознакомить студентов с критериями согласия, устанавливающими закон распределения. Студенты должны уметь применять статистические критерии для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Следует уделить внимание важнейшим разделам прикладной статистики: параметрические и непараметрические методы проверки гипотез о равенстве средних двух и более выборок; однофакторный дисперсионный анализ; корреляционный анализ; регрессионный анализ; моделирование временных рядов данных; факторный анализ; кластерный анализ; дискриминантный анализ [1, 2]. Глубокое понимание статистики необходимо будущему специалисту для реализации алгоритмов анализа данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хацкевич, Г. А.** Эконометрика: учебник / Г. А. Хацкевич, Т. В. Русилко. – Минск: РИВШ, 2021. – 452 с.
2. **Маталыцкий, М. А.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.

УДК 004.421.2:06:519.67

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЯ СИСТЕМУ MATHCAD

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Системы компьютерной математики предлагают современные способы решения разнообразных задач и являются важным фактором повышения качества математического образования [1]. Одной из таких систем является инженерная система MathCAD [2] – это универсальная среда, которую можно использовать как в образовательном процессе, так и для решения прикладных задач в различных областях [2, 3].

Задачи, возникающие при моделировании, например, электрических, биологических, демографических и других процессов, описываются разностными уравнениями вида [4]

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \ldots + a_0 y(n) = f(n),\ k = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $a_0, a_1, ..., a_k$ – заданные числа; $f(n)$ – заданная функция,
с начальными условиями

$$y(0) = y_0,\ \ y(1) = y_1,\ \ \ldots,\ \ y(k-1) = y_{k-1}. \tag{2}$$

Построим аналитическое решение задачи Коши (1) и (2) в системе MathCAD, используя преобразование Лорана.

Пусть $\{f(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ – последовательность чисел, удовлетворяющих условию $f(n) \equiv 0, n < 0;$ $|f(n)| < Me^{\alpha n},\ M > 0, \alpha > 0.$

Преобразованием Лорана (Z-преобразованием) последовательности $\{f(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ называется функция комплексного переменного $F(z)$, определяемая по формуле [4]

$$Z[f(n)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n}. \qquad (3)$$

Ряд (3) сходится к функции $F(z)$ в области $|z| > R,\ R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(n)|}$.

Последовательность $\{f(n),\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ находится через преобразование $F(z)$ (обратное Z-преобразование) по формуле

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} F(z)\, z^{n-1}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad (4)$$

где C – любая окружность радиусом $R_1 > R$, обходимая против часовой стрелки.

Алгоритм решения задачи Коши (1) и (2).

1. Применить преобразование Лорана к левой и правой частям уравнения (1), учитывая (2).

2. Решить полученное линейное алгебраическое уравнение (систему) относительно изображения.

3. Применить обратное Z-преобразование – восстановить решение исходного уравнения $y(n)$ по его изображению $F(z)$.

Пример 1 – Найти аналитическое решение неоднородного разностного уравнения с начальными условиями, используя функции MathCAD:

$$y(n+2) - 3y(n+1) - 10y(n) = n, \quad y(0) = 3, \quad y(1) = -1.$$

Math-документ.

1. Выполним преобразование Лорана левой и правой частей уравнения, учитывая начальные условия, с использованием встроенной функции ztrans (рис. 1).

$rs(y,n) := y(n+2) - 3\cdot y(n+1) - 10\cdot y(n) \qquad ls(n) := n$

$$rs(y,n) \left| \begin{array}{l} ztrans, n \\ substitute, y(0) = 3 \\ substitute, y(1) = -1 \end{array} \right. \to 10\cdot z - 3\cdot z\cdot ztrans(y(n), n, z) - 3\cdot z^2 + z^2\cdot ztrans(y(n), n, z) - 10\cdot ztrans(y(n), n, z)$$

$zrs(z) := 10\cdot z - 3\cdot z\cdot ztrans(y(n), n, z) - 3\cdot z^2 + z^2\cdot ztrans(y(n), n, z) - 10\cdot ztrans(y(n), n, z)$

$$zls(z) := ls(n)\ ztrans \to \frac{z}{(z-1)^2}$$

Рис. 1

2. Найдем символьное решение полученного линейного уравнения относительно изображения (рис. 2).

$$\mathrm{sol}(z) := \mathrm{zrs}(z) = \mathrm{zls}(z)\ \left|\begin{array}{l}\mathrm{substitute}, \mathrm{ztrans}(y(n), n, z) = p\\ \mathrm{solve}, p\\ \mathrm{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \frac{z\cdot\left(3\cdot z^3 - 16\cdot z^2 + 23\cdot z - 9\right)}{(z-1)^2\cdot(z+2)\cdot(z-5)}$$

Рис. 2

3. Найдем аналитическое решение исходной задачи, используя функцию обратного преобразования Лорана invztrans, и выполним проверку (рис. 3).

$$\mathrm{soleq}(n) := \mathrm{sol}(z)\ \left|\begin{array}{l}\mathrm{invztrans}, z\\ \mathrm{simplify}\\ \mathrm{collect}\end{array}\right. \rightarrow \frac{143\cdot(-2)^n}{63} + \frac{81\cdot 5^n}{112} + \frac{1}{144} - \frac{n}{12}$$

$$\mathrm{rs}(\mathrm{soleq}, n) - \mathrm{ls}(n)\ \mathrm{simplify} \rightarrow 0 \qquad \boxed{\text{проверка}}$$

Рис. 3

Пример 2 – Найти аналитическое решение системы

$$\begin{cases} x(n+1) + x(n) - y(n) = (-2)^n, & x(0) = 1;\\ y(n+1) - 5y(n) + 9x(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Math-документ.

1. Выполнив преобразования Лорана левой и правой частей системы, получим систему линейных алгебраических уравнений. Найдем ее решение (рис. 4).

$$SMat(z,X,Y) = SRs(z) \rightarrow \begin{pmatrix} X - Y - z + X\cdot z \\ 9\cdot X - 5\cdot Y - z + Y\cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{z+2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \quad SMat(z,X,Y) = SRs(z)$$

$$Sols(z) := Find(X,Y)\ simplify \rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{z\cdot\left(-z^2 + z + 13\right)}{(z-2)^2\cdot(z+2)} \\ -\dfrac{z\cdot\left(6\cdot z - z^2 + 25\right)}{(z-2)^2\cdot(z+2)} \end{bmatrix}$$

Рис. 4

2. Найдем аналитическое решение исходной задачи, используя функцию обратного преобразования Лорана invztrans, и выполним проверку (рис. 5).

$$S(n) := Sols(z)\ invztrans, z \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{23\cdot 2^n}{16} - \dfrac{7\cdot(-2)^n}{16} - \dfrac{11\cdot 2^n\cdot n}{8} \\ \dfrac{25\cdot 2^n}{16} - \dfrac{9\cdot(-2)^n}{16} - \dfrac{33\cdot 2^n\cdot n}{8} \end{bmatrix}$$

$$x(n) := S(n)_0 \rightarrow \frac{23\cdot 2^n}{16} - \frac{7\cdot(-2)^n}{16} - \frac{11\cdot 2^n\cdot n}{8} \qquad y(n) := S(n)_1 \rightarrow \frac{25\cdot 2^n}{16} - \frac{9\cdot(-2)^n}{16} - \frac{33\cdot 2^n\cdot n}{8}$$

$$x(n+1) + x(n) - y(n) - (-2)^n\ simplify \rightarrow 0 \qquad y(n+1) - 5\cdot y(n) + 9\cdot x(n)\ simplify \rightarrow 0$$

Рис. 5

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.

2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система MathCAD 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.

3. **Шушкевич, Г. Ч.** Об опыте применения системы MathCAD в компьютерном моделировании / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV Междунар. науч. конф., Гродно, 17–20 дек. 2019 г. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 131–132.

4. **Мироновский, Л. А.** Моделирование разностных уравнений / Л. А. Мироновский. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2004. – 108 с.

УДК 004.421.2:06:519.67

ПРИМЕНЕНИЕ SYMPY ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Использование систем компьютерной математики [1–3] является важным фактором повышения качества образования и обуславливает изменение не только способов преподавания и изучения вузовских дисциплин, но и отношение студентов к учебе. При таком подходе преодолеваются математические трудности, сокращается количество преобразований, больше внимания уделяется качеству анализа результатов, расширяется круг доступных для решения задач, обеспечивается возможность представления результатов вычислений в графической форме.

Рассмотрим применение операторного исчисления [4] для аналитического решения волнового уравнения, используя Python-библиотеку символьных вычислений Sympy. Приведем алгоритм решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = A\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + B\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + C\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Du(x,t) + f(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le \ell; \qquad (2)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\ell,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \qquad (3)$$

Обозначим через $U(x,p)$, $F(x,p)$ изображения функций $u(x,t)$, $f(x,t)$:

$$U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\exp(-pt)\,dt, \quad F(x,p) = \int_0^\infty f(x,t)\exp(-pt)\,dt.$$

Считая переменную x параметром, применяя правило дифференцирования оригинала и учитывая условия (2), получим следующие соотношения, выражающие частные производные по переменной t через изображение $U(x,p)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = pU(x,p) - \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = p^2 \cdot U(x,p) - p \cdot \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Частные производные функции $u(x,t)$ по переменной x представляются через изображение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,p) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,p).$$

На основании сделанных преобразований частных производных переходим от исходного уравнения в частных производных (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно изображения $U(x,p)$ (дифференцирование выполняется только по переменной x):

$$A\frac{d^2}{dx^2}U(x,p) + B\frac{d}{dx}U(x,p) + \left(Cp + D - p^2\right)U(x,p) = \left(C - p\right)\varphi_1(x) - \varphi_2(x) - F(x,p).$$

Находим общее решение данного уравнения с помощью функции dsolve.

Затем выполняем граничные условия (3) и находим аналитическое решение поставленной задачи с помощью функции inverse_laplace_transform.

Задача. Найти аналитическое решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \sin \pi x, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|_{t=0} = -\sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Построить графики функции $u(x,t)$ при некоторых значениях переменной t.

Python-документ (рис. 1).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.plotting import plot
from sympy import *
t=symbols('t', positive=True);  x,l,s,p =symbols("x, l, s, p")
eqn=Eq(u(x).diff(x,2) - p*p*u(x), -p*sin(pi*x)+sin(pi*x))
print('***** Исходное дифференциальное уравнение')
pprint(eqn); print('***** Общее решение дифференциального уравнения')
zk=dsolve(eqn, u(x));  pprint((zk.rhs))
# Выполнение граничных условий и нахождение решения
eq1 = zk.rhs.subs(x, 0);  eq2 = zk.rhs.subs(x, 1);  var(' C1 C2 ')
var(' C1 C2 ');  seq = solve([eq1, eq2], C1, C2)
rez = zk.rhs.subs([(C1, seq[C1]), (C2, seq[C2])])
print('****** Решение дифференциального уравнения \
с учетом нулевых граничных условий ',"\n");  pprint(rez)
print('****** Решение исходного дифференциального уравнения',"\n")
L_ = inverse_laplace_transform(rez, p, t);  pprint(L_)
L3 = lambdify((x,t), L_, 'numpy');  x1 = np.linspace(0, 1,25)
plt.title('Графики функции u(x,t)', fontsize=14)
plt.xlabel('Переменная x',fontsize=12); plt.ylabel('Функция u(x,t)',fontsize=12)
plt.plot(x1, L3(x1,0.1), 'r--', linewidth=2, label = 't = 0.1');
plt.plot(x1, L3(x1,0.2),'c-',linewidth=2,label = 't = 0.2');
plt.plot(x1, L3(x1,0.3),'b:',linewidth=2,label = 't = 0.3');
plt.plot(x1, L3(x1,0.35),'y-.',linewidth=2,label = 't = 0.35');
plt.legend();  plt.grid(True)
```

Рис. 1

Результат вычисления (рис. 2).

```
***** Исходное дифференциальное уравнение
                    2
    2              d
- p  ·u(x) +  ───(u(x)) = -p·sin(π·x) + sin(π·x)
                     2
                   dx

***** Общее решение дифференциального уравнения
      -p·x         p·x     p·sin(π·x)    sin(π·x)
C₁·e      + C₂·e      +  ──────────  -  ────────
                            2    2        2    2
                           p  + π        p  + π
```

Рис. 2

```
****** Решение дифференциального уравнения с учетом нулевых граничных условий

p·sin(π·x)   sin(π·x)
────────── - ────────
  2    2       2    2
 p  + π       p  + π
****** Решение исходного дифференциального уравнения

-(sin(π·t) - π·cos(π·t))·sin(π·x)
─────────────────────────────────
                π
```

Окончание рис. 2

График функции $u(x, t)$ для некоторых значений переменой t (рис. 3).

Рис. 3

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Computer Algebra in Education [Electronic resource]. – Mode of access: https://math.unm.edu/~aca/ACA/2023/education.html.
2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система MathCAD 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
3. **Шушкевич, Г. Ч.** Аналитическое решение дифференциальных уравнений с использованием библиотеки Sympy / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 109–112.
4. **Корзников, А. Д.** Операторное исчисление / А. Д. Корзников, О. М. Королева. – Минск: БНТУ, 2021. – 85 с.

Научное издание

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 22 февраля 2024 года)

Печатается в авторской редакции

Редакторы *И. В. Голубцова*, *А. А. Подошевко*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать 08.02.2024. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,94. Тираж 10 экз. Заказ № 111.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.