

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Преподавание математики в высшей школе
и работа с одаренными студентами
в современных условиях**

**Teaching mathematics in higher education
and working with gifted
students in contemporary context**

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 23 февраля 2023 года)



Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2023

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1
П72

Редакционная коллегия: д-р техн. наук, проф. *М. Е. Лустенков* (гл. редактор); канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Машин* (зам. гл. редактора); д-р техн. наук, проф. *В. М. Пашкевич* (зам. гл. редактора); канд. физ.-мат. наук, доц. *В. Г. Замураев*; канд. физ.-мат. наук, доц. *И. И. Маковецкий*; канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Романенко*; канд. пед. наук, доц. *Е. Л. Старовойтова* (отв. секретарь)

П72 **Преподавание** математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context: материалы Междунар. науч.-практ. семинара / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – 122 с.: ил.
ISBN 978-985-492-290-4.

В сборнике представлены материалы научно-практического семинара, традиционно проводимого в Белорусско-Российском университете.

УДК 37.091.3:51
ББК 74.58:22.1

ISBN 978-985-492-290-4

© Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

АПУШКИНСКАЯ Д. Е. Чем занять толкового студента?.....	5
АРСЛАНБЕКОВА С. А., ДИК Е. Н. О приемах работы с разноуровневой группой обучающихся в преподавании математики	6
ASTASHOVA I. V. On new students' and phd students' results in qualitative theory of differential equations	10
БАДАК Б. А., ДОЛГОПОЛОВА О. Б. О «коучинг»-технологии в преподавании математики в классическом университете	16
БЕККЕР И. А. Составление тестовых заданий по методам оптимизации в системе MOODLE	18
БЕЛЕЦКАЯ Н. В., ШАТИНА А. В. Изучение темы «Методы решения функциональных уравнений» в рамках работы выездной математической школы РТУ МИРЭА.....	20
БОНДАРЕВ А. Н. Об использовании онлайн-калькуляторов при обучении математике на автомеханических специальностях	25
БОРТКОВСКАЯ М. Р. Математика для одаренных студентов физико-технических направлений обучения: эмпирические выводы из опыта преподавания с 2007 г. по настоящее время.....	27
БУТОМА А. М. Об опыте проведения междисциплинарной олимпиады инновационного характера «прикладная математика»	29
БУТОМА А. М. Функции обучения математике и обеспечение их реализации в высшей школе	32
ВЕЛИКОВИЧ Л. Л. Теория решения задач в действии	36
ГАРИСТ В. Э. Элементы математической логики в системах компьютерной математики.....	40
ГРОБОВА Т. А., КОНОНОВ М. Н., ГРОБОВА С. К. Роль университета в популяризации математического образования в регионе.....	43
ДОРОФЕЕВА Ю. А. Особенности методической организации межфакультетских занятий по теории игр	46
ЗАМУРАЕВ В. Г. Решения наиболее сложных задач XII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике	48
ИВАЩЕНКО И. А., ДОМАШОВ В. П. Актуальность межкафедрального научно-методического семинара по работе с одаренной молодежью	52
КАЛЬНЕЙ С. Г., КОНСЕВИЧ Н. Н., МИГУНОВА Е. С., ЧАЙКИНА Е. В. О выборе дистракторов в тестовых заданиях по высшей математике	55
КОЗЛОВ А. Г. Использование языка программирования Python на лабораторных занятиях в курсе «Дискретная математика и математическое моделирование» при изучении темы «Способы задания графов»	59
КУЗНЕЦОВА А. А. Компьютерные математические системы в курсе статистики	60

ЛЕОНТЬЕВА Н. В. Применение возможностей системы GeoGebra при обучении решению задач конструктивной геометрии.....	63
ЛИВИНСКАЯ В. А. О важности визуализации при решении прикладных задач.....	66
МАКОВЕЦКАЯ О. А. Особенности фондов оценочных средств математических дисциплин для оценки сформированности компетенций	69
МАКОВЕЦКИЙ И. И. Применение межпредметных заданий в процессе изучения современных систем символьной математики и других математических пакетов	71
МАРЧЕНКО И. В. Структурно-логические схемы при изучении рядов	73
МАСТИХИНА А. А., МАСТИХИН А. В. Преподавание дискретной математики во втузе: нахождение регулярных выражений.....	76
МУРЗИНА Э. Ф., ЗАГИРОВ И. И. Математическое описание движения механического объекта в среде Mathcad.....	79
ОРЛОВА Т. Ю. Система упражнений для математического кружка по теме «Пределы»	83
ПАСТУШОНОК С. Н. Практико-ориентированное естественно-научное образование курсантов – будущих офицеров нашей страны	85
РЕВЯКИН А. М., БАРДУШКИНА И. В., ТЕРЕЩЕНКО А. М. Жадный алгоритм в задачах дискретной оптимизации	88
РОМАНЕНКО А. А. Об изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения».....	92
РОМАНОВИЧ Л. А., КАБЕТОВА И. В. О подготовке будущего учителя математики в современных условиях	95
СОЛОВЬЕВА И. Ф. О теории вероятностей и ее роли в учебном процессе.....	98
СТАРОВОЙТОВА Е. Л. Математическое моделирование как компонент прикладной математической подготовки студентов.....	101
СТАРОВОЙТОВА Е. Л. Методические аспекты обучения математике: активизация учебно-познавательной деятельности.....	104
СТАРОВОЙТОВА Т. С. Дифференциация как дидактическое средство обучения математике в техническом вузе.....	107
ШУШКЕВИЧ Г. Ч., ШУШКЕВИЧ С. В. Аналитическое решение дифференциальных уравнений с использованием библиотеки SymPy	109
ШУШКЕВИЧ Г. Ч., ШУШКЕВИЧ С. В. Компьютерное моделирование прикладных задач в среде MathCad.....	113
ЯКИМОВ А. И., ЗАЙЦЕВ А. А., САВИЦКИЙ Е. И. Применение языка программирования Python при изучении теории графов.....	117
ЯКИМОВ А. И., ПЕТРОВА А. А., МИКАЛУЦКИЙ Д. В. Технология управляемой самостоятельной работы по теории графов	120

ЧЕМ ЗАНЯТЬ ТОЛКОВОГО СТУДЕНТА?

Д. Е. АПУШКИНСКАЯ

Российский университет дружбы народов
Москва, Россия

Вниманию читателей предлагается выстроенная в Математическом институте им. С. М. Никольского Российского университета дружбы народов (РУДН) система работы с одаренными студентами, приведены формы работы с этой категорией обучающихся.

Проблемы обучения неоднородного по уровню подготовки состава студентов хорошо известны практически всем университетским преподавателям. Поскольку лекции и упражнения ориентируются (особенно на младших курсах) на так называемого «среднего» студента, то «слабые» студенты начинают отставать, а «сильные» – терять интерес к изучаемому предмету.

Часто для поддержания интереса толковых студентов предлагается как можно раньше привлекать их к научной работе. Данная идея хороша лишь в теории. Заметим, что студент 1–2 курса еще очень мало знает и поэтому (за редким исключением) пока не может заниматься серьезной научной деятельностью, а активный студент 3–4 курса уже где-то зарабатывает деньги, часто не по изучаемой специальности, и он уже не хочет никаких научных изысканий.

Таким образом, встает задача тем или иным способом удержать интерес у «сильного» младшекурсника до момента его привлечения к научным исследованиям.

Одним из вариантов решения этой проблемы является олимпиадное студенческое движение. Участие в олимпиадах способствует расширению кругозора, развитию логического мышления и способности абстрактно мыслить, активизирует и совершенствует умения и навыки по выбранному предмету.

В Математическом институте РУДН (далее – МИ РУДН) за последние 2,5 года сложилась следующая структура работы с «олимпиадниками». Ежедневно проводятся занятия двух кружков по решению олимпиадных задач. Кружок первого уровня ориентирован, в основном, на первокурсников, а кружок второго уровня – на студентов 3–4 курса. Студенты 2-го курса имеют возможность свободного выбора уровня кружка. Занятия проходят в онлайн-режиме по субботам или по воскресеньям (время выбирается на первом занятии в учебном году и по необходимости корректируется в дальнейшем). Занятия по очереди проводят 4 преподавателя-тренера (по двое на каждый уровень). Кроме того, существует руководитель команды, который занимается разнообразной организационной деятельностью: выбором олимпиад, в которых планируется принимать участие, формированием команд, регистрацией, организацией поездок,

работой в международных жюри и т. д. Тематика занятий кружков определяется следующим образом: непосредственно перед планируемыми олимпиадами идет интенсивная подготовка на основе задач конкретных олимпиад прошлых лет, а в промежутках поощряется свободный выбор тем тренерами и студентами.

К другому популярному способу удержания студенческого интереса к выбранной специальности следует отнести индустриальные проекты. Они обычно функционируют по следующей схеме: после постановки прикладной задачи внешним заказчиком сотрудниками МИ РУДН определяется объем и план работ, а после этого объявляется набор студентов, желающих принять участие в проекте. В результате формируется автономная рабочая группа в составе 3–4 студентов и 3–4 сотрудников из числа ППС, которая обеспечивает реализацию проекта. Основной костяк студентов набирается с 3-го курса, но есть также примеры успешного участия второкурсников. Для каждой индустриальной группы создается еженедельный рабочий семинар, который проводится в смешанном (онлайн/оффлайн) режиме.

Участвуя в индустриальных проектах, студенты получают заработную плату, а также приобретают опыт работы по специальности, включающий навыки взаимодействия в команде, освоение реального математического моделирования и прикладных программных пакетов. Кроме того, по результатам реализации каждого из индустриальных проектов обычно защищаются 2–3 выпускные квалификационные работы, а также публикуются несколько научных статей и регистрируются РИДы.

УДК 1599-053.6

О ПРИЕМАХ РАБОТЫ С РАЗНОУРОВНЕВОЙ ГРУППОЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

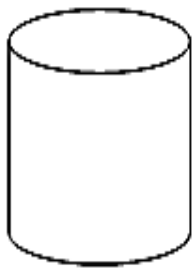
С. А. АРСЛАНБЕКОВА, Е. Н. ДИК

Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

В аграрный университет поступают ребята, которые не предполагают своей профессиональной деятельностью область математики «в чистом виде», но широко применяют математические знания в исследовательской части (при выполнении научных проектов, при обработке экспериментальных данных, для подтверждения достоверности результатов исследований и др.). Обучающимся, которые имеют определенную склонность к изучению математики, требуется особое внимание со стороны преподавателя. Рассмотрим варианты развития спо-

способностей обучающихся в условиях аудиторной работы и их домашней подготовки, которые не требуют значительных временных затрат преподавателя и укладываются в нормативы рабочего времени. В процессе проведения занятий по математике реализуется система работы со студентами по следующим направлениям: индивидуальные задания на практических занятиях и при выполнении расчетно-графической работы; подготовка докладов к научной сессии учащихся; участие в интернет-олимпиадах.

Так, изучая раздел «Дифференциальное исчисление», предлагается решить задачу о размерах емкости для транспортировки топлива. К примеру, для цилиндрической емкости нахождение наименьшей длины шва сварки представляется следующим образом (рис. 1).



$$\begin{aligned}
 V &= \pi r^2 h \\
 h &= \frac{V}{\pi r^2} \\
 l &= 4\pi r + \frac{V}{\pi r^2} \rightarrow \min \\
 F'(r) &= 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3} = 0 \quad 4\pi = \frac{2V}{\pi r^3} \quad \pi r^3 = \frac{2V}{4\pi} \quad r^3 = \frac{2V}{4\pi^2} = \frac{V}{2\pi^2} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}} \\
 h &= \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3 2\pi^2}{\pi^3 r^6 V}} = \sqrt[3]{\frac{2V^2}{\pi^6}} = \sqrt[3]{\frac{2V^2}{\pi} \frac{1}{r^2}} \\
 r &= \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}, \quad h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Расчет наименьшей длины сварного шва

Выполняя расчетно-графические работы по специальным дисциплинам, обучающиеся используют знания, полученные на занятиях по математике. Изучая теоретические основы электротехники, требуется умение работать с комплексными числами (рис. 2).

Ежегодно, к проведению научной сессии обучающихся, студенты решают ряд практических задач, которые требуют знания специальных дисциплин и математики.

К примеру, рассматривается вывод зависимости величины давления на поверхность, где требуется знание правил колебательного движения. В результате решения получается дифференциальное уравнение (рис. 3).

Учитывая разную степень математической подготовки обучающихся, используются различные способы постановки задачи. Для начала предлагается

изучить уже решенную задачу и по этому образцу решить задание с новыми данными. Следующим этапом является составление подобной модели для другой формулировки задачи. Так, задачи об остывании хлеба, о вычислении времени преступления, о времени доставки продукта сводятся к составлению дифференциального уравнения на основе закона теплоотдачи. Затем обучающимся предлагается составить новую задачу, решение которой будет аналогично изученным.

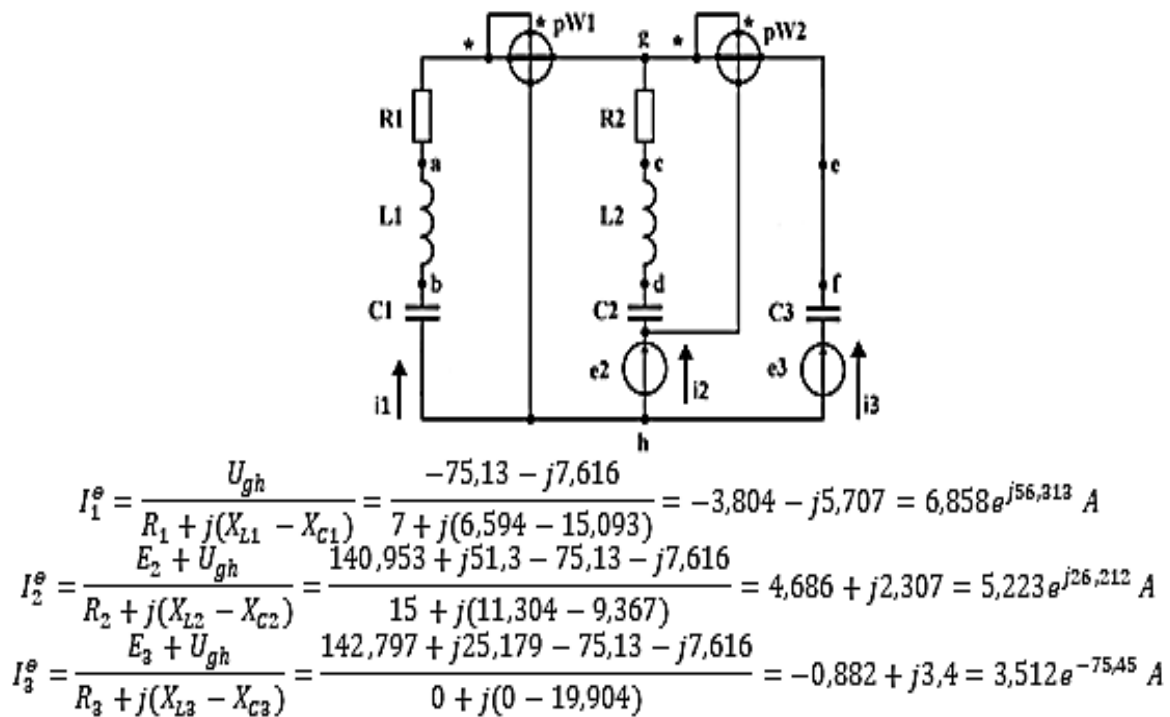


Рис. 2. Расчет цепей переменного тока

$$mx'' = -ax' - kx + F_0 \sin(\omega t + \delta),$$

$$x'' + \frac{a}{m} x' + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \delta), \quad n = \frac{a}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$x'' + 2nx' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \delta)$$

Рис. 3. Расчет величины давления на поверхность

В магистерских исследованиях, при выполнении научных проектов, обучающиеся активно используют методы обработки экспериментальных данных, а также методы подтверждения достоверности полученных результатов исследований.

К примеру, в работе, описывающей износ буровых долот, получены оценки выборочной средней величины, выборочного среднего квадратического отклонения износа буровых долот. Для интервального вариационного ряда строится гистограмма частот (рис. 4).

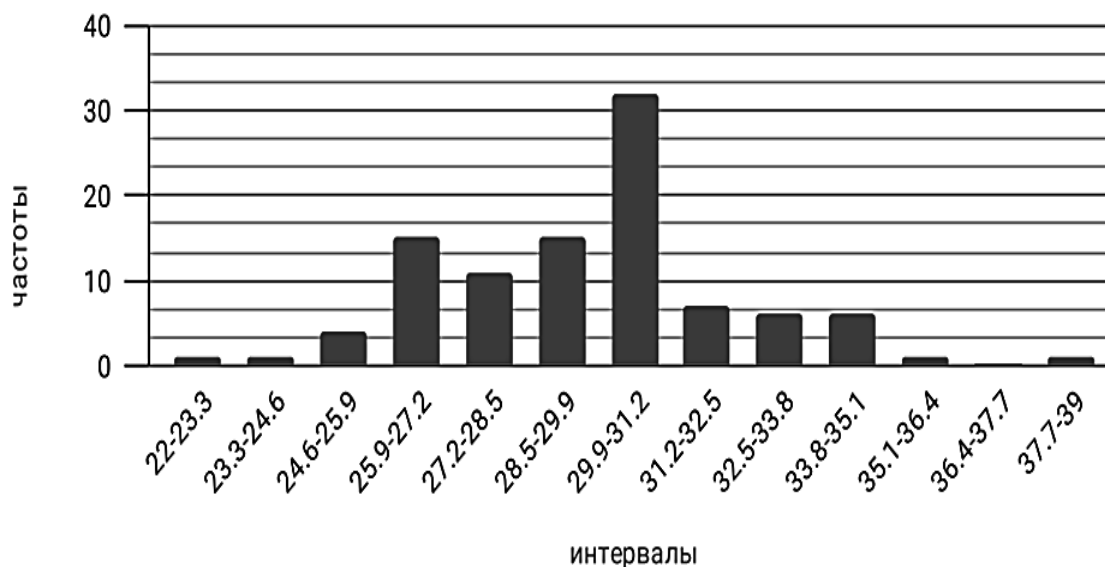


Рис. 4. Гистограмма частот

Итогом такой работы преподавателей являются высокие показатели обученности студентов при сдаче интернет-экзамена, а также результативное участие в интернет-олимпиадах, включая очные туры. Описанные приемы обучения позволяют эффективно формировать у обучающихся навыки применения знаний, полученных на занятиях по математике, при ведении исследовательской работы и в будущей профессиональной деятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Багаутдинова, И. И.** Применение современных технологий в преподавании дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация» / И. И. Багаутдинова, А. Ф. Фаюршин // Реализация образовательных программ высшего образования в рамках ФГОС ВО: материалы Всерос. науч.-метод. конф. в рамках выездного совещания НМС по природообустройству и водопользованию Федерального УМО в системе ВО. – 2016. – С. 43–49.
2. **Гусев, Д. А.** Интеграция классических и современных методов преподавания начертательной геометрии / Д. А. Гусев, И. И. Багаутдинова // Реализация образовательных программ высшего образования в рамках ФГОС ВО: материалы Всерос. науч.-метод. конф. в рамках выездного совещания НМС по природообустройству и водопользованию Федерального УМО в системе ВО. – 2016. – С. 99–103.

УДК 517.91

ON NEW STUDENTS' AND PhD STUDENTS' RESULTS IN QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. V. ASTASHOVA

Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics
and Mathematics, Chair of Differential Equations
and Plekhanov Russian University of Economics, Institute of Digital Economics
and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics

This article presents some new students' and PhD students' results in qualitative theory of differential equations. Previous reviews on this topic can be found in [1–3].

1. On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model (I. Astashova, K. Belikova) [4].

Problem. We consider a non-linear parameter-dependent system associated with a mathematical model of cold plasma. For any parameter value, we obtain a criterion of whether the solution to this system with given initial data is periodic. For periodic solutions, we give an analytic formula for the period.

Consider the dynamical system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^2; \\ \frac{dy}{dt} = x - \gamma xy \end{cases} \quad (1.1)$$

where γ is a real parameter.

Our main aim is to determine, for any γ , according to initial data (x_1, y_1) , whether or not the related trajectory of the system is periodic. If some trajectory of (1.1) is periodic, we obtain an explicit formula for its period.

This system arises in the mathematical model of cold plasma (see [5–9]). In [8, 9] the existence of periodic solutions to (1.1) and criterion for their existence are studied for some special meanings of parameter γ ($\gamma = 1$ or 2) having a physical sense.

Theorem 1.1. *If (x_1, y_1) is not a fixed point of system (1.1), then its trajectory passing through this point is periodic if and only if $1 - \gamma y_1 > 0$ and either $\gamma \geq 2$ or $(2 - \gamma)x_1^2 + 2y_1 < 1$.*

If some trajectory of (1.1) is periodic, we can give an explicit formula for its period (see [4]).

2. Stability analysis of mathematical model of forestry biomass (Elmira Tussupbekova) [10].

Problem. We study and analyse dynamic model for forestry biomass preservation, which is depleted due to the deforestation, the growth of the industry and different

climatic factors. The age structure of forest biomass is considered through the division into pre-mature and mature populations. Restrictions for cutting down pre-mature population are imposed for industries.

Research and analysis of a dynamic model for the conservation of forestry, which is being depleted due to deforestation, the growth of the forest industry, and climatic factors, is being carried out. The age structure of forest biomass is considered through division into young P and mature M populations. For industrial enterprises I , a restriction is imposed on cutting down young populations. As an alternative resource for industrial enterprises, a modified Leslie-Gower function is introduced [11, 12].

We study a system of nonlinear differential equations, investigates the stability of solutions to a system that admits linearization in a neighborhood of equilibrium positions. The interaction between the quantities P , M , I is described by a dynamic system:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \beta P + \gamma P;$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M;$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\right) I - d_2 I,$$

where $P(0) \geq 0$, $M(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, and $r, \beta, k, \gamma, q_1, E, d_1, d_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are real parameters.

As a result of the analysis of the studied model, the field of directions of the dynamic system and phase portraits in the projection in two variables were depicted. In the course of the work, conditions were identified under which the equilibrium positions were a stable node, an unstable node, a stable saddle-node, an unstable saddle-node. From the literature analysis, we can state that the main assumptions of the Leslie model are applicable to our system of equations. The conditions for achieving bioeconomic equilibrium were obtained. As a result of numerical simulation, graphs were constructed that correspond to the results obtained in the work. In the course of the work, each equation of the system was also analyzed separately.

3. On extensibility and asymptotics of solutions to Riccati equation with real roots of the right part (I. Astashova, V. Nikishov) [13].

Problem. For the Riccati equation with two real bounded roots of the right side the extensibility and asymptotics of its solutions depending on the location of the initial value and the properties of the roots of the right side are studied.

Consider Riccati equation

$$y' = P(x) + Q(x)y + y^2, \quad (3.1)$$

where functions $P(x)$ and $Q(x)$ are continuous and bounded on \mathbb{R} , $Q^2(x) - 4P(x) \geq 0$ for $x \in (-\infty, +\infty)$. Then the equation

$$y^2 + Q(x)y + P(x) = 0, \quad (3.2)$$

has bounded real roots. Thus (3.1) can be written in form

$$y'(x) = (y(x) - \alpha_1(x))(y(x) - \alpha_2(x)). \quad (3.3)$$

Let us further assume that $\alpha_1(x), \alpha_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$; $\alpha_2(x) > \alpha_1(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ or $\alpha_2(x) = \alpha_1(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Problem 1. Investigation of the extensibility, limitation and asymptotics of solutions of equation (3.3) depending on the location of the initial values relative to $\alpha_1(x)$ and $\alpha_2(x)$.

Theorem 3.1. *Let $x_0 \in \mathbb{R}$. Then every solution of (3.3) defined at x_0 is limited from below for $x \geq x_0$ and limited from above for $x \leq x_0$.*

Theorem 3.2. *If M is a constant, such that $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq M$ for $x \geq x_0$. Then every solution y of (3.3) satisfying the condition $y_0 = y(x_0) > M$ increases monotonically for $x \geq x_0$ and there exists $\bar{x} \in \mathbb{R}$, such that*

$$x_0 < \bar{x} < x_0 + \frac{1}{y_0 - M}, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} y(x) = +\infty.$$

Remark. In particular case $\alpha_2(x) = \alpha_1(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ the first statement of Theorem 5.5 [17] is obtained. Thus, Theorem 3.2 complements Theorem 5.5 [17].

Theorem 3.3. *If m is a constant, such that $\alpha_2(x) \geq \alpha_1(x) \geq m$ for $x \leq x_0$, then every solution y of (3.3) satisfying the condition $y_0 = y(x_0) < m$ increases monotonically for $x \leq x_0$ and there exists $\bar{x} \in \mathbb{R}$, such that*

$$x_0 > \bar{x} > x_0 - \frac{1}{m - y_0}, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} y(x) = -\infty.$$

Obtained theorems 3.1–3.3 complement results of [17].

Problem 2. Investigation of extensible solutions of the equation (3.3) for the existence of a finite limit as $x \rightarrow +\infty$. Investigation of possible values of such a limit.

Lemma 3.1. Consider equation (3.3). Let $\omega \leq +\infty$, $x_0 < \omega$. Then there exist $S_* \in [x_0, \omega)$ and solution y_* of the equation defined on (S_*, ω) , such that for every solution y defined on (S, ω) conditions $S \geq S_*$, $y(x) \leq y_*(x)$ where $x \in (S, \omega)$ are satisfied.

$y_*(x)$ from the last lemma is called **principal solution**.

Theorem 3.4. Let y_1, y_2 be two different solutions of (3.3) defined on $[x_0, +\infty)$. Let both of them have finite limits as $x \rightarrow +\infty$ and let these limits be different. Then every solution of (3.3) defined on $[x_0, +\infty)$ has a finite limit as $x \rightarrow +\infty$.

Theorem 3.5. Let $y_1 > y_2$ be two different solutions of (3.3) defined on $[x_0, +\infty)$. Let both of them have finite limits (which may be equal) as $x \rightarrow +\infty$. Then every solution of (3.3) defined at the point x_0 with initial value $y(x_0) \leq y_1(x_0)$ is extensible on $[x_0, +\infty)$ and has a finite limit as $x \rightarrow +\infty$.

Theorem 3.6. Let (3.3) have solutions defined on $[x_0, +\infty)$. Let $y_1 = y_*$ be the principal solution for the interval $(x_0, +\infty)$. Let $y_1(x)$ and some solution $y_2(x) < y_1(x)$ have finite limits as $x \rightarrow +\infty$. Then every solution of (3.3) defined on $[x_0, +\infty)$ and different from $y_*(x)$ has a finite limit as $x \rightarrow +\infty$. This limit is equal to the limit of $y_2(x)$ as $x \rightarrow +\infty$.

Problem 3. The structure of the stabilizing solutions set of the equation (3.3) in one important special case.

Definition 3.1 [16]. Solution $y(x)$ of (3.3) is called a **stabilizing solution**, if there exist finite limits

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) =: y_{\pm} \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Definition 3.2 [16]. Function α_1 и α_2 from (3.3) satisfy **the conditions of stabilization**, if there exist finite limits

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_j(x) =: \alpha_{j,\pm} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2. \quad (3.5)$$

Definition 3.3 [16]. Functions α_1 and α_2 satisfy **the conditions of monotone stabilization**, if there exists $A > 0$, such that

$$\text{for every } x \notin [-A, A] \text{ the conditions } \alpha'_1(x) \neq 0, \alpha'_2(x) \neq 0 \text{ satisfy.} \quad (3.6)$$

It is further assumed that $\alpha_2(x) > \alpha_1(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$; functions $\alpha_1(x)$ and $\alpha_2(x)$ satisfy (3.5) and (3.6). As shown in [16], in this case all bounded solutions are stabilizing, all stabilizing solutions are monotonically stabilizing and $y_- = \alpha_{1,-}$ or $\alpha_{2,-}$, $y_+ = \alpha_{1,+}$ or $\alpha_{2,+}$.

According to [16] all stabilizing solutions of (3.3) are divided into four types:

I type: $y_- = \alpha_{1,-}$, $y_+ = \alpha_{1,+}$; II type: $y_- = \alpha_{2,-}$, $y_+ = \alpha_{1,+}$;

IV type: $y_- = \alpha_{1,-}$, $y_+ = \alpha_{2,+}$; III type: $y_- = \alpha_{2,-}$, $y_+ = \alpha_{2,+}$.

Theorem 3.7. Let $\frac{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}{4} + \frac{(\alpha_1(x) + \alpha_2(x))'}{2} =: Y_0(x) \leq 0, x \in (\mathbb{R} \setminus [a, b])$.

Let also $\alpha_{1,+} \neq \alpha_{2,+}$, $\alpha_{1,-} \neq \alpha_{2,-}$. Then (3.3) has no stabilizing solutions.

The last theorem complements Theorem 3.4 [16].

Theorem 3.8. Let $\alpha_{1,+} \neq \alpha_{2,+}$, $\alpha_{1,-} \neq \alpha_{2,-}$, and let (3.3) have a stabilizing of the II type. Then there exist unique solutions y_I and y_{III} of the I and the III type respectively. Let $y(x)$ be a solution of (3.3). Then:

- if $y_I < y < y_{III}$, then $y(x)$ is a stabilizing solution of the II type;
- if $y > y_{III}$, then there exists $x^* \in \mathbb{R}$, such that $y(x)$ is extensible on the interval $(-\infty, x^*)$ and

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha_{2,-}, \quad \lim_{x \rightarrow x^*-0} y(x) = +\infty;$$

- if $y < y_I$, then there exists $x^* \in \mathbb{R}$, such that $y(x)$ is extensible on the interval $(x^*, +\infty)$ and

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \alpha_{1,+}, \quad \lim_{x \rightarrow x^*+0} y(x) = -\infty.$$

Theorem 3.9. If $\alpha_{1,+} \neq \alpha_{2,+}$, $\alpha_{1,-} \neq \alpha_{2,-}$, then a stabilizing solution of the II type exists if and only if there exist stabilizing solutions of the I and the II types.

Theorem 3.10. Let $\alpha_{1,+} \neq \alpha_{2,+}$, $\alpha_{1,-} \neq \alpha_{2,-}$. Then for (3.3) exactly one of the following statements is true:

- 1) there exists a stabilizing solution of the II type;
- 2) there exists a stabilizing solution of the I type, there exists a unique stabilizing solution of the IV type;
- 3) there exists a stabilizing solution of the III type, there exists a unique stabilizing solution of the IV type;
- 4) all stabilizing solutions, if any, are stabilizing solutions of the IV type.

Theorems 3.8–3.10 complement theorems 2.1–2.4 [16].

Acknowledgement.

The research was partially supported by Russian Science Foundation (scientific project 20-11-20272).

REFERENCES

1. **Astashova, I. V.** On the achievements of students in solving actual problems of the qualitative theory of differential equations / I. V. Astashova // *Teaching Mathematics in Higher Education and Working with Gifted Students in Contemporary Context: International Seminar*. – Mogilyov: Belarus.-Rus. un-ty, 2018. – P. 4–7.
2. **Astashova, I. V.** On new students' results in qualitative theory of differential equations and applications / I. V. Astashova // *Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара*. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – P. 5–8.
3. **Astashova, I. V.** On new PhD students' results in qualitative theory of differential equations / I. V. Astashova // *Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context: материалы Междунар. науч.-практ. семинара*. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – P. 5–9.
4. **Astashova, I. V.** On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model / I. V. Astashova, K. N. Belikova // *Functional Differential Equations*. – 2022. – № 3–4. – P. 7–15.
5. **Aleksandrov, A. F.** Principles of Plasma Electrodynamics / A. F. Aleksandrov, L. S. Bogdankevich, A. A. Rukhadze. – New York: Springer, 1984.
6. **Ginzburg, V. L.** Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma / V. L. Ginzburg. – New York: Pergamon, 1970.
7. **Silin, V. P.** Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-Like Media / V. P. Silin, A. A. Rukhadze. – 2nd ed. – Moscow: Librokom, 2012.
8. **Chizhonkov, E. V.** Mathematical Aspects of Modeling Oscillations and Wake Waves in Plasma / E. V. Chizhonkov. – Moscow: Fizmatlit, 2018; CRC, Boca Raton, 2019.
9. **Rozanova, O. S.** Analytical and numerical solutions of one-dimensional cold plasma equations / O. S. Rozanova, E. V. Chizhonkov // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* – 2021. – № 61:9. – P. 1508–1527; *Comput. Math. Math. Phys.* – 2021. – № 61:9. – P. 1485–1503.
10. **Tusupbekova, E.** Study and analysis of a mathematical model of biomass Conversion / E. Tusupbekova // *Современные проблемы математики и её приложений: материалы Междунар. науч.-практ. конф.* – Душанбе, 2022. – С. 164–165.
11. **Leslie, P. H.** Some further notes on the use of matrices in population mathematics / P. H. Leslie. – Oxford University Press, 1948. – P. 213–245.
12. **Manisha, C.** A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction / C. Manisha, D. Joydip, P. M. Om // *Springer International Publishing Switzerland*. – 2015. – P. 1–10.
13. **Astashova, I. V.** On extensibility and asymptotics of solutions of the Riccati equation with real roots of the right part / I. V. Astashova, V. A. Nikishov // *International workshop on the qualitative theory of differential equations, QUALITDE-2022, 17–19 dec.* – Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2022. – P. 1–4.
14. **Hartman, P.** On an ordinary differential equation involving a convex function / P. Hartman // *Transactions of the American Mathematical Society* 146. – 1969. – P. 179–202.
15. **Hartman, P.** Ordinary differential equations / P. Hartman // *Wiley*. – New York, 1964.
16. **Palin, V. V.** Behavior of stabilizing solutions of the Riccati equation / V. V. Palin, E. V. Radkevich // *J. Math. Sci.* 255. – 2018. – № 5. – P. 455–469.
17. **Egorov, A. I.** Riccati equation / A. I. Egorov. – Moscow: FIZMATLIT, 2001.

УДК 377.13:006.895

О «КОУЧИНГ»-ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Б. А. БАДАК¹, О. Б. ДОЛГОПОЛОВА²¹Белорусский национальный технический университет²Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

В структуре педагогической поддержки студентов особое место занимает «коучинг»-технология – инновационная технология обучения, создающая условия для формирования личности студента как субъекта будущей профессиональной деятельности, способного к реализации своих потенциальных возможностей. Данная инновационная технология способствует актуализации внутренних ресурсов и преподавателя, и студента в достижении планируемого результата.

Под «коучинг»-технологией будем понимать систему реализации совместного социального, личностного и творческого потенциала участников образовательного процесса развития с целью получения максимально возможного эффективного результата. Отметим, что способом измерения результатов обучения оказываются компетенции, определяемые как «способность осуществлять конкретную деятельность в определенной области на основе применения знаний и умений и проявления личностных качеств, делающих эту деятельность успешной» [1, с. 499].

В настоящее время в образовательный процесс современной высшей школы внедряются новые методы, приёмы и программы «коучинг»-технологии. На экономических и технических специальностях Белорусского национального технического университета (БНТУ), а также на Механико-математическом факультете Белорусского государственного университета (БГУ) наиболее распространённой является программа, состоящая из четырёх модулей (табл. 1).

Табл. 1. Реализация четырёхмодульной программы в БГУ и в БНТУ

Название модуля	Основные инструменты коучинга	Основной вопрос модуля
№ 1 «Вдохновение»	1. Тренинговые консультации по решению задач. 2. Использование элементов активной оценки. 3. Моральная поддержка и продвижение студентов. 4. Финансовая поддержка. 5. Написание эссе. 6. Мастер-классы по решению задач	«Каких результатов и каким образом могут достичь студенты?»

Окончание табл. 1

Название модуля	Основные инструменты коучинга	Основной вопрос модуля
	7. Другие коучинговые подходы, применяемые для повышения продуктивности и улучшения уровня успеваемости студентов	
№ 2 «Внедрение. Творчество при поиске решений»	1. Разработка и внедрение проектов, например, «Создание рационально-инновационного проекта для предприятия «Спартак» с помощью методов математического анализа и математической статистики». 2. Использование инжиниринговых услуг. 3. Инструменты, направленные на успешную реализацию проектов: планирование, расстановка приоритетов, управление временем, раскрытие творческих стратегий	«Как студенты могут достичь целей?»
№ 3 «Приверженность. Коучинг глубинных ценностей»	1. Работа с ценностями: раскрытие потенциала студентов через ценности (разработка билингвального пособия под руководством преподавателя для иностранных студентов). 2. Индивидуальный процесс исследования глубинных ценностей и помощь в этом другим (разработка образовательного сайта по элементарной математике для абитуриентов)	«Зачем? Почему это важно?»
№ 4 «Интеграция мастерства. Искусство завершать проекты»	1. Экспресс-диагностика и эффективные коммуникации с университетами Союзного государства (участие в международных форумах Союзного государства). 2. Инструменты повышения стрессоустойчивости студентов	«Как студенты поймут, что достигли целей?»

Следует отметить, результаты анкетирования студентов по вопросам «Должна ли присутствовать поддержка студентов-первокурсников во время обучения со стороны преподавателей? Каким образом она должна проявляться?» показывают, что потребность моральной поддержки (85 %) преобладает над всеми иными потребностями студентов-первокурсников, и этот фактор необходимо учитывать при организации учебного процесса и применении «коучинг»-технологии в обучении.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Окуловский, О. И. Компетенции и компетентностный подход в обучении [Электронный ресурс] / О. И. Окуловский // Молодой ученый. – 2012. – № 12. – С. 499–500. – Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/47/5841>. – Дата доступа: 13.12.2022.

УДК 37.013

СОСТАВЛЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ
ПО МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ MOODLE

И. А. БЕККЕР

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Численные методы решения играют важную роль в математике, позволяя решать различные прикладные задачи, в том числе и оптимизационные. Изучая дисциплину «Методы оптимизации», студенты направлений подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» и 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» формируют навыки применения методов и алгоритмов оптимизации в инженерной деятельности и приобретают опыт разработки программного обеспечения при решении задач оптимизации. В результате изучения курса студент должен знать основные понятия и факты теории оптимизации, постановку задач оптимизации и методы их решения.

Для контроля знаний по дисциплине преподавателем И. А. Беккер разработана система тестов по курсу, которая опирается на банк вопросов с различными элементами опроса: *Верно-Неверно*, *Выбор пропущенных слов*, *Короткий ответ*, *Множественный выбор*, *Перетаскивание в текст*.

Элемент *Перетаскивание в текст* использован для работы с относительно объемными фрагментами теории. В тестовых вопросах типа *Перетаскивание в текст* предлагается блок связного текста из 3–5 предложений с большим множеством вариантов выбора (рис. 1).

Варианты подходящих ответов представлены в одной форме, могут лишь несколько отличаться по смыслу и соответствовать, в общем, нескольким контрольным точкам (рис. 2), что ставит обучающегося в ситуацию не автоматического, а осознанного выбора.

Интерфейс системы MOODLE позволяет отменить перетягивание слова, вернуть его на место, поменять слова-ответы местами, чем дает возможность рассмотреть различные варианты и выбрать/подобрать правильный ответ.

Текст вопроса

0

↶ A B I ≡ ≡ % \$ 📷 📄 🔊 🎥 🔄 🔗

Для построения [[1]] метода [[2]] минимизации, [[3]] по принципу [[4]] сокращения интервала неопределенности, следует задать правило [[5]] на каждом шаге двух внутренних точек. Конечно, желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве [[6]] и для [[7]] интервала. Тогда число [[8]] функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного [[9]] значения функции. В методе [[10]] сечения в качестве двух внутренних [[11]] выбираются точки золотого сечения.

Рис. 1. Структура вопроса

Вопрос **1**
 Пока нет
 ответа
 Балл: 1,00

Для построения метода

минимизации, по принципу

сокращения интервала неопределенности, следует задать правило

на каждом шаге двух внутренних точек. Конечно, желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве

и для интервала. Тогда число

функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного значения функции. В методе

сечения в качестве двух внутренних

выбираются точки золотого сечения.

золотого

нового

следующего

выбора

вычислений

последовательного

конкретного

точек

работающего

одномерной

внутренней

Рис. 2. Вид вопроса при выполнении теста

Задания такого типа хорошо развивают ориентирование в системе терминов учебного курса, закрепляют понятия в виде словосочетаний, связи понятий.

Большим плюсом составления тестового задания в MOODLE является то, что с учётом конкретных целей преподаватель может настроить тесты как на показ правильных ответов с целью коррекции знаний, так и только на контроль знаний (при этом будет выводиться лишь итоговый результат).

УДК 372.851

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ» В РАМКАХ РАБОТЫ ВЫЕЗДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ РТУ МИРЭА

Н. В. БЕЛЕЦКАЯ, А. В. ШАТИНА
Российский технологический университет
Москва, Россия

Выездная математическая школа Российского технологического университета (РТУ МИРЭА) традиционно ежегодно проводится в осеннем семестре, ее занятия посвящены тем разделам математики, которые не входят в академические курсы, преподаваемые в университете. Так, традиционно, на школе читаются лекции и проводятся занятия по теме «Функциональные уравнения». Приведем разбор некоторых функциональных уравнений, предлагавшихся на студенческих олимпиадах различного уровня.

Задача 1. Решить функциональное уравнение $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1-x) = x$.

Решение

Выполним замену переменной $t = \frac{1}{x}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = \frac{t-1}{t}$. Тогда уравнение примет вид

$$f(t) + f(\varphi(t)) = \frac{1}{t}.$$

Заметим, что $\varphi(\varphi(t)) = -\frac{1}{t-1}$, $\varphi(\varphi(\varphi(t))) = t$. Подставляя в последнее уравнение вместо t последовательно $\varphi(t)$, $\varphi(\varphi(t))$, имеем

$$f\left(\frac{t-1}{t}\right) + f\left(-\frac{1}{t-1}\right) = \frac{t}{t-1}; \quad f\left(-\frac{1}{t-1}\right) + f(t) = -t + 1.$$

Таким образом, получена система линейных уравнений третьего порядка относительно неизвестных $a = f(t)$, $b = f\left(\frac{t-1}{t}\right)$, $c = f\left(-\frac{1}{t-1}\right)$

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{t}; \\ b + c = \frac{t}{t-1}; \\ a + c = 1 - t. \end{cases}$$

Откуда находим $a = f(t) = \frac{t^3 - t^2 + 1}{2t(1-t)}.$

Следовательно, $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x(1-x)}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1.$

Задача 2. Найти на промежутке $(0; +\infty)$ дифференцируемое решение функционального уравнения $f(xy) = f(x) + f(y).$

Решение

Продифференцируем заданное уравнение сначала по переменной x , а затем по переменной y :

$$f'(xy) \cdot y = f'(x); \quad f'(xy) \cdot x = f'(y).$$

Умножим первое равенство на x , а второе – на y :

$$f'(xy) \cdot yx = f'(x)x; \quad f'(xy) \cdot xy = f'(y)y.$$

Так как левые части полученных равенств равны, то равны и правые части этих равенств: $f'(x)x = f'(y)y.$

Выражение в левой части последнего равенства зависит только от переменной x , а в правой части – только от y . Это возможно только тогда, когда $f'(x)x = f'(y)y = C$, где C – константа. Тогда

$$f'(x) = \frac{C}{x}; \quad f(x) = C \ln x + C_1.$$

Подставим полученную функцию в исходное уравнение:

$$C \ln xy + C_1 = C \ln x + C_1 + C \ln y + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тогда $f(x) = C \ln x$.

Задача 3. Пусть функция f непрерывна в нуле и на всей оси удовлетворяет соотношению $2f(2x) = f(x) + x$. Найти f .

Решение

Из условия задачи следует, что $2f(0) = f(0) + 0$, откуда $f(0) = 0$.

Далее

$$f(2x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{x}{2}.$$

Из этого соотношения получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8} \right] + \frac{x}{4} = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) x = \\ &= \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x}{16} \right] + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) x = \frac{1}{2^3} f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right) x = \dots = \\ &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \right) x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $f(x) = \frac{x}{3}$.

Проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет исходному уравнению.

Ряд задач по теме «Функциональные уравнения» можно отнести к функциональным уравнениям Коши.

Определение. Функциональными уравнениями Коши называются уравнения вида

- 1⁰. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in R;$
- 2⁰. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in R;$
- 3⁰. $f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad x > 0, y > 0;$
- 4⁰. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad x > 0, y > 0.$

В курсе математического анализа доказывается [1], что единственными решениями в классе непрерывных функций являются

- 1⁰. $f(x) = cx, \quad c = \text{const}, \quad c \in R;$
- 2⁰. $f(x) = a^x \quad (a > 0)$ и $f(x) \equiv 0;$
- 3⁰. $f(x) = \log_a x, \quad (a > 0, a \neq 1)$ и $f(x) \equiv 0;$
- 4⁰. $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in R$ и $f(x) \equiv 0.$

Задача 4. Найти непрерывное решение функционального уравнения

$$f(\sqrt[3]{x^3 + y^3}) = f(x) + f(y), \quad x, y \in R,$$

удовлетворяющее условию $f(2) = 1.$

Решение

Выполним замену переменных: $x = \sqrt[3]{u}, y = \sqrt[3]{v}.$ Тогда уравнение примет вид

$$f(\sqrt[3]{u+v}) = f(\sqrt[3]{u}) + f(\sqrt[3]{v}).$$

Положим, что $g(t) = \sqrt[3]{t},$ и рассмотрим сложную функцию $\varphi(t) = f(g(t)).$ Тогда последнее равенство запишется в виде

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Уравнение для функции φ относится к уравнению Коши типа 1⁰. Поэтому $\varphi(t) = Ct \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{t}) = Ct.$ Следовательно, $f(x) = Cx^3.$ Учитывая условие $f(2) = 1,$ найдем $C = \frac{1}{8}.$ Соответственно, $f(x) = \frac{x^3}{8}.$

Задача 5. Найти все непрерывные на R функции f такие, что

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2, \quad \forall x, y \in R.$$

Решение

Сначала предположим, что функция f дважды дифференцируема на всей числовой прямой и продифференцируем данное равенство сначала по переменной x , а затем по переменной y :

$$f'(x+y) = f'(x) + 2xy + y^2; \quad f''(x+y) = 2x + 2y.$$

В последнем равенстве положим, что $y = 0$. Получим $f''(x) = 2x$. Тогда $f'(x) = x^2 + C$, $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx + C_1$. Положив в исходном уравнении, что $x = 0, y = 0$, получим $f(0) = 0$. Поэтому $C_1 = 0$ и $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$.

Теперь будем искать решение уравнения в классе непрерывных функций. Положим, что $f(x) = \frac{x^3}{3} + g(x)$, где $g(x)$ – неизвестная непрерывная функция. Из начального уравнения получим

$$\frac{(x+y)^3}{3} + g(x+y) = \frac{x^3}{3} + g(x) + \frac{y^3}{3} + g(y) + x^2y + xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Относительно функции $g(x)$ получили функциональное уравнение Коши типа 1⁰. Следовательно, $g(x) = Cx$. Тогда $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$.

Задача 6. Найти все непрерывные на R функции f такие, что

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in R.$$

Решение

Найдем некоторые частные значения функции f , используя уравнения $x = 0, y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$; $x = 1, y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$; $x = -1, y = -1 \Rightarrow f(1) = -f(-1) - f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$.

Далее из исходного равенства получим

$$f(-xy) = yf(-x) - xf(y); \quad f(-xy) = -yf(x) + xf(-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yf(-x) - xf(y) = -yf(x) + xf(-y).$$

Полагая в последнем равенстве, что $y = 1$, с учетом найденных частных значений функции f , получим $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция f является нечетной. Далее будем решать задачу для положительных значений аргумента.

Поделим обе части уравнения на x и введем в рассмотрение функцию $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Тогда $g(xy) = g(x) + g(y)$. То есть функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению Коши типа 3°. Поэтому $g(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Следовательно, $f(x) = x \log_a x$. Учитывая нечетность функции f , получаем ответ.

$$f(x) = \begin{cases} x \log_a |x| (a > 0, a \neq 1), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1969. – Т. 1. – 728 с.
2. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих олимпиад по математике / В. А. Садовничий, А. С. Подколотин. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
3. **Лихтарников, Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения / Л. М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 156 с.
4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учебное пособие / И. Ю. Попов. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.
5. **Борисов, А. А.** Решение функциональных уравнений с использованием понятия группы / А. А. Борисов // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. семинара. – Санкт-Петербург: СПбТПП, 2005. – Вып. 7. – С. 20–26.
6. **Гулевич, Н. М.** Функциональные уравнения Коши / Н. М. Гулевич, О. Н. Амплеева, В. О. Кузнецова // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. семинара. – Санкт-Петербург: СПбТПП, 2005. – Вып. 7. – С. 29–32.

УДК 372.8

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОНЛАЙН-КАЛЬКУЛЯТОРОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ НА АВТОМЕХАНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

А. Н. БОНДАРЕВ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Важнейшей составляющей процесса обучения математике в высших учебных заведениях, помимо лекций и практических занятий, является самостоятельная работа студентов, которая может быть организована различными спосо-

бами, в том числе с помощью использования системы управления обучением Moodle [1]. При решении в рамках самостоятельной подготовки домашних и индивидуальных заданий по математике у будущих инженеров-механиков часто возникает необходимость в проверке полученных результатов. Чаще всего для этих целей используются разнообразные системы компьютерной математики, при этом хорошим альтернативным средством может являться применение онлайн-калькуляторов по математике.

Этим термином обозначаются различные ресурсы в сети Интернет, разработанные для выполнения расчетов по разным темам и разделам математики. С помощью предложенной на странице ресурса инструкции можно довольно быстро и просто получить ответ для решаемой задачи. При этом, в отличие от систем компьютерной математики, онлайн-калькуляторы не требуют предварительной установки на устройство студента.

Различные онлайн-калькуляторы обладают разным функционалом. Простейшие версии способны предоставить пользователю только один ответ, иногда записанный в довольно специфическом виде. Более продвинутые версии могут сформировать подробное решение задачи и дают возможность скачать его в виде отдельного файла. Также на страницах таких ресурсов, как правило, присутствуют ссылки на теоретический материал с разобранными примерами, необходимый для изучения данной темы.

При всех своих достоинствах онлайн-калькуляторы имеют и ряд недостатков. Основным из них является тот факт, что они не охватывают все темы из курса математики и чаще всего узко специализированы, решая задачи только на одну конкретную тему. Также довольно часто студенты со слабой математической подготовкой пытаются схитрить и выдать решение, полученное с помощью онлайн-калькулятора, за своё.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондарев, А. Н.** О преподавании математики на специальностях автомеханического профиля / А. Н. Бондарев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 17 февр. 2022 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 31–32.

УДК 372.851

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ОДАРЕННЫХ СТУДЕНТОВ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ОБУЧЕНИЯ:
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ ИЗ ОПЫТА ПРЕПОДАВАНИЯ
С 2007 Г. ПО НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ

М. Р. БОРТКОВСКАЯ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Санкт-Петербург, Россия

Говоря о работе с одаренными студентами, надо решить, кого так называют. Представляется естественным назвать так прежде всего студентов, обладающих способностью и внутренней мотивацией к самообразованию, оригинальностью и самостоятельностью мышления. Первое обычно выражается в стремлении углубленно понимать теорию, «копаться» в тонкостях, изучать и сравнивать изложение материала в разных источниках. Второе приводит к умению красиво и, как правило, быстро решать нестандартные задачи.

В каждом потоке, состоящем примерно из 100 студентов (Физико-механический факультет Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ), направления «Прикладная механика», «Прикладная математика и физика»), я как преподаватель вижу обычно несколько человек, кого, руководствуясь наличием хотя бы одной из двух названных способностей, можно уже на начальном этапе обучения отнести к «одаренным». Тех, кто именно при изучении математики проявляет оба названных качества, еще меньше (такой человек, скорее всего, выберет путь ближе к профессиональным занятиям фундаментальной наукой).

Чем же может преподаватель математики помочь математически одаренному студенту-технарю в современных условиях? И нужна ли такому студенту помощь?

Во-первых, может показаться, что при наличии доступа (в том числе в интернете) к огромному количеству учебно-научной литературы студенту с выраженной способностью к самообразованию преподаватель для сообщения теоретических сведений не очень-то и нужен. Но практика говорит о другом. Как раз от таких студентов часто поступают вопросы, возникающие при чтении дополнительной литературы, при сравнении изложения материала в разных источниках, при попытках решить задачи, приводимые в дополнительной литературе. Например, в учебнике [1], который я традиционно использую как основной, студент читает в параграфе о непрерывности функции: «Станем рассматривать функцию $y = f(x)$, определенную на некотором множестве $X = \{x\}$, и точку x_0 . Точка $x_0 \in X$ и обладает свойством: в любой окрестности $u(x_0)$ точки x_0

имеются точки множества X , отличные от x_0 ». После этой преамбулы следует определение непрерывности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

В более объемном и подробном учебнике [2] студент находит лемму: «Всякая функция непрерывна в каждой изолированной точке множества своего определения». Заметить тонкое отличие в изложении материала (идущее еще от формулировки определения предела), да и вообще заглянуть в «необязательный» учебник способен не каждый студент, но мне изредка встречались и такие, кто читал (с пониманием!) не два, а три-четыре учебника – и по изучаемому материалу, и забегаая вперед, – и эти люди очень хотели побеседовать о замеченных ими тонких отличиях формулировок и доказательств. При том, что для прикладного применения, вероятно, нет ни смысла, ни учебного времени разбирать такие нюансы, нельзя и отмахиваться от этих уникальных студентов, потому что нельзя отбить охоту не только размышлять, но и делиться размышлениями.

Более того, некоторые студенты 1–2 курса изобретают собственные математические конструкции (теории). Иногда это попытки объяснить самим себе не вполне понятный материал, а иногда просто творческое «фантазирование» на математические темы. В СПбПУ, где я работаю, ежегодно проводится научно-практическая конференция «Неделя науки», в рамках которой на базе кафедры высшей математики проходят заседания секции математики. Они дают возможность именно студентам младших курсов проявить себя в качестве докладчиков (ближе к окончанию обучения студенты, естественно, специализируются в выбранном научно-техническом направлении и рассказывают о своих работах чаще уже в рамках других секций). Доклады начинающих докладчиков обычно бывают либо обзорными (человек изучил, проанализировал, скомпоновал научные факты), либо это отчет о научной работе, выполненной под руководством преподавателя, обычно группой студентов. Но попадаются и такие (приведу темы докладов с сайта кафедры [3]): «Пространственные функции (к одной проблеме математического аппарата физики и механики)» (автор С. О. Дроздов, студент 3 курса, но обдумывать свою тему начал еще на 1-м курсе) или «Гексагональная тригонометрия» (автор Ю. А. Выборова, 1-й курс). То, что студенты готовы вынести свои размышления-изобретения на суд публики, ответить на вопросы, возможно, заново обдумать и скорректировать сделанное, – идет от них самих, но дело вуза и конкретных преподавателей помочь им технически и практически. Пусть такие доклады не имеют прагматической, прикладной ценности, но имеют, я считаю (как, конечно, и другие типы студенческих докладов, перечисленные выше), большую ценность для творческого становления и авторов, и других студентов, участвующих в конференции в роли активных слушателей.

Все сказанное относится к помощи студентам в области самообразования, способность к которому определена выше как один из признаков одаренности.

Во-вторых, что касается решения нестандартных задач, то ничего лучше, чем старое доброе олимпиадное движение, включающее в себя и проведение олимпиад как таковых, и организацию дополнительных занятий для любителей олимпиадной математики, наверное, не придумано. О работе, проводимой в этой области кафедрой высшей математики СПбПУ, можно узнать из [4].

В заключение хочется добавить, что в современных условиях, с одной стороны, большая загруженность и студентов, и преподавателей, а также большой объем и разнообразие доступной всем учебно-научной информации затрудняют проведение дополнительных творческих мероприятий для заинтересованных студентов: и время трудно найти, и доступность информации, казалось бы, снижает потребность в ее передаче непосредственно «из рук в руки» в живом общении. Но, с другой стороны, потребность делиться размышлениями и задавать вопросы не ушла в прошлое, и, к счастью, возможности дистанционного общения помогают решать, хотя бы отчасти, проблему организации творческих дополнительных занятий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аксенов, А. П.** Математика. Математический анализ: учебное пособие: в 2 ч. / А. П. Аксенов. – Санкт-Петербург: СПбГПУ, 2004. – Ч. 1. – 614 с.
2. **Кудрявцев, Л. Д.** Курс математического анализа: учебник для студентов университетов и вузов: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1988. – Т. 1. – 712 с.
3. Режим доступа: [https://hmath.spbstu.ru/Раздел «Конференции»: «Неделя Науки»](https://hmath.spbstu.ru/Раздел%20«Конференции»:«Неделя%20Науки»).
4. Математика. Задачи студенческих олимпиад СПбПУ по математике: учебное пособие / В. И. Антонов [и др.]. – Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2021. – 127 с.

УДК 37.091.3:51

ОБ ОПЫТЕ ПРОВЕДЕНИЯ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ОЛИМПИАДЫ ИННОВАЦИОННОГО ХАРАКТЕРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

А. М. БУТОМА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Математика, являясь не только орудием количественных расчетов, но и методом точного исследования и формулировки понятий [1], объясняет многие законы окружающего мира. Поэтому, помимо традиционных олимпиад по матема-

тике, большое значение приобретает проведение олимпиад инновационного характера. Такая олимпиада была проведена в Белорусско-Российском университете весной 2022 г.

При проведении междисциплинарной олимпиады «Прикладная математика» решались следующие задачи:

- выявление учащихся, интересующихся прикладными аспектами математики и способных применять математические знания к решению прикладных задач;
- повышение интереса учащихся к математике, развитие их творческих способностей, углубление теоретических знаний и практических умений, содействие самореализации личности;
- пропаганда научных знаний и развитие интереса учащихся к научной деятельности;
- систематизация математических знаний и развитие умений их применения.

Первый, отборочный, тур проходил с 23 по 26 марта на базе образовательной платформы Moodle в форме компьютерного онлайн-тестирования. Участникам было предложено 20 заданий различной сложности в тестовой форме в течение 120 мин. В первом туре приняли участие 139 учащихся 10–11 классов из 19 учреждений общего среднего образования г. Могилева.

Во второй тур были приглашены победители первого тура в каждом учреждении образования, а также учащиеся, показавшие лучшие результаты в общем списке участников, а именно набравшие в отборочном туре не менее 25 баллов, – всего 35 участников.

Во втором, финальном, туре, состоявшемся 15 апреля в форме традиционного тестирования, смогли принять участие 28 учащихся. Участникам было предложено решить 15 заданий в тестовой форме в течение 90 мин.

Проведение олимпиады в форме тестирования позволило исключить при оценивании работ какую-либо субъективность [2].

И в первом, и во втором туре задания содержали, преимущественно, задачи прикладного характера разного уровня сложности из различных областей элементарной математики. Приведем тексты некоторых из них.

Задача 1. При работе со строкой, содержащей x символов, программист получил следующее:

- при разбиении строки на две подстроки одинаковой длины один символ остался лишним;
- при делении строки на три подстроки, содержащие одинаковое количество символов, два символа остались лишними.

И так далее по той же схеме: при делении на 4 подстроки – 3 символа лишние, на 5 – 4, на 6 – 5, на 7 – 6, на 8 – 7, на 9 – 8, на 10 – 9.

Какова наименьшая длина исходной строки (наименьшее значение x)?
(Т. Ю. Орлова)

Задача 2. Пусть $d(n)$ – количество чисел, которые являются палиндромами и имеют n разрядов в двоичной системе счисления. Например, $d(4) = 2$ (палиндромы: числа 1001_2 и 1111_2). Найти число $d(2020) + d(2021)$, в ответе указать количество его делителей. (В. С. Бутома).

Задача 3. В технической организации проведено статистическое исследование некоторого параметра. Оказалось, что его значения зависят от времени наблюдения t , выраженного в днях, и изменяются согласно закону

$$f(t+1) = f(t) + 2t + 1,$$

где $f(t)$ – значение исследуемого параметра через время t . Найти значение этого параметра через 2022 дня, если $f(0) = 0$. (Т. Ю. Орлова).

Задача 4. Бак для воды имеет форму прямого параллелепипеда, основание которого – квадрат. Высота бака в 1,5 раза больше стороны основания. Найти объем вмещаемой в бак воды (в дециметрах кубических), если основание бака имеет площадь, равную $100 \cdot S$, где S – площадь треугольника MNK , образованного следующим образом: на стороне MP произвольного треугольника MNP взята точка K так, что $MK : KP = 4 : 6$. Площадь треугольника MNP равна 90 см^2 . (А. М. Бутома).

Задача 5. Для изготовления трикотажного изделия требуется четыре вида пряжи, общая длина которой равна 355 м. Длины n_1, n_2, n_3, n_4 соответственно первого, второго, третьего и четвертого видов пряжи удовлетворяют следующим условиям: n_1 при делении на n_2 дает в частном 1 и в остатке 25; n_2 при делении на n_3 дает в частном 2 и в остатке 20; n_3 при делении на n_4 дает в частном 3 и в остатке 10. Найти сумму длин первого и четвертого видов пряжи (ответ записать в метрах). (А. М. Бутома).

Задача 6. В химической лаборатории имеется 10 л a -процентного раствора азотной кислоты и 15 л b -процентного раствора той же кислоты ($a \neq b$). Однако для проведения опыта требуется c -процентный раствор азотной кислоты, который, имея указанные растворы, можно получить следующим образом: из каждого сосуда следует отлить по одинаковому количеству x литров азотной кислоты и взятое из первого вылить во второй, а взятое из второго вылить в первый. Найти значение x [3, с. 31] (А. М. Бутома).

Как правило, школьники, участвующие в олимпиадах традиционного характера, имеют дополнительную подготовку в математических кружках или на факультативных занятиях, т. к. олимпиадные задания традиционных олимпиад требуют оригинального и нестандартного подхода к их решению. Особенностью олимпиады «Прикладная математика» стал тот факт, что ее участникам были предложены задания разного уровня сложности, для решения большинства которых не требуется специальная математическая подготовка.

Первое и третье места в этой олимпиаде соответственно заняли учащиеся лица Белорусско-Российского университета Мария Капустина и Артемий Ясев, второе место завоевал Никита Жарин, представитель средней школы № 25 г. Могилева.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутома, А. М.** Исторический экскурс по вопросу реализации математической составляющей в техническом вузе / А. М. Бутома // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 33–35.
2. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.
3. **Шахно, К. У.** Сборник задач по математике повышенной трудности / К. У. Шахно // Минск: Вышэйшая школа, 1963. – 524 с.

УДК 37.091.3:51

ФУНКЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

А. М. БУТОМА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Традиционно в высшей школе выделяют следующие функции математического обучения: образовательную, развивающую, воспитательную, практическую.

Образовательная функция математического обучения определяется необходимостью передачи подрастающему поколению социально значимого опыта, воплощенного в математических знаниях, умениях, творческой деятельности. Уже в средней школе в процессе изучения математики происходит развитие математических способностей, творческой активности учащихся, знакомство с различными методами познания. А в высшей школе образовательный процесс способствует как дальнейшему укреплению системы знаний, которая закладывается в средней школе, так и построению новой базовой системы фундаментальных знаний, необходимых будущему специалисту в его профессиональной деятельности.

Развивающая функция математического обучения заключается в развитии всех познавательных психических процессов и свойств личности: внимания, памяти, мышления, познавательной активности и самостоятельности, способности к творчеству. Развитие творческих способностей студентов основывается на развитии самостоятельности мышления, его глубины, гибкости, критичности, рациональности. К развивающей функции обучения относится также формирование таких логических приемов мыслительной деятельности, как, например, анализ, синтез, индукция, дедукция, обобщение, абстрагирование. Правильно организованное обучение математике в высшей школе обеспечивает развитие мыслительных способностей студентов, их познавательную активность. Изучение математики в высшей школе совершенствует имеющуюся культуру мышления, приучает логически рассуждать, обстоятельно аргументировать принятие того или иного решения.

Воспитательная функция математического обучения предполагает, что любое образование невозможно без ориентации обучения на формирование не только интеллектуального, но и морально-этического уровня человеческой личности. Обучение и воспитание – две стороны одного процесса. Задача высшей школы заключается не только в том, чтобы дать всесторонние знания, но и воспитать полноценного гражданина с развитым творческим восприятием окружающего мира и развитой самостоятельностью мышления. Сам учебный процесс, взаимодействие преподавателя и учащихся становится главным средством в воспитательном процессе, т. к. правильно организованная учебная деятельность опирается на педагогику сотрудничества, активизирует и поощряет самостоятельность и целеустремленность в приобретении знаний. Общая культура, мировоззрение, этика поведения и общения, умение работать в команде формируются не только в процессе обучения гуманитарным дисциплинам. Немаловажную роль здесь играют и курсы естественно-научных дисциплин. Так, например, изучение математики требует постоянного напряжения, внимания, способности сосредоточиться, настойчивости и трудолюбия, следовательно, создает условия для развития и интеллекта, и формирования характера.

Практическая функция математического обучения обуславливается самой целью получения высшего образования – подготовкой компетентного высококвалифицированного специалиста, способного решать сложные задачи современного производства. Профессия инженера, например, требует овладения многими профессиональными знаниями и умениями, основанными на математике. Это и формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений, и исследование явлений по заданным моделям, и использование информационно-вычислительной техники для математических расчетов.

Добавим к указанным функциям математического обучения несколько других функций.

Прогностическая функция математического обучения заключается в развитии нестандартного мышления, умения быстро и правильно принимать верные, а главное, более рациональные решения той или иной проблемы. Обучение математике развивает умение правильно и логично рассуждать, аргументировать и защищать выбранный метод решения.

Систематизирующая функция математического обучения связана с проблемой организации полученных знаний и умений. Усвоение любых знаний уже предполагает некоторую системность, а запоминание получаемой информации без этого просто невозможно. Таким образом, необходимо, чтобы усвоение новых тем, понятий было во взаимосвязи с уже пройденным математическим материалом. При обучении математике целесообразно устанавливать логические цепочки взаимодействия математических фактов, использовать межпредметные связи. Знакомство с различными методами решений задач ведет к повышению качества умственной деятельности, лучшей ориентации в мире практических задач. Кроме того, систематизация знаний способствует лучшей адаптации вчерашних школьников к обучению в вузе и к усилению связи математических дисциплин с блоком специальных дисциплин.

Диагностирующая функция математического обучения имеет большое значение для повышения качества математической подготовки. Суть ее заключается в том, что в результате эффективной и целенаправленной работы преподавателей вуза у учащихся формируются самодиагностические умения, под которыми понимают: способность субъекта обучения разбивать конечную цель учебной задачи на ряд промежуточных; умение выбирать рациональные способы решения каждого отдельного этапа решения той или иной учебной задачи; способность анализировать причины собственных ошибок в поисковой математической деятельности и предупреждать их последующее появление; умение формулировать свои вопросы и определять, в каком направлении можно развить полученные знания.

Все выделенные функции обучения математике тесно взаимосвязаны между собой, а их реализация зависит от многих факторов, в том числе:

- от содержания обучения, от сочетания и порядка получения знаний, умений и навыков, от их глубины и прочности;
- от того, как связано обучение математике с обучением другим предметам;
- от организации обучения математике, т. е. от того, какие методы, формы и средства при этом используются преподавателем;
- от того, как учится сам студент, какой интерес проявляет он к изучению математики, от его умения самостоятельно выполнять учебные задания.

Остановимся, например, на использовании некоторых интерактивных приемов в процессе обучения математике и их роли в обеспечении реализации указанных функций.

При интерактивном обучении математике учебный процесс организован таким образом, что практически все студенты оказываются вовлеченными в процесс познания. Совместная деятельность студентов в процессе освоения учебного материала означает, что каждый вносит свой индивидуальный вклад, идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности, т. е. происходит реализация образовательной, воспитательной, систематизирующей, практической и систематизирующей функций. В результате каждый из участников интерактивного диалога получает не только новые знания по математике, но и умение общаться с другими людьми.

В ходе диалогового обучения студенты учатся критически мыслить, взвешивать альтернативные методы решения задач, принимать продуманные решения, участвовать в дискуссиях, следовательно, обеспечивается реализация образовательной, прогностической, систематизирующей, развивающей, практической и диагностирующей функций обучения математике.

Рассмотрим влияние на развитие указанных функций применения конкретных интерактивных приемов.

Прием «Заверши фразу» обеспечивает, прежде всего, реализацию образовательной, систематизирующей, диагностирующей функций обучения математике и предназначен для проверки знания теоретических сведений по определенной теме или разделу математики. Применение данного приема позволяет оперативно включить студентов в учебную деятельность и проверить за короткое время (5–10 мин) их готовность, например, к практическому занятию [1].

Прием «Ярмарка идей» обеспечивает реализацию образовательной, развивающей, практической, воспитательной функций обучения математике и предназначен для организации индивидуальной и групповой работы студентов на начальной стадии занятия, когда идет актуализация имеющихся у них опыта и знаний (или на начальной стадии решения задачи) [1].

Прием «Аквариум» обеспечивает реализацию образовательной, диагностирующей, практической, прогностической, воспитательной функций обучения и может быть использован для отбора и систематизации правильных идей решения того или иного вопроса (решения задачи, вывода формулы), в том числе быть продолжением предыдущего приема. Малая группа студентов выбирает одного или несколько своих представителей, кому может доверить вести диалог по указанной проблеме. Все остальные студенты остаются в роли зрителей [1].

Прием «Интервью» обеспечивает реализацию образовательной, развивающей, диагностирующей, практической, систематизирующей функций обучения, т. к. применяется с целью систематизации знаний по определенному вопросу или проблеме, организации диалога [1].

Прием «Дюжина вопросов» желательно применять в конце изучения определенного раздела по математике, т. к. целью его использования может быть систематизация и самоконтроль знаний по изученному математическому мате-

риалу [1]. Обеспечивает этот прием реализацию образовательной, диагностирующей, практической, прогностической функций обучения.

Таким образом, при использовании различных приемов интерактивного обучения математике учебный процесс организован таким образом, что в определенной степени обеспечивается реализация всех указанных функций обучения математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутома, А. М.** Приемы интерактивного обучения математике как средство развития критического мышления студентов / А. М. Бутома // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 29–32.

УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ДЕЙСТВИИ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

*«Легкость, с которой удается вспомнить
информацию, влияет на умозаключения».*

Люба Верт

Некоторые сведения из теории решения задач (ТРЗ). В основе ТРЗ лежит следующее (авторское) описание предмета математики: «Математика – это игра по правилам, в соответствии с которыми строятся необходимые логические цепочки с целью получения полезной информации» [1].

Полезной считается та информация, которая способствует продвижению в решении задачи. В ТРЗ под *задачей* будем понимать упорядоченную четверку (Ω, A, B, X) , где Ω – носитель задачи, A – условие (множество посылок), B – заключение (множество следствий), X – решение задачи как процесс получения информации.

Примечание. Заключение B , очевидно, является требуемым конечным результатом (ТКР) данной деятельности.

В качестве первичных (неопределяемых) понятий ТРЗ принимаем следующие: объект, субъект, связь, действие. *Операцией* будем называть некоторую последовательность действий (в частности, она может состоять из одного действия). *Ситуацией* будем называть любое множество объектов и связей между

ними. Минимальная ситуация содержит два объекта и одну связь. Назовем ее *связной парой* (СП). Это понятие лежит в основе универсального метода решения математических (и не только) задач, которому было дано название «метод связанных пар». Его идея состоит в следующем:

- процесс поиска решения задачи включает в себя поиск информационной структуры решения (ИСР);
- носителем структурной единицы информации является связанная пара (в терминах теории графов – это ребро);
- ИСР – некоторая совокупность структурных единиц информации, причем возможен вариант, когда ребро превращается в точку для построения следующего ребра.

Замечание. Сразу же возникает главный вопрос: «А как строить (находить) СП?». Понятно, что общего рецепта для этого, увы, не существует. Но достаточно часто может оказаться полезной следующая схема (рис. 1), которую будем называть основной схемой решения задач (ОСРЗ).

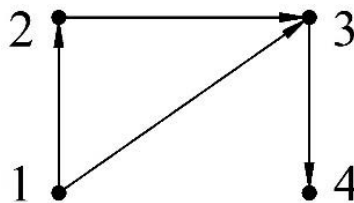


Рис. 1. ОСРЗ: 1 – моя ситуация (МС); 2 – стандартная ситуация (СС); 3 – целевая ситуация (ЦС); 4 – требуемый конечный результат (ТКР); (1, 2) – поиск СС; (2, 3) – стандартное решение (СР); (1, 3) – мое решение; (3, 4) – получение ТКР

Комментарий. Предположим, что в процессе поиска решения задачи пришли к некоторой ситуации (назовем ее «моей ситуацией»), которую требуется разрешить. Если повезет и удастся свести «мою ситуацию» к стандартной (см. рис. 1, цифра 2), т. е. известной из соответствующей теории (называют еще так: patterns), то дела идут на лад. Например, в геометрии роль СС выполняют теоремы и аксиомы.

Метод связанных пар в действии.

Задача 1. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в треугольник. Найти острые углы треугольника [2, с. 24, № 25].

Решение

Для $\triangle ACB$, где C – прямой угол, введем систему координат следующим образом: начало находится в точке C . Ось Ox направим по катету CA , а ось Oy – по катету CB . Пусть далее $\angle ABC = \beta$, $AC = a$, $BC = b$. Тогда вершины треугольника имеют координаты $C(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$. Точка пересечения медиан $M(a/3; b/3)$.

Радиус вписанной окружности $r = (a + b - c)/2$. Уравнение этой окружности $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

По условию точка пересечения медиан лежит на окружности. Следовательно, $(a/3 - r)^2 + (b/3 - r)^2 = r^2$. Учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$, после тождественных преобразований приходим к уравнению $5c^2 - 3ab - 3ac - 3bc = 0$. Откуда $5 - 3\frac{ab}{c^2} - 3\frac{ac}{c^2} - 3\frac{bc}{c^2} = 0$. Так как $\frac{a}{c} = \sin \beta$, $\frac{b}{c} = \cos \beta$, то последнее равенство переписывается в виде $5/3 = \sin \beta + \cos \beta + \sin \beta \cos \beta$.

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{25}{9} - \frac{10}{3} \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta &= \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 2\beta - \frac{8}{3} \sin 2\beta + \frac{16}{9} &= 0 \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{\frac{8}{3} \pm \frac{4}{3} \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{4}} \Rightarrow \beta = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

ибо

$$\frac{\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} > 1.$$

Комментарий.

1 В данной задаче, следуя Р. Декарту, обошлись без чертежа.

2 Данное решение осуществил студент Виталий Писарев (гр. НР-11).

3 В [2, с. 68] в результате элементарного решения И. Ф. Шарыгин приводит следующий ответ: углы треугольника равны $\pi/4 \pm \arccos((4\sqrt{6} - 3\sqrt{2})/6)$. Было бы интересно сверить результаты.

4 Проведем анализ решения с позиций МСП:

а) главная «ситуация-идея» – это воспользоваться методом координат; для этого установили естественную связь между объектом ($\triangle ABC$) и системой координат xOy ;

б) далее идут в ход стандартные ситуации («ситуации-инструменты») из аналитической геометрии: центр тяжести однородной треугольной пластины, уравнение окружности, факт принадлежности точки пересечения медиан треугольника окружности;

в) тут же на помощь им спешат patterns из элементарной геометрии: выражение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, через стороны и теорема Пифагора.

5. Связная пара: «точка пересечения медиан треугольника лежит на вписанной окружности» – вряд ли выглядит очень естественно. Откуда и не очень эстетичные результаты.

Прием «понижения-повышения» размерности.

Значительно чаще используется его вторая составляющая, а именно «повышение размерности», с целью увеличения степени свободы ситуации [3].

Хорошим примером может служить решение Ж. Л. Лагранжем следующей задачи оптимизации: требуется найти экстремум функции двух переменных $U = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$. Лагранж предложил связать два объекта f и φ с помощью новой функции $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, где параметр λ как раз и обеспечивает дополнительную степень свободы. Иногда, если повезет и удастся уравнение $\varphi(x, y) = 0$ разрешить относительно одной из переменных (скажем, $y = h(x)$), то, подставляя эту связь в основное уравнение, получим $U = f(x, h(x))$ и тем самым понизим размерность проблемы, а далее – включаются методы безусловной оптимизации. В заключение приведем занятную задачу на применение данного приема.

Задача 2. По поверхности единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ползет жук. Найти для него маршрут кратчайшей длины из точки A в точку C_1 и вычислить его длину.

Читателю предоставляется возможность самому понять, какую составляющую приема «понижение-повышение размерности» следует выбрать для решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Информационный подход к математике и её преподаванию / Л. Л. Великович // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: сб. науч. ст. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ им. А. А. Кулешова, Могилев, 20–22 февр. 2013 г. – Могилев, 2013. – С. 97–101.
2. **Шарыгин, И. Ф.** Задачи по геометрии (планиметрия) / И. Ф. Шарыгин. – Москва: Наука, 1982. – Вып. 17. – 328 с.
3. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: тезисы и комментарии / Л. Л. Великович // Методология и технологии образования в XXI веке: математика, информатика, физика: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Минск: Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка, 2005. – С. 20–23.

УДК 378. 147

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Важной особенностью современного математического образования следует считать наличие широких технических возможностей проверки правильности своих расчётов. Многие типовые задачи математики реализованы в виде активных шаблонов справочной системы различных систем компьютерной математики. Поэтому проверка правильности решения фактически сводится к введению данных из условия задачи в подходящий шаблон. Умение грамотно найти и использовать такой подходящий шаблон позволяет не только получить реальную квалифицированную помощь, но и характеризует культуру студента – как профессиональную, так и общую.

Важную роль в любой математической дисциплине играет математическая логика. Понятно, что глубокому усвоению дисциплины способствует решение большого количества практических задач по этой дисциплине. При этом встроенный математический аппарат большинства СКМ (систем компьютерной математики) представлен гораздо более бедно, чем многие другие разделы математики. Поэтому представляется оправданным разработка шаблонов, облегчающих усвоение этой дисциплины. В качестве рабочей среды разрабатываемого шаблона рассмотрим СКМ SMath Studio (сама установленная на ПК программа теперь отображается как SMath Solver) [1]. Достоинства, выделяющие эту СКМ из доступных аналогов, приводятся, например, в [2, 3].

Рассмотрим важную в математической логике задачу построения многочлена Жегалкина, представляющего заданную логическую функцию трех переменных $f(x_1; x_2; x_3)$. Составим программу, реализующую поставленную задачу. Очевидно, что в правильности построения многочлена Жегалкина можно убедиться, сравнивая векторы значений построенного многочлена и исходной функции. Очевидно также, что предложенные построения справедливы для произвольной булевой функции трех переменных – используется лишь вектор значений функции. Поэтому, не нарушая общности, рассуждения проведём для функции

$$f(x_1; x_2; x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Данная функция трех переменных представлена в СДНФ.

Для построения таблицы (вектора) значений этой функции в СКМ SMath Studio, используя панель «Булева», введём матрицу наборов трех логических переменных и составим конъюнкции СДНФ (рис. 1).

$$per := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} K1(x1; x2; x3) &:= ((\neg x1) \wedge (\neg x2)) \wedge (\neg x3) \\ K2(x1; x2; x3) &:= ((\neg x1) \wedge (\neg x2)) \wedge x3 \\ K3(x1; x2; x3) &:= (x1 \wedge (\neg x2)) \wedge (\neg x3) \\ K4(x1; x2; x3) &:= (x1 \wedge x2) \wedge (\neg x3) \\ K5(x1; x2; x3) &:= (x1 \wedge x2) \wedge x3 \end{aligned}$$

Рис. 1. Наборы трех логических переменных и конъюнкции, составляющие СДНФ

Связывая знаком «дизъюнкции» построенные конъюнкции, введём в SMath Studio рассматриваемую функцию (рис. 2).

$$f(x1; x2; x3) := (((K1(x1; x2; x3) \vee (K2(x1; x2; x3))) \vee (K3(x1; x2; x3))) \vee (K4(x1; x2; x3))) \vee K5(x1; x2; x3)$$

Рис. 2. Введённая функция пользователя

Далее рассчитаем вектор значений этой функции (рис. 3).

$$\begin{aligned} nabor_zn_i &:= f(per_{i1}; per_{i2}; per_{i3}) \\ nabor_zn^T &= [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1] \end{aligned}$$

Рис. 3. Расчет вектора значений функции

Для построения многочлена Жегалкина применим метод треугольника согласно следующему алгоритму:

- выписываем наборы переменных таблицы истинности;
- вектор значений функции выписываем горизонтально в первую строку;
- каждая очередная нижняя строка находится суммированием по модулю 2 всех пар соседних элементов вышестоящей строки. Каждая следующая строка на 1 элемент короче предыдущей, в последней строке будет 1 элемент;

– крайние левые значения полученных строк будут коэффициентами многочлена Жегалкина (конъюнкция будет состоять из тех переменных, которые в наборе переменных принимают значение 1). Элемент m_{11} есть свободный член многочлена Жегалкина. Далее для удобства первый столбец рассчитанной матрицы m в программе обозначен матрицей $koef$.

Алгоритм расчёта реализуется программным блоком (рис. 4).

$$\begin{array}{l}
 \text{for } i \in [1..(\text{cols}(nabor_zn^T) - 1)] \\
 \quad \text{for } j \in [1..(\text{cols}(nabor_zn^T) - 1)] \\
 \quad \quad m_{i+1j} := m_{ij} \oplus m_{ij+1} \\
 m
 \end{array}
 \quad m = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Рис. 4. Нахождение коэффициентов многочлена Жегалкина

В построенной матрице m во внимание не принимаем элементы, расположенные ниже побочной диагонали матрицы. Левый столбец этой матрицы и представляет собой набор коэффициентов многочлена Жегалкина. Для удобства сопоставим наборы логических переменных и рассчитанный набор коэффициентов (рис. 5).

$$\text{augment}(per; koef) = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gegalkin}(x1; x2; x3) := koef_1 \oplus (((x2) \oplus (x1 \wedge x3)) \oplus ((x1 \wedge x2) \oplus ((x1 \wedge x2) \wedge x3)))$$

Рис. 5. Сводная матрица коэффициентов и искомый многочлен Жегалкина

Предложенный шаблон позволяет организовать быструю проверку выполнения заданий по математической логике и удобен для самотестирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт программы SMath Studio [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме>.
2. **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февр. 2021 г. – Могилев, 2021. – С. 35–37.
3. **Гарист, В. Э.** Элементы линейной алгебры в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 17 февр. 2022 г. – Могилев, 2022. – С. 41–44.

УДК 378.1

РОЛЬ УНИВЕРСИТЕТА В ПОПУЛЯРИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РЕГИОНЕ

Т. А. ГРОБОВА, М. Н. КОНОНОВ, С. К. ГРОБОВА

Северо-Кавказский федеральный университет

Ставрополь, Россия

Математическое образование – один из важнейших факторов, определяющих уровень экономического и общественно-политического развития страны. В рамках повышения уровня математического образования в Северо-Кавказском федеральном округе работает Региональный научно-образовательный математический центр «Северо-Кавказский центр математических исследований».

Преподаватели высшей школы работают со школьными учителями в одной связке. Как и школьные учителя, преподаватели высшей школы начинают работать со школьниками, начиная со среднего звена, и сталкиваются с рядом проблем.

Первая проблема – учебники. Проблема в их содержании. Одни и те же темы могут быть изложены в учебниках за разные годы обучения. Ученики одного класса в разных школах могут иметь разный набор компетенций. Таким образом, выстроить программу преподавателю математического центра бывает весьма и весьма сложно, ведь в одну учебную группу могут попасть школьники с разным набором пройденных тем.

Главная задача учителя сегодня – не «набить» головы учеников информацией, которая якобы понадобится им в дальнейшей жизни, а научить их получать нужные знания самостоятельно. В наше время владение хотя бы азами математического языка – неперенный атрибут культурного человека. Для того чтобы овладеть этими азами, недостаточно «натаскать» ребенка на получение мини-

мального, «проходного» балла по ЕГЭ, а научить его осознанному чтению математической литературы.

Очередная проблема – низкая математическая культура учителей. Выпускники педагогических и математических вузов, приходящие в школы, – далеко не самые лучшие студенты. В итоге падает интеллектуальный тонус, всегда считавшийся отличительной чертой педагогической интеллигенции. В последнее время профессия учителя считается «менее престижной», чем, допустим, профессия экономиста или айтишника. И уже на первом курсе студенты с высоким баллом по математике, поступившие по совету родственников и знакомых, понимают, что поступили «не туда», и хотят поменять направление подготовки. Именно для таких студентов, которые желали бы стать учителями и лишь в силу низкой учительской зарплаты выбирают другие профессии, в рамках работы математического центра осуществляется профессиональная переподготовка студентов в объеме 1008 ч. После обучения ребята получают диплом преподавателя математики.

Следующая проблема: для значительной части молодых людей в настоящее время характерна потеря жизненных ориентиров, которая сказывается на мотивации к обучению. Как следствие, снижение познавательного интереса к математике. Назрела необходимость в повышении государственного статуса учителя (включая улучшение условий его труда и повышение заработной платы), укреплении системы высшего педагогического образования, повышении качества подготовки в педагогических вузах, усиливая в них изучение школьного курса математики и соответствующую методическую подготовку. Для разрешения этой проблемы сотрудники математического центра ведут системную работу с учителями математики региона.

Говоря о проблемах преподавания математики в школе, нужно отметить и сокращение количества часов, отводящихся на уроки математики. Ведь учителю необходимо подготовить своих учеников к сдаче ЕГЭ. Происходит ориентация школьных курсов не на действительно глубокое, системное изучение предметов, а на подготовку к поступлению в вуз, на сдачу ЕГЭ. В результате школьные курсы становятся все более примитивными. Для помощи учителю и ученику сотрудники математического центра проводят круглогодичные курсы по математике для школьников, начиная с 5 класса.

Также в настоящее время весьма актуальна проблема активизации познавательной деятельности. Активизации познавательного интереса учеников способствуют современные информационные технологии. Но для использования компьютерных технологий необходимо наличие мультимедийной техники. Практически во всех школах Российской Федерации есть интерактивные доски, компьютеры, проекторы, экраны. Но вот использовать эту технику могут далеко

не все учителя. В рамках повышения квалификации учителей сотрудники математического центра проводят для них мастер-классы, обучающие семинары по работе с новым оборудованием.

Ученики, выходящие из школы с низким уровнем знаний точных наук, как правило, выбирают для сдачи ЕГЭ наиболее простые гуманитарные предметы, что, в свою очередь, ведет к низкому уровню обучаемых на технических и естественно-научных направлениях подготовки вузов. В 2022 г. в летнюю приемную кампанию даже центральные вузы Российской Федерации столкнулись с недобором на бюджетные места. В настоящее время самое большое количество вакансий в стране – это педагогические, технические и IT-специальности.

Для решения обозначенных проблем вуз принимает на себя большую ответственность по повышению уровня математического образования в регионе. В рамках работы математического центра ведется работа со школьниками, учителями, студентами по углублению математических знаний и расширению научного кругозора. Студенты, начиная со 2 курса, привлекаются к работе научной школы, действующей на факультете по следующим направлениям:

- «Основы теории и принципы построения модулярных нейрокомпьютеров высокой производительности и надежности»;
- «Методы и алгоритмы нейроматематики для параллельной обработки данных»;
- «Разработка математических моделей для исследования цифровой обработки сигналов, распознавания образов и речи»;
- «Использование теоретических основ модулярной нейроинформатики для решения прикладных задач в конечных кольцах и полях»;
- «Методы повышения достоверности информации в инфокоммуникационных системах»;
- «Численные методы решения задач математической физики».

В рамках реализации средств внутреннего гранта на реализацию междисциплинарных проектов проводятся исследования, связанные с нейрокриптографией и разработкой новых аппаратных средств интеллектуальной обработки изображений с использованием параллельной математики.

В рамках направления «Развитие и реализация прорывных научных исследований и разработок» ведется активная работа по подготовке статей в научные журналы и конференции, индексируемые в международных базах цитирований. Так, по состоянию на 31.12.2022 г. за истекший 2022 г. сотрудниками математического центра опубликованы 101 статья, входящие в базу Scopus, 44 статьи WOS, 8 статей в журналах перечня ВАК. Половина сотрудников математического центра – молодые исследователи, под руководством опытных ученых ведущие научные разработки. Среди них – победители Всероссийского конкурса «УМНИК», Всероссийского молодежного конкурса научных проектов «#Вцентренауки» и т. д.

Это далеко не весь спектр задач, стоящих перед сотрудниками математического центра на сегодняшний день. Настоящий математик не боится трудностей. Он не ищет лёгких путей. Он ищет пути правильные – ведущие к поставленной цели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральные округа России. Региональная экономика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bstudy.net/723418/ekonomika/glavnye_otrasli_selskogo_hozyaystva_skfo.
2. Северо-Кавказский центр математических исследований [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://nccmr.ncfu.ru/>.
3. **Грובה, Т. А.** Популяризация математического образования в Северо-Кавказском федеральном округе / Т. А. Грובה, Н. В. Кононова, В. Н. Палащенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 44–46.

УДК 378.14.35.09

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖФАКУЛЬТЕТСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕОРИИ ИГР

Ю. А. ДОРОФЕЕВА

Национальный исследовательский университет ИТМО

Научно-образовательный центр математики

Санкт-Петербург, Россия

Представлен опыт организации методического сопровождения межфакультетского факультатива по теории игр в Национальном исследовательском университете (НИУ ИТМО) на базе Научно-образовательного центра (НОЦ) математики.

Организация межфакультетских факультативов является многолетней практикой в университете ИТМО (г. Санкт-Петербург). Такого рода занятия весьма интересны для студентов, с одной стороны, но имеют ряд особенностей с точки зрения организации, с другой.

Согласно проведенному анкетированию занятия по теории игр планируют посещать 34 % студентов, обучающихся по направлениям, где математика не является базовой дисциплиной. 64 % – это студенты, обладающие профильными математическими навыками, и 2 % обучаются на гуманитарных направлениях.

В связи с этим первой особенностью организации методической работы в проведении факультатива является различная математическая подготовка студентов.

Помимо того, что студенты овладевают учебным материалом в соответствии с рабочей программой факультатива, необходимо учитывать особенности слушателей. В [3] рассматривается вопрос об организации такого рода деятельности для одаренных студентов. Для них предполагается участие в олимпиадах, решение исследовательских задач и т. д. Однако факультатив организован для студентов с разными способностями к обучению. Именно это является второй особенностью организации занятий по теории игр.

Третьей особенностью является то, что факультатив организован для студентов 1–3 курса. Возраст студентов-слушателей 18–20 лет. В условиях обучения в университете это относительно большой возрастной интервал.

Вышеперечисленные особенности учитываются в методическом сопровождении факультатива следующим образом:

- для студентов с профильным уровнем подготовки предполагается решение исследовательских задач;
- публикация статей в соавторстве с руководителем факультатива со студентами разных направлений (привлечение студентов гуманитарных направлений обучения для написания текстов) в рецензируемых изданиях по теме исследования;
- решение разноуровневых задач для студентов с разным уровнем подготовки с последующим участием в различных конференциях (университетских, городских, федеральных и т. д.);
- решение задач разной направленности с учетом направлений обучения и возрастной категории студентов.

Данная организация методического сопровождения межфакультетского факультатива по теории игр позволяет поддерживать мотивацию студентов на должном уровне [1, 4]. Работа с учетом особенностей организации курса направлениям происходит посредством индивидуального подхода к слушателям.

Таким образом, организация межфакультетского факультатива происходит для студентов разных направлений и возрастных категорий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьев, Б. Г.** Избранные психологические труды: в 2 т. / Б. Г. Ананьев. – Москва: Педагогика, 2000. – Т. 1. – 680 с.
2. **Дорофеева, Ю. А.** Психологические и возрастные особенности студенческого возраста / Ю. А. Дорофеева // Приволж. науч. вестн. – 2015. – Т. 4-2 (44). – С. 41–43.
3. **Дорофеева, Ю. А.** Организация научно-исследовательской работы с одаренными студентами в условиях ФГОС / Ю. А. Дорофеева // Преподавание математики и работа с одаренными студентами в условиях ФГОС: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев, 2022. – С. 52–53.

4. Кулюткин, Ю. Н. Психология изучения взрослых / Ю. Н. Кулюткин. – Москва: Просвещение, 1985. – 128 с.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XII ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

XII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике ([1, 2] и список литературы в [1]) состоялась 17 февраля 2022 г. В соревновании приняли участие 25 студентов и аспирантов из 12 вузов Беларуси, России и Таджикистана. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчёте количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия) Захар Яковлев, давший 26 правильных ответов. Второе место занял студент Университета ИТМО Геннадий Короткевич (25 правильных ответов), третьим стал студент Санкт-Петербургского государственного университета (Россия) Никита Вяткин (24 правильных ответа).

Наиболее сложными заданиями двенадцатой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1–3. Задачу 1 решил один участник, а правильные ответы в задачах 2 и 3 смогли дать по 2 участника.

Задача 1 [3, с. 20]. При каком наибольшем значении λ уравнение $y' = ax^3 + by^\lambda$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

Решение

Сделаем замену $y = z^m$, $y' = mz^{m-1}z'$. После замены получаем уравнение $mz^{m-1}z' = ax^3 + bz^{\lambda m}$. В дифференциальной форме

$$mz^{m-1}dz = (ax^3 + bz^{\lambda m})dx.$$

Полученное уравнение будет однородным, если функции mz^{m-1} и

$$ax^3 + bz^{\lambda m}$$

будут однородными функциями одного и того же порядка 3. Откуда

$$m = 4, \lambda m = 3, \lambda = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задача 2 [4, с. 46]. Найдите площадь фигуры, образованной при касании парабол $x^2 = \pm 22y$, $y^2 = \pm 22(x \mp a)$.

Решение

В силу симметрии рассмотрим параболы в первой четверти:

$$x^2 = 22y, y^2 = 22(x - a), x \geq 0, y \geq 0.$$

В точке касания совпадают значения функций и их производных:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{22} = \sqrt{22(x - a)}; \\ \frac{x}{11} = \frac{\sqrt{22}}{2\sqrt{x - a}}. \end{cases}$$

Откуда $x = 11\sqrt[3]{2}$, $y = \frac{11}{\sqrt[3]{2}}$, $a = \frac{33}{4}\sqrt[3]{2}$.

Площадь области определяется интегралом

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{11/\sqrt[3]{2}} \left(\frac{y^2}{22} + \frac{33}{4}\sqrt[3]{2} - \sqrt{22y} \right) dy = \\ &= 4 \left(\frac{y^3}{66} + \frac{33\sqrt[3]{2}y}{4} - \frac{2\sqrt{22y}\sqrt{y}}{3} \right) \Big|_0^{11/\sqrt[3]{2}} = \frac{242}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{242}{3}$.

Задача 3 [5, с. 51]. Пусть $F(x)$ – преобразование Вейерштрасса функции $f(t) = \cos t$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} \cos t dt.$$

Найдите $F(\pi)$.

Решение

Полагая, что $x - t = \tau$, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos(x - \tau) d\tau = \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos \tau d\tau + \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю в силу нечётности подынтегральной функции. Первый интеграл, в силу чётности подынтегральной функции,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos \tau d\tau = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos \tau d\tau.$$

Рассмотрим интеграл более общего вида $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos a\tau d\tau$, $a \in \mathbb{R}$.

Функции $f(a, \tau) = e^{-\tau^2} \cos a\tau$ и $f'_a(a, \tau) = -\tau e^{-\tau^2} \sin a\tau$ непрерывны в области $0 \leq \tau < +\infty$, $-\infty < a < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos a\tau d\tau, \quad \int_0^{+\infty} \tau e^{-\tau^2} \sin a\tau d\tau,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра a . Следовательно, функции $I(a)$ и $I'(a)$ непрерывны $\forall a \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{+\infty} \tau e^{-\tau^2} \sin a\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\tau^2} \sin a\tau \Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos a\tau d\tau = -\frac{a}{2} I(a). \end{aligned}$$

Отсюда $I'(a) + \frac{a}{2}I(a) = 0$. Решая это уравнение, находим $I(a) = Ce^{-\frac{a^2}{4}}$.

Поскольку $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{a^2}{4}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \cos \tau d\tau = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}}$, $F(x) = e^{-\frac{1}{4}} \cos x$, $F(\pi) = -e^{-\frac{1}{4}}$.

Ответ: $-e^{-\frac{1}{4}}$.

Правильный ответ в задании 1 дал Давид Габидуллин (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия). Правильные ответы в задании 2 дали Захар Яковлев и Геннадий Короткевич, в задании 3 – Захар Яковлев и Чамолиддин Шарипов (филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе, Таджикистан).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 4, 5 и 6, правильные ответы в которых дали 19, 17 и 16 участников соответственно.

Задача 4 [6, с. 31]. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 клеток так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.

Ответ: 16.

Задача 5 [7, с. 29]. Найдите количество чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий: 3, 7, 11, ..., 407 и 2, 9, 16, ..., 709.

Ответ: 14.

Задача 6 [8, с. 53]. Найдите определитель десятого порядка, на главной диагонали которого расположены числа 2023, а все остальные элементы равны 2022.

Ответ: 20221.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач XI Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 50–56.

2. **Замураев, В. Г.** Решения некоторых сложных задач IX и XI Открытых олимпиад Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 54–59.

3. **Филиппов, А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Иркутск: ИрГУПС, 2000. – 176 с.
4. **Толстых, О. Д.** Нестандартные и прикладные задачи высшей математики: учебное пособие: в 4 ч. / О. Д. Толстых. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2017. – Ч. 4. – 80 с.
5. Справочное пособие по высшей математике: в 5 т. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко [и др.]. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.
6. **Екимова, М. А.** Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – Москва: МЦНМО, 2002. – 120 с.
7. **Дорофеев, Г. В.** Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – Москва: Наука, 1976. – 638 с.
8. **Ланкастер, П.** Теория матриц / П. Ланкастер. – Москва: Наука, 1973. – 280 с.

УДК 378.147

АКТУАЛЬНОСТЬ МЕЖКАФЕДРАЛЬНОГО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО РАБОТЕ С ОДАРЕННОЙ МОЛОДЕЖЬЮ

И. А. ИВАЩЕНКО, В. П. ДОМАШОВ
Военная академия Республики Беларусь
Минск, Беларусь

Руководством государства значимое внимание уделяется развитию творческих способностей и инициатив современной молодежи. На республиканском уровне организуются конкурсы, соревнования, олимпиады, создающие возможности студенческой молодежи проявить творческие и интеллектуальные способности в различных направлениях деятельности. Создана нормативная база, учреждены специальные фонды по поддержке одаренной молодежи.

В учреждении образования «Военная академия Республики Беларусь» (далее – Военная академия) одним из важнейших направлений организации работы с курсантами является создание условий для раскрытия и развития творческих способностей обучающихся. На это направлена деятельность отдела организации военно-научной работы с курсантами, на многих кафедрах работают научные и научно-технические кружки различного направления, творческие мастерские, организованы спортивные секции, кружки художественного творчества. Широкий спектр организуемых и поддерживаемых руководством академии научно-технических, военно-патриотических, спортивных мероприятий, наравне с непосредственно учебным процессом, направлен на воспитание и формирование компетентного специалиста, патриота, многогранной личности. Системный подход в работе кафедр позволяет разглядеть способности, создать

условия и благоприятную среду для их реализации, по достоинству оценить результаты научной, творческой деятельности одаренных курсантов.

В декабре текущего учебного года в Военной академии было организовано проведение межкафедрального научно-методического семинара «Опыт, результаты и проблемы работы кафедр и факультетов с одаренной молодежью», в ходе которого участники семинара – представители факультетов и общеакадемических кафедр, представили результаты работы по выявлению и реализации потенциала одаренных курсантов, обсудили имеющиеся проблемы, наметили пути совершенствования информационно-аналитического, организационного и управленческого сопровождения работы с одаренной молодежью.

Среди участников семинара были заведующие, начальники и педагоги кафедр высшей математики, физики и общетехнических дисциплин, автоматизации, радиолокации и приемопередающих устройств, радиотехники и электроники, русского языка и культуры речи, факультетов противовоздушной обороны, связи и автоматизированных систем управления и др.

В докладах участников семинара обсуждались методы и критерии оценки и отбора одаренных курсантов, цели и задачи целенаправленной и системной работы, особенности и условия результативности работы с одаренной молодежью в Военной академии, направления и формы работы в рамках военно-научной работы с курсантами, основные итоги военно-научной работы курсантов Военной академии за предшествующие пять лет, проблемные вопросы во внеурочной работе с одаренной молодежью, возможные пути решения проблем.

В результате дискуссии и обсуждения было отмечено, что в целом работа по выявлению и подготовке одаренных курсантов в Военной академии организована и ведется на должном уровне. Обеспечены административная система управления и координации деятельности по выявлению и работе с одаренной молодежью, нормативная и методическая база, комплекс научных мероприятий курсантов – научные конференции, олимпиады, конкурсы и т. п., специализированные научные издания курсантов – сборник статей, сборники тезисов и докладов на конференциях, выполнение и оценка научных и научно-технических проектов, конкурсных работ, система стимулирующих и поощрительных мер, организация и участие в мероприятиях по обмену опытом в области работы с одаренной молодежью.

В частности, представители кафедр высшей математики, имеющие большой опыт подготовки курсантов к участию в олимпиадах как республиканского, так и международного уровня, достигавших высоких результатов, сообщили о направлениях своей работы: отбор наиболее успевающих курсантов с первого по четвертый курсы для участия в академической олимпиаде; разработка конкурсных заданий для проведения этой олимпиады; организация работы военно-научного кружка по решению нестандартных математических задач; подготовка и издание «Сборника нестандартных задач», необходимого для качественной подготовки к

олимпиадам; подготовка проекта конкурсных заданий для финального этапа Международной олимпиады курсантов образовательных организаций высшего образования государств-участников СНГ (по математике).

Заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин в выступлении сделала акцент на итогах работы на кафедре кружка по решению нестандартных и повышенной сложности задач по физике, занятия которого посещают наиболее успевающие, получающие удовольствие от процесса познания курсанты всех факультетов; где курсанты работают не на отметку в журнале, а на результат, оцениваемый количеством усвоенной информации и умением ее применять при решении практических задач; где созданы условия для осознания курсантами цели своего обучения в академии – получение глубоких знаний, которые позволят им в будущем свободно самостоятельно овладевать научными теориями, отфильтровывая псевдонаучную информацию, применять их в практической деятельности офицера – инженера, исследователя, научного работника, командира. Отмечены также особенности организации и проведения межвузовской олимпиады по физике среди курсантов военных учебных заведений Республики Беларусь.

Представитель факультета противовоздушной обороны выступил с предложениями по оптимизации процесса подготовки и оформления результатов научных исследований курсантов, представляемых для участия в Республиканском конкурсе студенческих научных работ. Ранее основа таких работ закладывалась преимущественно в процессе выполнения дипломного проекта, руководитель и курсант обладали достаточным временем для накопления опыта, выполнения и оформления научной работы. После исключения из учебных планов дипломного проектирования на инженерных факультетах в результате перехода на 4-летнее образование имеются существенные сложности из-за недостаточности у курсантов необходимых навыков и временных ресурсов.

Начальником кафедры автоматизации, радиолокации и приемопередающих устройств, одной из самых результативных кафедр академии в подготовке научных кадров высшей квалификации, было отмечено, что отсутствие дипломного проектирования негативно сказывается и на возможностях участия курсантов в научно-исследовательской работе, результативности отбора кандидатов для поступления в магистратуру и адъюнктуру. Были внесены предложения по организации такой работы в современных условиях на основе совершенствования научной работы с курсантами в рамках курсового проектирования.

Заведующим кафедрой русского языка и культуры речи подчеркнута значимость организуемых кафедрой конкурсов, конференций для интеллектуального развития курсантов, воспитания настоящих патриотов, творчески мыслящих, интеллигентных, всесторонне образованных офицеров.

Участниками семинара обсуждались пути и проблемы привлечения курсантов к выполнению и оформлению научно-исследовательских работ, особенности

организации секций на курсантских конференциях, подготовки докладов и статей в курсантские сборники статей и тезисов докладов, привлечения курсантов к разработке и оформлению заявок на изобретения и полезные модели, рационализаторские предложения. Было отмечено, что работа в указанных направлениях также обеспечивает возможность отбора талантливых курсантов и создания условий для реализации их интеллектуального потенциала, что позволит обеспечить развитие научно-технического потенциала государства.

В выступлениях участников семинара отмечено также, что на должном уровне ведется работа по координации работы с одаренной молодежью со стороны отдела научной работы и учебно-методического отдела. Систематизируется и своевременно вносится информация о достижениях и рейтинговых показателях курсантов для включения их в резерв научных кадров, в Республиканский банк данных одаренных обучающихся. В рамках военно-научной работы регулярно разрабатываются и реализуются планы работы с одаренной молодежью, в перечне которых мероприятия различного уровня, в том числе международные, организуемые отделом научной работы, факультетами и кафедрами Военной академии.

Как итог, была подчеркнута необходимость дальнейшего совершенствования системной и кропотливой работы по выявлению, интеллектуальному развитию и созданию благоприятных условий для реализации творческого потенциала одаренных курсантов, которые смогут стать генераторами передовых научных идей, участвовать в разработке, внедрении и эксплуатации современных видов вооружения и военной техники. Подобные межкафедральные семинары, проводимые на регулярной основе, являются площадкой для обмена опытом, обсуждения методов, форм и средств эффективного решения задач в работе с одаренными курсантами.

УДК 378.14

О ВЫБОРЕ ДИСТРАКТОРОВ В ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЯХ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

С. Г. КАЛЬНЕЙ, Н. Н. КОНСЕВИЧ, Е. С. МИГУНОВА, Е. В. ЧАЙКИНА

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Москва, Россия

Компьютерное тестирование стало широко используемым способом оценки качества обучения в вузах по высшей математике. Для проведения те-

стирования преподавателями могут использоваться варианты тестов, имеющих на различных сайтах в интернете, опубликованные сборники тестов, тесты Росаккредитации. Но применение их в конкретном вузе, конкретным преподавателем без значительной переработки часто невозможно в силу больших различий в вузах России в содержании математической подготовки даже по одному и тому же направлению подготовки бакалавров, имеющейся практики предоставления права преподавателям вузов варьировать в широких пределах глубину изложения отдельных тем математических дисциплин. Поэтому преподаватели обычно сами разрабатывают (изменяют найденные на сайтах, в сборниках) тестовые задания, тесты с учётом реализуемых ими программ математической подготовки в своём вузе.

В соответствии с теорией разработки тестов и проведения тестирования качественные тестовые задания, тесты должны удовлетворять ряду требований, проходить апробацию с дальнейшей статистической обработкой результатов апробации [1–3].

Одним из требований, определяющим качество тестового задания, является качественная разработка дистракторов (неправильных, но правдоподобных ответов) в тестовых заданиях закрытого типа, часто используемых в тестах по высшей математике.

Во многих случаях в задании предлагается выбрать один правильный вариант ответа из 4–5 предложенных вариантов. При разработке тестовых заданий неправильные варианты ответов должны предлагаться не случайные, а на основе анализа ошибок, допускаемых студентами при решении задач. Анализируя тестовые задания закрытого типа, как разработанные и используемые авторами статьи, так и предлагаемые в сборниках тестов, на сайтах, нетрудно заметить, что не все варианты ответов удовлетворяют этому требованию. Имея опыт обучения, проведения контрольных работ, для многих стандартных задач часто нетрудно указать 1–2 типичные ошибки в решениях, ведущие к неправильному ответу. Указать 3–4 неправильных ответа на основе анализа действий студентов уже сложно. Поэтому как в тестовых заданиях закрытого типа авторов сообщения, так и в сборниках тестов, на сайтах нередко предлагается 1–2 варианта ответов, сформулированные не по ошибкам студентов, а по факту лишь для увеличения количества предлагаемых ответов в задании. Это позволяет уменьшить вероятность выбора студентом правильного ответа путём простого угадывания.

Приведём несколько примеров таких заданий из тестов авторов, а также из сборников тестов, сайтов.

Пример 1 – Известно, что $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Тогда значение предела

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x)}$: а) 3; б) –3; в) 0; г) ∞ ; д) не существует.

Предложение неправильного варианта ответа д) объяснимо: делить на ноль нельзя. Сложнее объяснить предложение в качестве неверного ответа варианта ответа в) и еще сложнее объяснить предложение вариантов ответов а) и б).

Пример 2 – Найти элемент c_{32} матрицы $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: 1) -10; 2) 0; 3) 10; 4) 20; 5) 25.

Неясно, какие ошибки должен сделать студент, чтобы получить предложенные неправильные варианты ответов.

Пример 3 – Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ равен: 1) 16; 2) 26; 3) -16; 4) 21.

Ошибка, которую может сделать студент для получения неверного ответа 2), объяснима: вместо вычитания произведения элементов побочной диагонали студент прибавляет его. Но на практике не встречали ошибок, приводящих к неверным ответам 1) или 4).

Пример 4 – Производная функции $y = (\operatorname{tg} x)^x$ равна:
 1) $x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \cdot \left(\frac{x}{\sin x \cos x} + \ln \operatorname{tg} x \right)$; 2) $(\operatorname{tg} x)^x \cdot \left(\frac{x}{\sin x \cos x} + \ln \operatorname{tg} x \right)$;
 3) $(\operatorname{tg} x)^x \cdot \ln \cos x$; 4) $x \cdot (\operatorname{tg} x)^{x-1}$; 5) среди приведённых ответов нет правильного.

Предложение неправильного ответа 1) связано с тем, что студент, вычислив правильно производную от логарифма функции, затем неверно умножил результат на логарифм функции, а не на саму функцию. Вариант 4) предложен из-за часто совершаемой ошибки: степенно-показательная функция дифференцируется как степенная. Предложение варианта 3) в качестве возможного ответа сложно обосновать.

В практике задания закрытого типа, правильный ответ на которое есть целое число, заменялись заданиями открытого типа с вводом числа с клавиатуры, чтобы не проводить трудоёмкую работу по подбору вариантов ответов. В таком случае теряется возможность получения статистики о типичных ошибках, допускаемых при решении задания, и о выполнении заданий простым угадыванием. Такая статистика была бы интересной при большой выборке. При тестировании в конкретном вузе количество студентов, выполнявших одно и то же задание, обычно не является большим (если не накапливалась статистика за несколько лет). В опыте авторов не более 40–50 студентов, из которых один из неверных ответов выбрали 3–5 студентов.

Трудоёмкость разработки правдоподобных неверных ответов для заданий закрытого типа с примерно равной вероятностью выбора дистракторов отмечается во многих работах. После разработки должна быть проведена апробация и статистическая обработка результатов апробации. Тестовые задания без проведения обработки результатов апробации в теории тестирования называют псевдотестовыми. В. С. Аванесовым в [4] рассматривается два метода анализа дистракторов. Но в работах, посвящённых статистическому анализу тестов по высшей математике, обычно не приводятся сами тесты. Интересные данные на небольших по объёму выборках по проблеме разработки вариантов неверных ответов приведены И. Н. Булановой в [5], где проанализирована правдоподобность дистракторов тестов.

Статистические методы для анализа тестов, тестовых заданий закрытого типа требуют наличия первичной исходной информации результатов тестирования, содержащей данные по выбору отвечающим вариантов ответов в каждом задании. К сожалению, получение такой первичной информации часто невозможно (или сопряжено с большими затратами времени). Кроме того, объёмы тестируемых в конкретном вузе по отдельным заданиям обычно небольшие, чтобы сделать по обработке результатов тестирования значимые выводы.

Поэтому, несмотря на несоответствие теоретическим требованиям теории создания и разработки тестов, считаем полезным рассматривать и обсуждать экспертным образом варианты дистракторов в конкретных заданиях, имеющих псевдотестовый характер. Экспертное обсуждение может быть учтено преподавателями при собственной разработке тестов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Майоров, А. Н.** Теория и практика создания тестов для системы образования: как выбирать, создавать и использовать тесты для целей образования / А. Н. Майоров. – Москва, 2000. – 352 с.
2. **Челышкова, М. Б.** Теория и практика конструирования педагогических тестов: учебное пособие / М. Б. Челышкова. – Москва: Логос, 2002. – 432 с.
3. **Аванесов, В. С.** Композиция тестовых заданий: учебник / В. С. Аванесов. – 3 изд., доп. – Москва: Центр тестирования, 2002. – 240 с.
4. **Аванесов, В. С.** Дистракторный анализ / В. С. Аванесов // Педагогические измерения. – 2013. – № 1. – С. 70–78.
5. **Буланова, И. Н.** Анализ правдоподобности дистракторов педагогических тестов / И. Н. Буланова // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Психолого-педагогические науки. – 2017. – № 1 (33). – С. 30–35.

УДК 37.091.3:519.7:004

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON НА ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЯХ В КУРСЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ»

А. Г. КОЗЛОВ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

На изучение основ теории графов в курсе «Дискретная математика и математическое моделирование» учебной программой предусмотрено два лабораторных занятия. Использование языка программирования Python со специализированной библиотекой NetworkX в совокупности с Colaboratory (Golab) экономит время, затрачиваемое для вычисления и оформления отчетов по лабораторной работе.

Созданная на языке Python библиотека NetworkX предназначена для работы с графами и сетевыми структурами. В библиотеке NetworkX реализована возможность для работы с ориентированными, неориентированными и взвешенными графами. В библиотеку встроены процедуры создания графов, различные методы для нахождения максимальных подграфов, обнаружения клик и К-дольных графов, вычисления различных характеристик графа (радиус, диаметр, степени вершин и высота графа). Также NetworkX позволяет визуализировать графы и сети в виде 2D- и 3D-графиков.

На рис. 1 приведен фрагмент кода на языке Python для построения ориентированного графа и результат его выполнения.

```
# создаём объект граф M
M = nx.DiGraph()
# задаем список вершин графа
nodes = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
# задаем список дуг графа
edges = [(1, 1), (1, 3),
         (2, 1), (2, 3), (2, 4),
         (3, 3), (3, 6),
         (4, 2), (4, 4), (4, 5),
         (5, 3), (5, 6),
         (6, 1), (6, 4)]
# добавляем информацию в граф
M.add_nodes_from(nodes) # вершины
M.add_edges_from(edges) # ребра
# отображаем граф
nx.draw(M, with_labels=True)
plt.show()
```

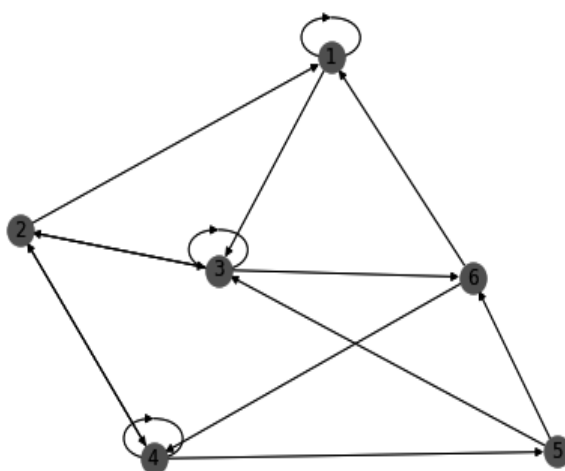


Рис. 1. Ориентированный граф

Отчет по лабораторной работе формируется в Golab с использованием языка текстовой разметки Markdown и LaTeX. На рис. 2 приведен фрагмент отчета лабораторной работы.

Лабораторные работы сохраняются в общей папке Google Диске для дальнейшей проверки преподавателем.

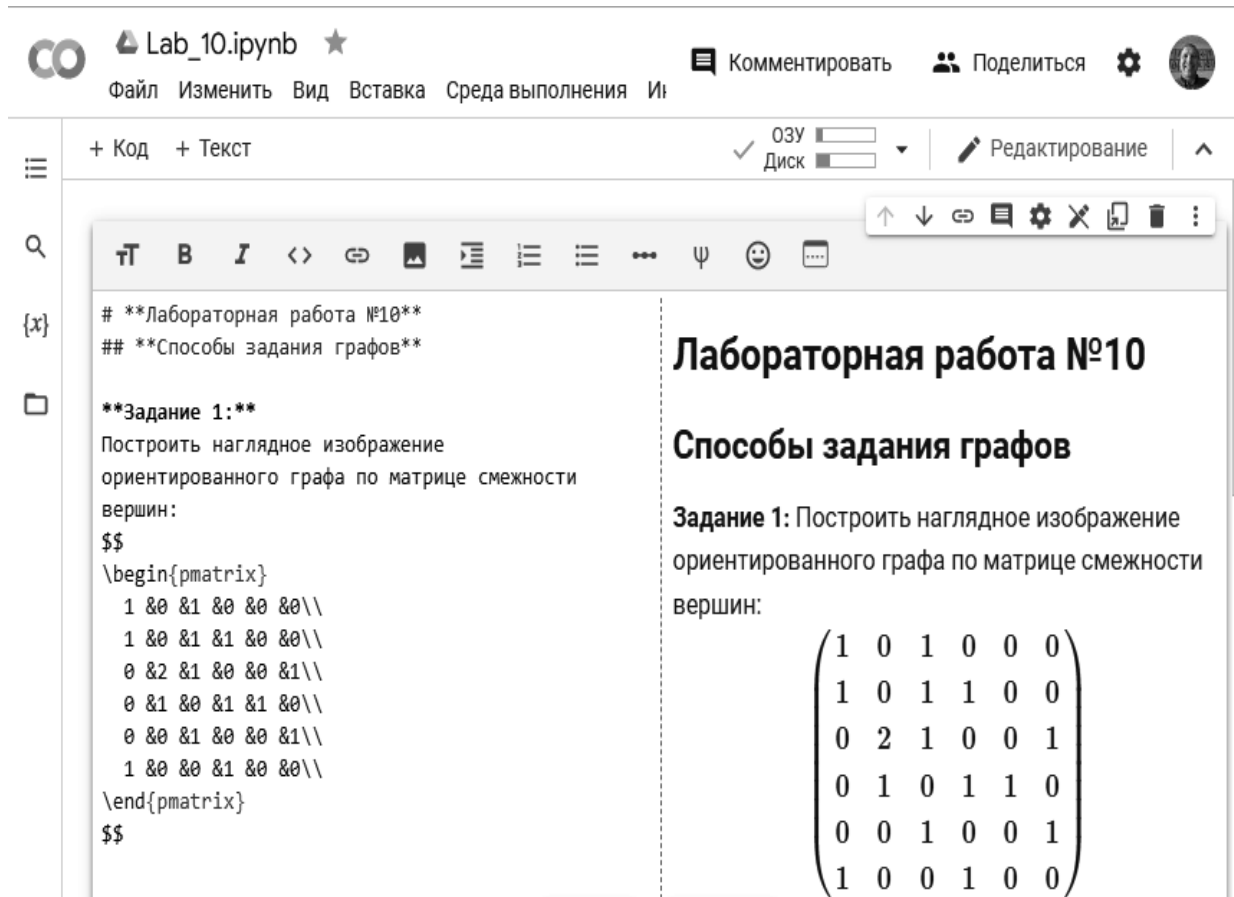


Рис. 2. Фрагмент отчета лабораторной работы

УДК 519.221

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В КУРСЕ СТАТИСТИКИ

А. А. КУЗНЕЦОВА

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Задачи математической статистики обычно предполагают большое количество вычислений, избежать которых можно либо ограничиваясь выборками небольшого объема (но в этом случае теряется практический смысл многих задач),

либо прибегая к помощи компьютерных математических систем (КМС). В последнем случае желательно использовать распространенные и свободно доступные программные продукты. Существует большое количество КМС, позволяющих проводить статистические вычисления: SPSS, SAS, R, Statistica, Statgraphics, MS Excel и его аналоги (Libre Office, Open Office Calc). О возможностях применения MS Excel для проведения лабораторных работ по статистике можно прочесть в [1–3]. В последние годы большое распространение приобрел язык программирования Python. Будучи одним из ведущих языков программирования, он имеет много библиотек (наборов модулей, облегчающих некоторые специфические операции). Модуль *stats* библиотеки *scipy* позволяет решить большую часть статистических выкладок, имея как инструменты статистической визуализации (построение гистограмм, графиков функций распределения), так и инструменты построения доверительных интервалов и проверки гипотез, на которых мы и остановимся. Студенты обычно знакомы с языком Python по курсу программирования и без проблем применяют его возможности на практике, поэтому речь идет только об освоении функций библиотеки. Отметим, что инструменты Python являются свободно распространяемыми (не требуют выполнения лицензионных соглашений).

Мы рассмотрим возможности *scipy* применительно к задаче построения доверительного интервала и проверки гипотез для параметра среднего нормального распределения. Предварительно подключим соответствующий модуль: *from scipy import stats as st*.

При вычислении **доверительных интервалов** для параметров основных распределений задача обычно сводится к вычислению выборочных характеристик (выборочного среднего, смещенной или исправленной дисперсии), а также квантилей нужных распределений. Все инструменты для этих вычислений содержатся в модуле *stats* библиотеки *scipy*, также можно использовать библиотеку для научных вычислений *numpy*. Кроме того, возможно и непосредственное построение доверительных интервалов в отдельных случаях.

Например, построение доверительного интервала для параметра среднего нормального распределения в случае неизвестной дисперсии осуществляется в библиотеке *scipy* с помощью метода *interval* модуля распределения Стьюдента *scipy.stats.t* (краткая запись *st.t*) следующим образом:

$$confidence_interval = st.t.interval(alpha = 0.95, df = len(sample)-1,$$

$$loc = sample.mean(), scale = sample.sem()),$$

где *alpha* – уровень доверия; *df* (от англ. «degrees of freedom») – число степеней свободы, равное $n - 1$, n – объем выборки; для выборки *sample* вычисляется как $len(sample)-1$; *loc* – выборочное среднее; для выборки *sample* вычисляется как

sample.mean(); *scale* – оценка стандартной ошибки, равная $\sqrt{s^2/n}$ (где s^2 – исправленная выборочная дисперсия, для выборки *sample* вычисляется как *sample.sem()*).

Результат вызова метода, т. е. переменная *confidence_interval* содержит кортеж значений, составляющих доверительный интервал [4, с. 217].

Используя нормальное распределение, можно построить доверительный интервал и в случае известной дисперсии *sigma* (метод реализует соответствующую формулу [4, с. 215]):

```
confidence_interval = scipy.stats.norm.interval(confidence, loc = sample.mean(),  
                                                scale = sigma/sqrt(N)).
```

Задачи **проверки гипотезы** о параметрах распределений также можно решать, используя известные формулы [4, 5], предполагающие вычисления выборочных характеристик и квантилей, либо автоматически.

В частности, проверка гипотезы о равенстве среднего значения нормальной выборки *sample* наперед заданному значению $m_0 = \text{popmean}$ (т. е. гипотезы $H_0 : m = m_0$ против альтернативы $H_1 : m \neq m_0$ [5, с. 176, формула (4.21)]) осуществляется с помощью метода *ttest_1samp*, реализующего соответствующий критерий Стьюдента:

```
results = scipy.stats.ttest_1samp (sample, popmean)
```

Результатом применения критерия является кортеж, состоящий из *t*-статистики критерия и так называемого *p*-значения (вероятности получить итоговую статистику при условии, что верна основная гипотеза). Заметим, что метод *ttest_1samp* не содержит уровень значимости критерия в качестве параметра. Для принятия решения мы должны сравнить значение *results.pvalue* с уровнем значимости *alpha* (в первом случае принимает гипотезу H_0 , во втором – H_1):

```
if results.pvalue < alpha:  
    print("Среднее равно ожидаемому значению")  
else:  
    print("Среднее не равно ожидаемому значению")
```

В Python есть специальный метод для проверки гипотезы о равенстве средних двух выборок *sample1* и *sample2* (т. е. гипотезы $H_0 : m_1 = m_2$ против альтернативы $H_1 : m_1 \neq m_2$ [5, с. 176, формула (4.24)]):

```
results = scipy.stats.ttest_ind (sample1, sample2, equal_var=True/False),
```

получающий в качестве параметров массивы выборок, а также необязательный параметр *equal_var*, задающий, считать ли равными дисперсии выборок; по умолчанию он примет значение *True*. Проверка гипотез проводится так же, как и в предыдущем случае, т. е. с помощью сравнения *p*-значения *results.pvalue* с заданным уровнем значимости *alpha*.

Чтобы проверить гипотезу о равенстве средних двух генеральных совокупностей для зависимых (парных) выборок [4, с. 314] в Python, применим метод *scipy.stats.ttest_rel(sample1, sample2)*. Методу достаточно передать только два параметра с массивами данных, при этом размеры массивов должны быть одинаковы. Принятие решения аналогично.

Объем применения КМС в курсе статистики зависит от количества выделяемых на дисциплину часов, допустимого формата занятий (выделения часов на лабораторные работы, возможности применения дистанционного формата), а также технического оснащения учебного заведения, но в любом случае включение подобного рода заданий в курс приносит существенную пользу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ветров, Л. Г.** Прикладная статистика / Л. Г. Ветров, А. А. Кузнецова, А. Л. Сунчалина. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 52 с.
2. **Кузнецова, А. А.** Лабораторные работы в курсе статистики / А. А. Кузнецова // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2018. – Т. 6. – С. 159–164.
3. **Ветров, Л. Г.** Лабораторные работы в курсе математической статистики / Л. Г. Ветров, А. Л. Сунчалина // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 5.
4. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2017. – 479 с.
5. **Горяинов, В. Б.** Математическая статистика / В. Б. Горяинов, И. В. Павлов, Г. М. Цветкова. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 424 с.

УДК 372.851: 514

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМЫ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. В. ЛЕОНТЬЕВА

Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко
Глазов, Россия

Подготовка будущих учителей математики включает в себя изучение вопросов обучения решению олимпиадных задач и задач повышенной сложности. К их числу относятся и вопросы, связанные с решением задач на построение в про-

странстве. Некоторые основные теоретические сведения по данной теме представлены в [1–3]. Процесс решения становится более наглядным при использовании информационных технологий. Рассмотрим особенности использования информационных технологий для решения задач на построение в пространстве.

Одним из наиболее удобных средств для решения задачи на построение является динамическая среда GeoGebra. Ее применение возможно различным образом. В первом случае программа используется непосредственно для визуализации выполняемых действий. В этом случае каждый шаг реализуется непосредственно на занятии совместно со студентами. Преимущество такого подхода заключается в том, что учащиеся могут активно участвовать в обсуждении всех выполняемых построений, что дает возможность в реальном времени обосновывать все совершаемые действия, рассматривать различные подходы и варианты, применяемые в процессе решения.

В качестве примера рассмотрим задачу о построении точки, лежащей на данной прямой и равноудаленной от двух данных точек, не лежащих на этой прямой. На этапе анализа можно предложить студентам изобразить исходное множество объектов и искомую точку (рис. 1).

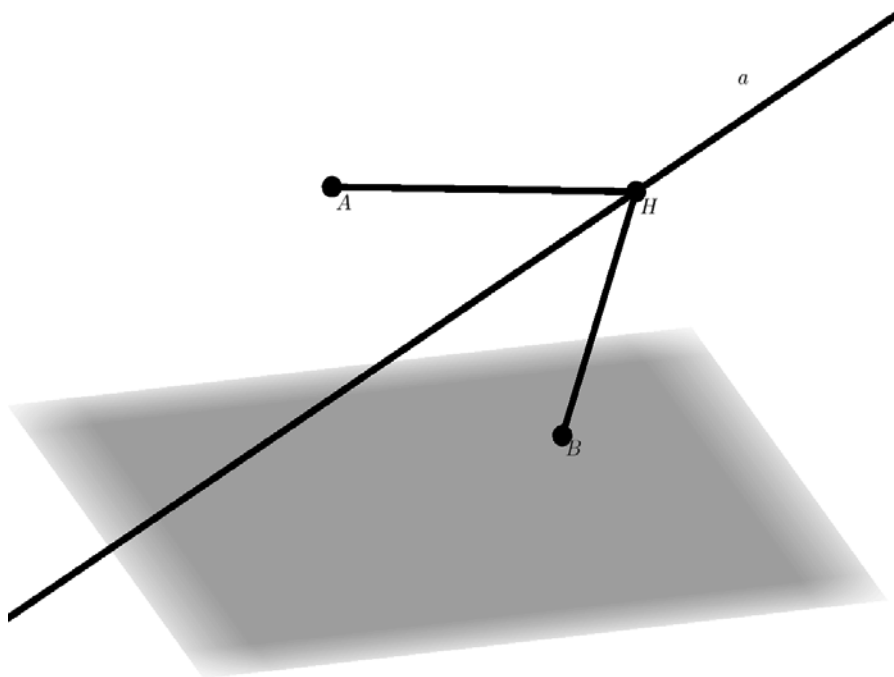


Рис. 1. Анализ задачи

Использование условия о том, что точка H равноудалена от двух данных точек A и B , позволяет найти решение задачи. Множество точек, удовлетворяющих данному свойству, расположено в плоскости симметрии этих точек. Соответственно точка пересечения данной плоскости и исходной прямой будет искомой.

Непосредственная реализация процесса построения дает возможность наглядно представить все шаги, а также представить его наглядно. Особенностью реализации данного этапа является то, что процесс построения в GeoGebra может несколько отличаться от тех применяемых в конструктивной геометрии средств (табл. 1).

В системе GeoGebra можно реализовать и собственно план построения, описанный средствами конструктивной геометрии. Однако выбранный вариант имеет меньшее количество шагов и проще в реализации.

Табл. 1. Построение точки на прямой, равноудаленной от двух данных точек

Построение в конструктивной геометрии	Построение в системе GeoGebra
Построение прямой a и точек A, B , не лежащих на прямой a . Построение отрезка AB	
Построение сфер $\Omega_1(A, AB), \Omega_2(B, AB)$	Построение середины отрезка AB
$\omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$	Построение плоскости α , перпендикулярной к AB и проходящей через его середину
Построение плоскости α , проходящей через ω	
$\alpha \cap a = H$	

При проведении исследования можно рассмотреть несколько различных случаев взаимного расположения прямой a и плоскости симметрии, что определяет количество решений задачи (табл. 2).

Табл. 2. Число решений задачи

Взаимное расположение объектов	Число решений задачи
$\alpha \cap a$	Одно решение
$\alpha \parallel a$	Нет решений
$a \in \alpha$	Бесконечно много решений

Во втором случае можно использовать готовые шаблоны, с помощью которых можно продемонстрировать результаты построения. В тех случаях, когда процесс построения содержит достаточно большое число различных шагов, выгоднее использовать готовые построения, позволяющие наглядно представить шаги построения и не тратить лишнее время на реализацию во время занятия.

Выбор способа применения системы GeoGebra дает возможность преподавателю оптимальным образом использовать время занятия, наглядно представлять построенные пространственные объекты, а также продемонстрировать возможные варианты для исходных условий и описать различные случаи решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Леонтьева, Н. В.** Обучение школьников конструктивной геометрии в пространстве в первой половине XX века [Электронный ресурс] / Н. В. Леонтьева // Историко-педагогическое обоснование ценностей современного образования : коллективная монография, посвящ. юбилею д-ра пед. наук, проф. Марины Алексеевны Захарищевой / под ред. М. А. Захарищевой; Глазов. гос. пед. ин-т им. В. Г. Короленко. – Казань: Бук, 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
2. **Леонтьева, Н. В.** Применение элементарных построений при решении задач конструктивной геометрии в пространстве [Электронный ресурс] / Н. В. Леонтьева // Вестн. пед. опыта. Сер. Математика и информатика. – 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
3. **Леонтьева, Н. В.** Теоретические основы конструктивной геометрии в пространстве [Электронный ресурс] / Н. В. Леонтьева // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики: сб. науч. и науч.-практ. ст. VII Всерос. науч.-практ. конф., Глазов, 26–27 нояб. 2021 г. / науч. ред. Е. М. Вечтомов, отв. ред. И. В. Владыкина, Н. В. Леонтьева; Глазов. гос. пед. ин-т им. В. Г. Короленко. – Глазов: ГППИ, 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

УДК 004

О ВАЖНОСТИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

В. А. ЛИВИНСКАЯ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Визуализация числовой информации, как наиболее эффективный в восприятии инструмент анализа, в последнее время становится все более доступным, благодаря использованию таких современных языков программирования, как R и Python. Мощные средства визуализации с помощью специальных библиотек позволяют описывать распределение наблюдаемых признаков с помощью гистограмм, эмпирических функций распределения, скрипичных диаграмм. Визуализация процесса проверки статистических гипотез осуществляется с помощью коробочных графиков (чаще используется английский вариант *boxplot*).

В данной работе представлено практическое применение описанных инструментов к конкретной задаче анализа потребительских свойств товаров, информация о которых размещена на различных маркетплейсах. Студентам, обучающимся по профилю, связанному с информационными технологиями, при изучении дисциплины «Базы знаний и системы поддержки принятия решений» было предложено собрать и проанализировать выборку по интересующему их товару с целью выбора наиболее оптимального по сконструированной функции качества. Рассматривались как количественные (принимающие любое значение

из определенного диапазона), так и категориальные факторы, которые обозначают принадлежность объекта к какой-то категории. Ребята, знакомые с технологией парсинга сайтов, написали парсер для интернет-магазина «21 век» и с его помощью приступили к анализу. В результате очистки полученных данных (удалении пропущенных значений), анализу подверглась выборка из 300 моделей мобильных телефонов. Экспертами (ими являлись сами студенты) были выделены наиболее важные количественные факторы:

- частота обновления экрана (ScreenRefreshRate), Гц;
- количество точек матрицы (NumberOfMatrixPoints), МП;
- частота обновления процессора (ProcessorClockSpeed), МГц;
- объем батареи (BatteryCapacity), мА·ч.

Для анализа были отобраны категориальные факторы, имеющие небольшое количество уровней факторов. Ими оказались:

- тип операционной системы (OS);
- наличие технологий LTE и G5;
- частота обновления экрана (ScreenRefreshRate), Гц;
- объем оперативной памяти (RAM), ГБ;
- постоянной памяти (Memory), ГБ.

Для отбора категориальных факторов, оказывающих влияние на рыночную цену телефона, были построены специальные диаграммы-boxplot (рис. 1), на которых представлены медианы, первый и третий квартили цены для каждого уровня категориального признака. Визуализация осуществлялась с помощью среды R-Studio, размещенной в общеуниверситетской сети и используемой при проведении лабораторных работ.

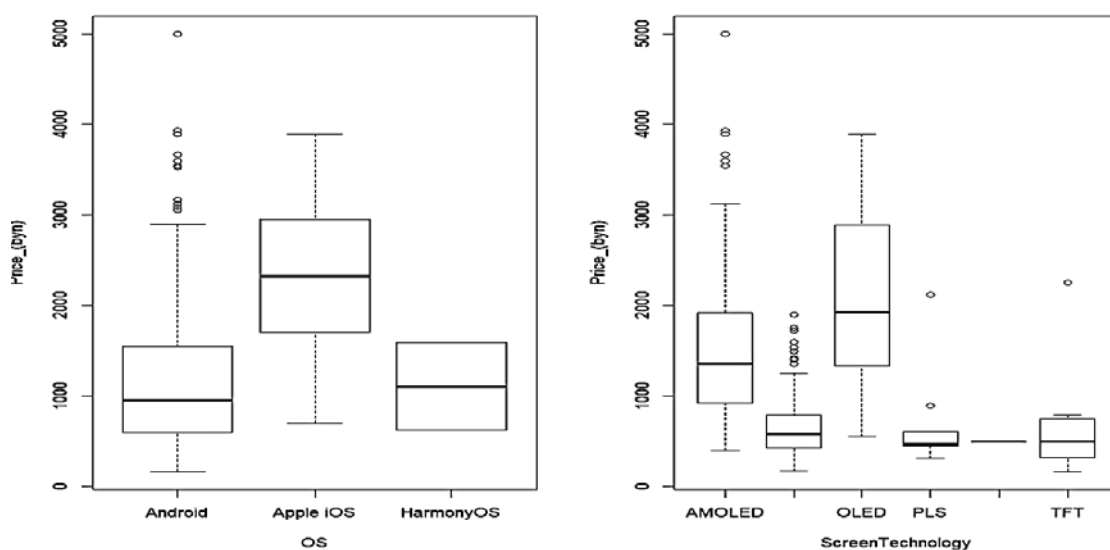


Рис. 1. Различие в цене в зависимости от типа операционной системы и технологии экрана мобильных телефонов

Анализируя данный график можно предположить незначительное различие в диапазонах цен на телефоны с операционными системами Android и Harmony, по сравнению с Apple iOS. Окончательный вывод делается после проведения дисперсионного анализа.

Описательная статистика количественных признаков проводилась с помощью функции Desc пакета DescTools (рис. 2). Данная функция позволяет выводить суммарные показатели и диаграммы.

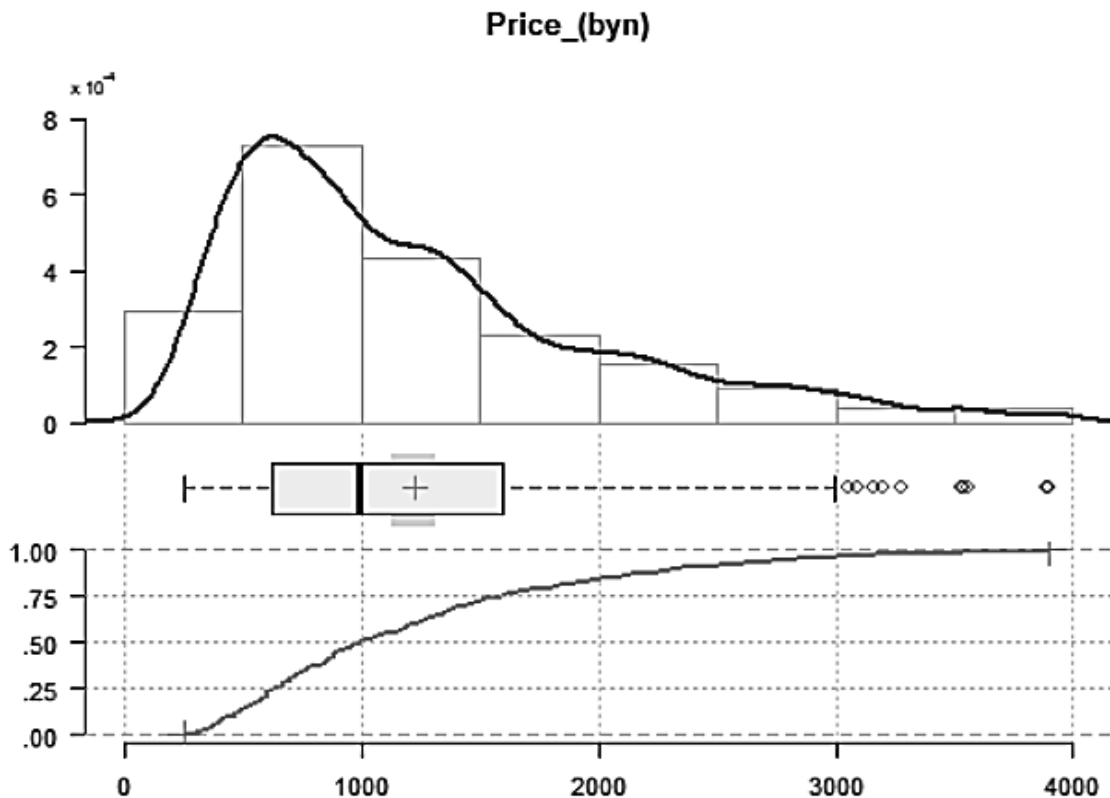


Рис. 2. Визуализация частотного распределения цены

В результате использования данной функции выводятся значения частоты признака переменной в абсолютных значениях и процентах, а также кумулятивные показатели. Так, например, можно заметить, что в имеющейся выборке цена 50 % телефонов не превышает 1000 белорус. р., и только четверть имеет цену выше 2000 белорус. р. В такой интерпретации понятия из математической статистики, такие как медиана, эмпирическая функция распределения, гистограмма частот, несомненно будут восприниматься студентами с большим интересом.

Дальнейшие этапы анализа предполагали определение направления связи между ценой и выбранными факторами, нормирование их и построение экспертной функции качества, представляющую собой линейную комбинацию нормированных факторов и весов. Использование стандартного точечного графика позволило выявить множество Парето, из которого пользователю предлагалось

выбрать телефон, соответствующий оптимальному сочетанию цена–качество (рис. 3). Согласно критерию Парето, наилучший выбор соответствует вариантам с максимальными значениями целевой функции при заданной цене. Наилучшей можно считать модель смартфона Xiaomi 12T Pro 8GB/256GB международная версия (серебристый) (цена – 1920 белорус. р.).

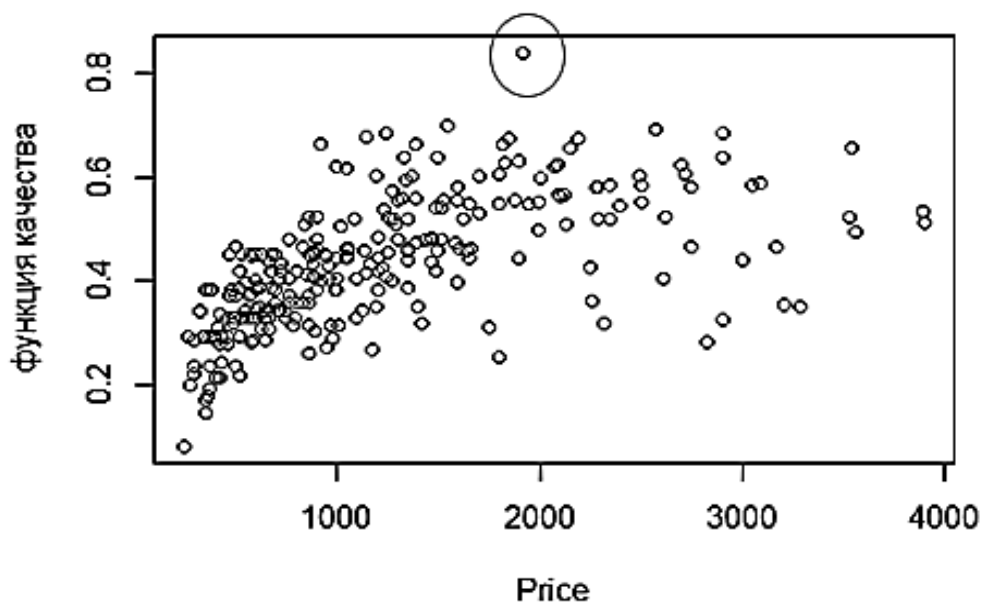


Рис. 3. Выбор оптимального телефона

Таким образом, визуализация при решении прикладных задач является действенным инструментом.

УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ФОНДОВ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН ДЛЯ ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Современные подходы к планированию результатов обучения требуют от педагога, ведущего образовательный процесс, четкого понимания результатов образовательной деятельности, которая должна привести по окончании изучения дисциплины к формированию у обучающихся определенной компетенции (компонента компетенции). Компетентностный подход зародился в США

в 1980-е гг. как реакция системы образования на инертные образовательные программы, неспособные ответить растущим потребностям экономики и общества. С 2009 г. компетентный подход активно внедряется в системе образования Российской Федерации [1], а с 2013 г. и в Республике Беларусь [2].

Постепенно система образования уходит от устаревшей концепции «знаний, умений, навыков» к более универсальной концепции формирования универсальных, общих и профессиональных компетенций, при этом нарастают требования к методическим компетенциям педагога, от которого требуется четкое понимание сути формируемых компетенций, способности построить образовательный процесс так, чтобы педагогические цели формирования компетенций были достигнуты, а также умения разработать педагогические средства измерения уровня сформированности компетенций.

В образовательных стандартах ФГОС ВО 3++ Российской Федерации, а также в образовательных стандартах нового поколения, внедряемых Министерством образования Республики Беларусь, зафиксировано требование о наличии по каждой дисциплине фондов оценочных средств.

Фонд оценочных средств по учебной дисциплине представляет собой совокупность контролирующих материалов, предназначенных для измерения уровня достижения студентом установленных результатов обучения и используется при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов [3].

При формировании фондов оценочных средств (ФОС) необходимо учитывать следующие требования.

1. Задания, включаемые в ФОС, должны быть сформулированы таким образом, чтобы четко прослеживалась связь предложенного задания и формируемой компетенции (индикатора компетенции).

2. Задания, включаемые в ФОС, могут иметь форму тестовых заданий открытой или закрытой формы [4], однако для исключения фактора «угадывания» необходимо минимизировать число тестовых заданий в закрытой форме.

3. Возможно, и даже приветствуется, включение в ФОС кейсовых заданий, а также заданий, учитывающих междисциплинарные связи [5], позволяющие оценить уровень сформированности нескольких компетенций (индикаторов компетенций), формируемых другими дисциплинами.

4. Задания из фондов оценочных средств должны постоянно апробироваться обучающимися, на основании статистической информации по каждому заданию должна выполняться корректировка задания, разработка новых заданий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шармин, В. Г. Компетентный подход в высшем образовании России: двадцать лет спустя / В. Г. Шармин, Д. В. Шармин // Казан. пед. журн. – 2021. – № 3. – С. 64–70.

2. **Титович, И. В.** Реализация компетентностного подхода в системе высшего образования Республики Беларусь / И. В. Титович // *Вышэйшая школа*. – 2017. – № 3. – С. 3–5.
3. **Алилуйко, Е. А.** Фонд оценочных средств в структуре основной образовательной программы высшего образования / Е. А. Алилуйко // *Вестн. РМАТ*. – 2014. – № 3. – С. 100–103.
4. **Ефанова, О. А.** Форма тестовых заданий / О. А. Ефанова // *Ученые записки Орлов. гос. ун-та*. – 2018. – № 4 (81). – С. 320–323.
5. **Васильева, Н. О.** Межпредметные связи в высшем профессиональном образовании: типология, формы реализации / Н. О. Васильева // *Проблемы современной аграрной науки: материалы Междунар. науч. конф.* – Красноярск, 2018. – С. 240–244.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ ЗАДАНИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В процессе подготовки студентов по направлению подготовки «Прикладная математика» в структуре учебного плана присутствует достаточно большое количество дисциплин, целью изучения которых является формирование у обучающихся компетенций, связанных со специализированным математическим программным обеспечением, позволяющим автоматизировать вычисления, использовать алгоритмы быстрых матричных вычислений, статистических функций, имитационного моделирования и т. д.

Одной из таких дисциплин является дисциплина «Современные математические системы», в рамках которой студенты знакомятся с возможностями пакетов RTC MathCad, Octave [1], R Project [2]. Данные математические пакеты на данный момент занимают лидирующие позиции в мире в сфере символьных вычислений, матричной алгебры и автоматизации вычислений, статистических расчетов.

Образовательный процесс дисциплины выстроен классическим образом – теоретические сведения, полученные на лекционных занятиях, закрепляются на лабораторных работах, в рамках которых студенты изучают функционал математических пакетов, учатся применять их возможности для решения базовых математических задач. В то же время результатом освоения дисциплины должны стать сформированные компетенции – способность разработки и использования

современных математических методов, способность разработки методов математического моделирования с применением аналитических и научных пакетов прикладных программ.

Для достижения целей изучения данной дисциплины и формирования указанных компетенций в структуре подготовки студентов используются специальные межпредметные комплексные задания.

Межпредметным связям [3, 4] в процессе обучения уделяли достаточно много внимания различные ученые-методисты на всех этапах становления и развития педагогической науки. В [5] отмечается, что реализация межпредметных связей в образовательном процессе обусловлена целостным характером компетентностной модели выпускника, при этом дидактический потенциал межпредметных связей позволит учесть достижения и ошибки предшествующего педагогического опыта, а также сформировать новые компетенции.

Разработанные задания представляют собой прикладные задачи, требующие от обучающихся владения методами линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, а также навыков формализации указанных методов с помощью математических пакетов, умения применять полученные формализации для математического моделирования и визуализации. Ниже приведен пример подобного задания.

Одним ученым в рамках классической механики производится следующий эксперимент: груз массой m запускается под углом к горизонту с помощью некоего устройства, позволяющего придать грузу начальную скорость v_0 . Пусковое устройство расположено на горизонтальной плоскости в точке пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, запуск ведется в направлении вектора $\vec{a}(p, q)$, который нерадивым ассистентом случайно был повернут на угол α , запуск груза производится под углом к горизонту β . Запуск производится в некоторой среде, которая оказывает грузу в полете сопротивление, направленное противоположно вектору его скорости, значение силы сопротивления пропорционально кубу скорости с некоторым коэффициентом k . В процесс запуска вмешиваются случайные факторы – к углу поворота ствола добавляется случайная погрешность $\Delta\alpha \in (-\delta\alpha_0; \delta\alpha_0)$, начальная скорость груза также изменяется случайно на величину $\Delta v \in (-\delta v_0; \delta v_0)$ (всему виной нерадивый ассистент).

Ученый хочет оценить статистическую вероятность того, что запущенный при таких условиях груз попадет в заданную область – четырехугольник на горизонтальной плоскости, вершины которого заданы точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$.

На основании этих данных необходимо разработать m -скрипт (GNU Octave) или рабочий лист в PTC MathCad, который поможет ученому произвести моделирование 100 запусков груза, собрать информацию о точке его падения и попа-

дания в заданную область, а также передать полученные данные в пакет R, с помощью которого можно будет найти статистическую вероятность этого события и изобразить необходимые графики. В качестве дополнительного задания предлагается оценить влияние случайных параметров на исследуемый параметр.

Таким образом, для решения поставленной задачи, обучающиеся должны предъявить владение компетенциями не только в области использования математических пакетов и систем, но также и в области аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории вероятностей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкая, О. А.** Применение современных математических пакетов при изучении курса высшей математики / О. А. Маковецкая, И. И. Маковецкий // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 60–61.
2. **Маковецкий, И. И.** Использование пакета R при изучении математической статистики / И. И. Маковецкий // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 53–54.
3. **Каменский, Я. А.** Избранные сочинения / Я. А. Каменский. – Москва: Учпедгиздат, 1955. – 287 с.
4. **Васильева, Н. О.** Феномен совместимости в научно-педагогическом знании и практике образования / Н. О. Васильева. – Красноярск: Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2018. – 208 с.
5. **Васильева, Н. О.** Межпредметные связи в высшем профессиональном образовании: типология, формы реализации / Н. О. Васильева // Проблемы современной аграрной науки: материалы Междунар. науч. конф. – Красноярск, 2018. – С. 240–244.

УДК 378.016:51(004.4)

СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РЯДОВ

И. В. МАРЧЕНКО

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Новый учебный план специальности 1-02 05 02 «Физика и информатика» не учитывает специфику преподавания математических дисциплин, фундаментальные основы которых обязательны для изучения различных физических курсов. Помимо сокращения аудиторных часов при сохранении содержания, это отражается в разбиении на составные части одной дисциплины, а затем объединении частей различных дисциплин в модули.

Так, например, для указанной специальности курс математического анализа разбит на две части «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения

и ряды». Учитывая небольшое количество часов (22 часа лекций и 22 часа практических занятий), в учебной программе дисциплины «Дифференциальные уравнения и ряды» по 14 часов каждого вида занятий отводится на изучение дифференциальных уравнений. В связи с этим возникает задача компактной организации лекционного материала по разделу «Ряды», которая позволила бы проследить общие подходы к исследованию различных видов рядов.

Изложение материала лекций построено следующим образом. Сначала блоками вводятся основные понятия и теоремы:

- 1) числовой ряд, его сумма, сходимость, необходимое условие сходимости, положительные ряды;
- 2) знакочередующийся ряд и признак Лейбница, знакопеременный ряд и абсолютная сходимость, достаточное условие абсолютной сходимости, условная сходимость;
- 3) функциональная последовательность и функциональный ряд, их сходимость и равномерная сходимость.

Далее строится структурно-логическая схема для введенных понятий (рис. 1).

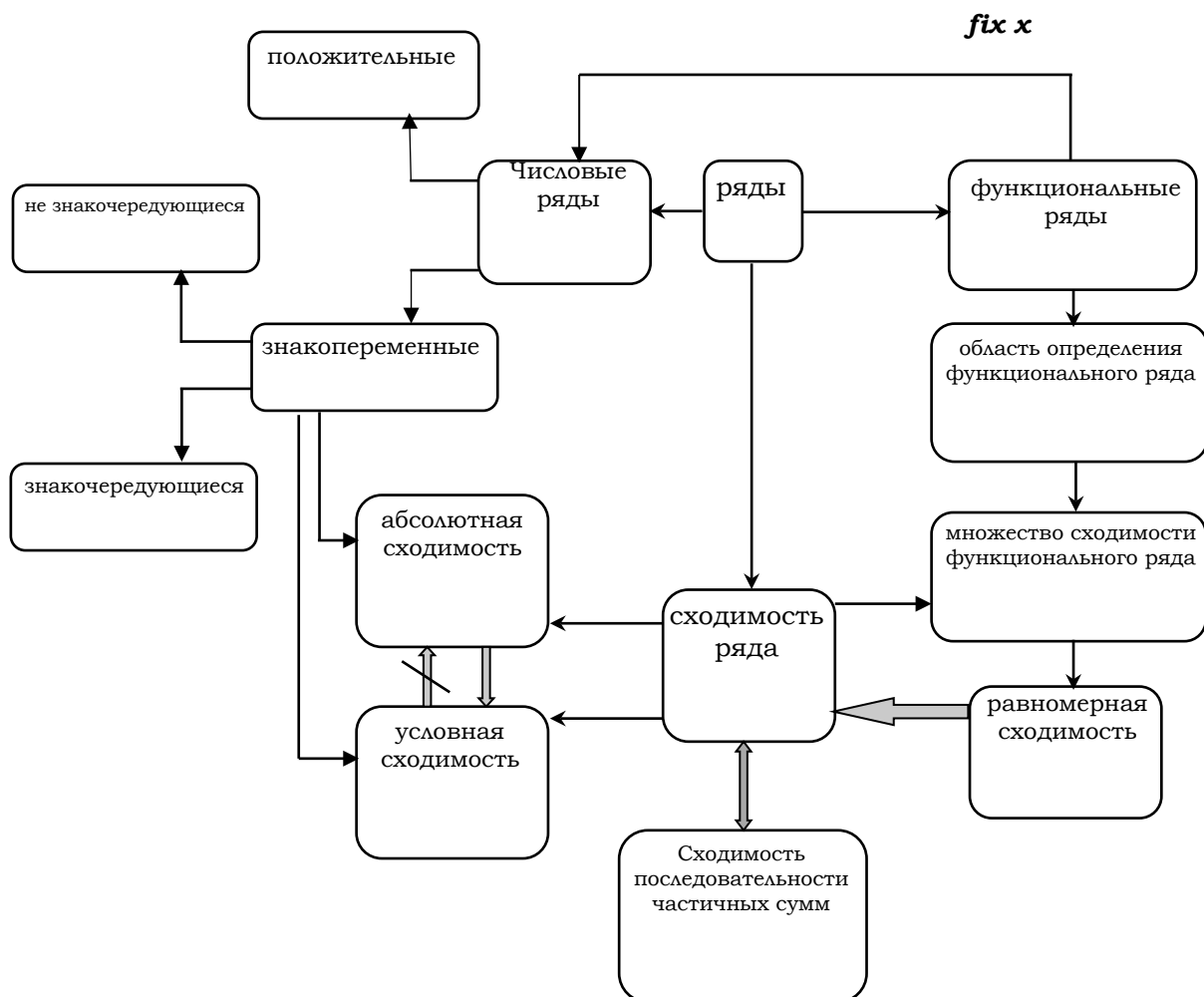


Рис. 1. Структурно-логическая схема основных понятий раздела «Ряды»

После этого приводится структурно-логическая схема, определяющая общие подходы к исследованию рядов на сходимость (рис. 2).

числовые ряды			функциональные ряды
положительные ряды	знакопеременные ряды		
	знакопеременяющиеся ряды	не знакопеременяющиеся ряды	
I. сходимость	абсолютная сходимость		сходимость
1. Мажорантный признак сходимости			
2. Признак сравнения в предельной форме			
3. Признак Даламбера в предельной форме			
4. Признак Коши в предельной форме			
5. Интегральный признак Коши			
			6. Признак Вейер- штрасса равномер- ной сходимости
II.	условная сходимость		
	Признак Лейбница	Признак Дирихле	
		Признак Абеля	
III.	расходимость		
1. Необходимое условие сходимости (следствие)			
2. Признак Даламбера в предельной форме (следствие)			
3. Признак Коши в предельной форме (следствие)			

Рис. 2. Структурно-логическая схема подходов к исследованию рядов

В ней существенен порядок этапов I–III. Так, если в задаче требуется исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременяющийся ряд, то не следует начинать с установления условной сходимости, поскольку все равно будет проводиться исследование на абсолютную сходимость. Если она есть, то этим установлен и факт условной сходимости.

Тем самым уменьшается количество проводимых действий и ошибок при решении. Типичной ошибкой при применении признака Лейбница сходимости знакопеременяющегося ряда является проверка монотонности, о которой студенты либо забывают, либо проводят ее неправильно.

Если же рассматриваемый знакопеременный ряд не является знакопеременяющимся, то признак Лейбница вообще применять нельзя. Для функциональных рядов признаки абсолютной сходимости, как правило, легко позволяют найти их

множество сходимости. В противном случае, или функциональный ряд расходится в своей области определения, или требуется проводить более сложное исследование.

После схемы даются сами признаки и примеры решения задач.

Использование структурно-логических схем в преподавании раздела «Ряды» позволяет студентам увидеть структуру и взаимосвязи между понятиями и теоремами в целом, понять общие алгоритмы при исследовании рядов на сходимость, определить особенности их применения в зависимости от вида ряда.

УДК 519.7

ПРЕПОДАВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ВО ВТУЗЕ: НАХОЖДЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

А. А. МАСТИХИНА, А. В. МАСТИХИН

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Рассматривается проблема преподавания дискретной математики в технических вузах, в частности, для студентов нематематических специальностей. Один из разделов – формальные языки и автоматы, где наибольшее внимание, как правило, уделяется регулярным языкам. Как известно, регулярные языки задаются регулярными выражениями, а также могут порождаться детерминированными и недетерминированными конечными автоматами (последние также называются источниками).

Одна из стандартных задач – переход от одного способа представления регулярного языка к другому. Рассмотрим задачу нахождения регулярного выражения по источнику.

Пусть вершины источника пронумерованы. И пусть R_{ij}^k обозначает множество всех слов, порожденных путями в данном источнике из вершины с номером i в вершину с номером j , не проходящими вершину с номером больше k . Ясно, что если число вершин n , а i и j – соответственно, начальная и конечная вершины, то R_{ij}^n и есть язык, порождённый источником [4].

Следующая лемма даёт способ понизить верхний индекс в R_{ij}^k и позволяет таким образом перейти к простейшим языкам R_{ij}^0 .

Лемма:

- 1) $R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1}$;
- 2) $R_{kj}^k = (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1}$;

$$3) R_{ik}^k = R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^*;$$

$$4) R_{kk}^k = (R_{kk}^{k-1})^*.$$

В курсе дискретной математики данная лемма служит для доказательства теоремы Клини для источников. Помимо теоретического значения, можно также использовать её для непосредственного нахождения регулярного выражения по заданному источнику. Однако уже в случае трёх вершин вычисления получаются достаточно громоздкими, и вручную имеет смысл находить выражения таким способом только для небольших примеров.

Есть способ нахождения регулярного выражения через предварительные преобразования с графом [1, 2], а также способ с помощью решения системы уравнений [3], однако последний, как правило, опирается на алгебраическую технику. Так как для ряда специальностей предварительно курс высшей алгебры не преподаётся, изложим метод нахождения регулярных выражений без использования алгебраических понятий.

Занумеруем вершины источника $\{1, \dots, n\}$. Введём матрицу A для источника, аналогичную матрице весов для графа. $A = \{a_{ij}\}$, где a_{ij} есть объединение букв, написанных на каждом ребре из i в j . Если из i в j ведет пустое ребро, то в объединение добавляется пустое слово.

На главной диагонали этой матрицы поставим пустые множества, если в вершине нет петель, и объединение букв на петлях, если они есть. Таким образом, матрица обозначает слова на однорёберных путях из i в j .

Обозначим через X матрицу, где на месте из (i, j) находится R_{ij}^n , т. е. множество слов, написанных на всех маршрутах из i в j .

Рассмотрим перемножение матриц, в котором вместо суммы используется объединение, а вместо умножения – конкатенация. Ноль выполняет роль пустого множества, единица – пустого слова Λ .

Что даёт такое перемножение матриц A и X . Обозначим $\{y_{ij}\} = A \cdot X$.

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj}.$$

Здесь a_{ik} есть R_{ik}^0 , а x_{kj} есть R_{kj}^n .

Таким образом, y_{ij} есть объединение слов на всех путях из i в j , проходящих через вершину $k, k = 1, \dots, n$. Если $i \neq j$, то $y_{ij} = R_{ij}^n$, если же $i = j$, то не учитывается пустое слово (среди выражений $a_{ik} x_{kj}$ может не быть Λ , хотя множество слов на путях из i в i его содержит).

Тогда верно следующее равенство:

$$X = A \cdot X + E,$$

где E – единичная матрица (на главной диагонали стоят Λ).

Если требуется найти конкретный элемент матрицы X , x_{kj} , где k и j – начальная и конечная вершины соответственно, то можно рассмотреть только k -й столбец матрицы X , содержащий этот элемент.

Таким образом, получается система из n уравнений с n неизвестными.

Утверждение

Пусть L_1, L_2 – регулярные языки, причём $\Lambda \notin L_2$.

Тогда для регулярного языка L , такого, что $L = L_1 \cup L_2 \cdot L$, верно $L = L_2^* L_1$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} b \vee c & a & 0 \\ 0 & a & b \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Требуется найти выражение x_{32} .

Поэтому запишем только третий столбец результирующей матрицы $X = A \cdot X + E$

$$\begin{cases} (b \vee c)x_{31} \vee a x_{32} = x_{31}; \\ (a)x_{32} \vee b x_{33} = x_{32}; \\ b x_{31} \vee a x_{32} \vee \Lambda = x_{33}. \end{cases}$$

Начнём с первого уравнения и воспользуемся утверждением

$$\begin{cases} (b \vee c)^* a x_{32} = x_{31}; \\ (a)x_{32} \vee b x_{33} = x_{32}; \\ b x_{31} \vee a x_{32} \vee \Lambda = x_{33}. \end{cases}$$

Подставим выражение для x_{31} в третье:

$$b(b \vee c)^* a x_{32} \vee a x_{32} \vee \Lambda = x_{33}.$$

Второе уравнение примет вид:

$$(a)x_{32} \vee b(b(b \vee c)^* a x_{32} \vee a x_{32} \vee \Lambda) = x_{32};$$

$$(a \vee b(b(b \vee c)^* a \vee a))x_{32} \vee \Lambda = x_{32};$$

$$x_{32} = (a \vee b(b(b \vee c)^* a \vee a))^*.$$

Можно заметить, что утверждение всегда применимо, т. к. на главной диагонали матрицы A исключено пустое слово, поэтому в уравнении

$$L_2 x_{ij} \vee L_1 = x_{ij}$$

верно $\Lambda \notin L_2$.

Таким образом, можно рассматривать источники большего размера для решения данной задачи, также отметим, что данный алгоритм несложно реализовать в математических пакетах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хопкрофт, Дж. Э.** Введение в теорию автоматов, языков и вычислений: пер. с англ. / Дж. Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Д. Ульман. – 2-е изд. – Москва: Вильямс, 2008. – 528 с.
2. **Пентус, А. Е.** Теория формальных языков: учебное пособие / А. Е. Пентус, М. Р. Пентус. – Москва: ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ, 2004. – 80 с.
3. **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебное пособие / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачёв; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стер. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 744 с.
4. Формальные языки и автоматы: методические указания к выполнению типового расчета / Сост. А. А. Мاستихина. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана.

УДК 531.1:004

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА В СРЕДЕ MATHCAD

Э. Ф. МУРЗИНА, И. И. ЗАГИРОВ

Башкирский государственный аграрный университет
Уфа, Россия

Учебный план по подготовке бакалавров по направлению 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» и 35.03.06 «Агроинженерия» включает в обязательной части блока 1 две математические дисциплины: «Математика» и «Математическая обработка экспериментальных данных». Если первая дисциплина является классической и менее привлекательна для студентов, то вторая – вызывает энтузиазм. К сожалению, количество часов всего лишь 72, из них 22 ч аудиторной работы, но тем не менее, мы изучаем два раздела: теория приближений функций и статистические методы обработки. Но в рамках проведения лабораторных работ студенты сначала выполняют математическую обработку результатов практической инженерной задачи, которая требует знания классической математики и навыков работы в пакете Mathcad [1, с. 330].

Рассмотрим подробнее задачу по теоретической механике, которая была предложена студенту второго курса, решение которой он знал, т. к. изучал соответствующую дисциплину, и должен был проверить результаты в математическом пакете Mathcad.

Пусть прямая AB катится без скольжения по окружности радиуса $R = 0,5$ м так, что угол φ изменяется по закону $\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot t$ рад. В начальный момент точка M совпадает с точкой K . Требуется по заданному движению механизма составить уравнения движения точки M в декартовой системе координат; вычертить траекторию точки M ; найти скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M ; определить радиус кривизны траектории; построить графики скорости и полного ускорения точки.

На рис. 1 представлены исходные данные (кинематическая схема) [2, с. 58].

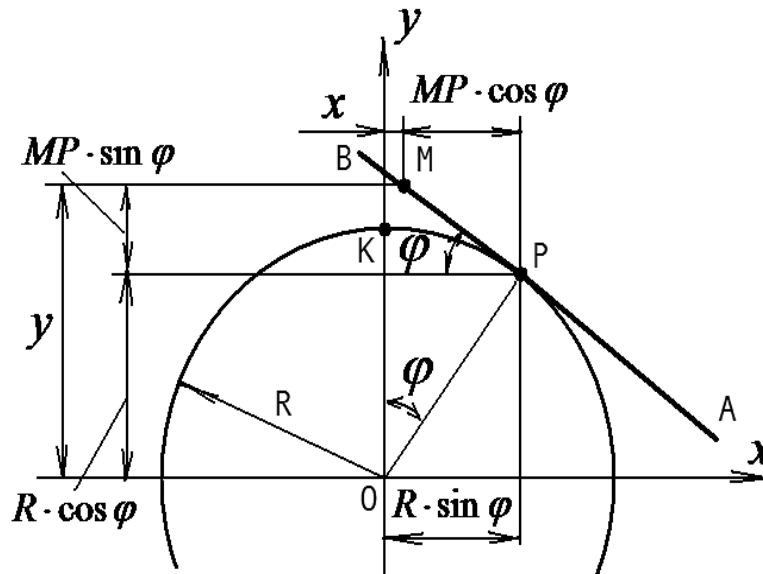


Рис. 1. Кинематическая схема

Все расчеты производятся в пакете Mathcad, часть из них представлена на рис. 2.

Конечные результаты приведены на рис. 3.

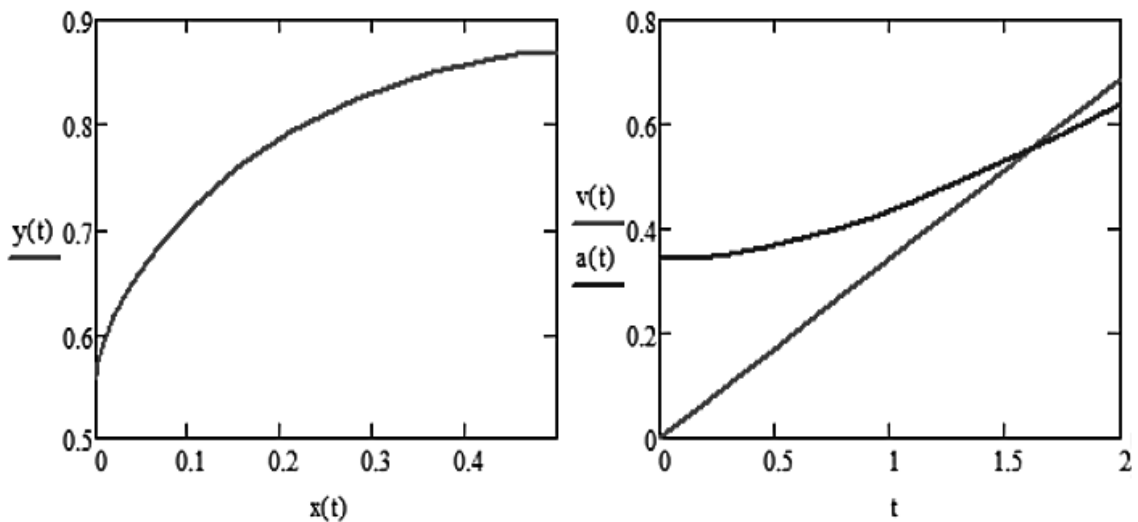
По результатам вычислений построена траектория и графики изменения скорости и ускорения точки M (рис. 4).

Таким образом, реализация требований ФГОС ВО по нашим направлениям подготовки, а именно общепрофессиональной компетенции ОПК-1 «Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий» [3, с. 8], в данном случае выполнена. Произошел прогресс развития профессиональных качеств, получение более глубоких знаний в рамках выбранного направления подготовки: студентом исследована кинематика точки, а именно установлен математический способ задания (описания) движения точки, определены закон движения точки и кинематические характеристики этого движения [4, с. 60], появились навыки работы на Mathcad.

$$\begin{aligned}
x(t) &:= R \cdot \sin\left(t \frac{\pi}{4}\right) - R \cdot t \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(t \frac{\pi}{4}\right) & y(t) &:= R \cdot \cos\left(t \frac{\pi}{4}\right) + R \cdot t \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(t \frac{\pi}{4}\right) \\
v_x(t) &:= \frac{d}{dt} x(t) & v_x(t) &\rightarrow \frac{\pi^2 \cdot R \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} & v_y(t) &:= \frac{d}{dt} y(t) & v_y(t) &\rightarrow \frac{\pi^2 \cdot R \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} \\
v(t) &:= \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} & v(t) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot R^2 \cdot t^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{256} + \frac{\pi^4 \cdot R^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{256}} \\
a_x(t) &:= \frac{d}{dt} v_x(t) & a_x(t) &\rightarrow \frac{\pi^2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} + \frac{\pi^3 \cdot R \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{64} \\
a_y(t) &:= \frac{d}{dt} v_y(t) & a_y(t) &\rightarrow \frac{\pi^2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} - \frac{\pi^3 \cdot R \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{64} \\
a(t) &:= \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2} \\
a(t) &\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\pi^2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} - \frac{\pi^3 \cdot R \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{64}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{16} + \frac{\pi^3 \cdot R \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{64}\right)^2}
\end{aligned}$$

Рис. 2. Фрагмент решения задачи в среде Mathcad

$t =$	$v_x(t) =$	$v_y(t) =$	$v(t) =$	$a_x(t) =$	$a_y(t) =$	$a(t) =$	$a_T(t) =$	$a_n(t) =$	$\rho(t) =$
0	0.000	0	0	0.000	0.343	0.343	0	0.343	0
0.154	0.006	0.052	0.053	0.082	0.335	0.345	0.343	0.041	0.067
0.308	0.025	0.102	0.106	0.163	0.313	0.353	0.343	0.083	0.134
0.462	0.056	0.148	0.158	0.238	0.276	0.365	0.343	0.124	0.202
0.616	0.098	0.187	0.211	0.306	0.226	0.381	0.343	0.166	0.269
0.77	0.150	0.217	0.264	0.365	0.164	0.4	0.343	0.207	0.336
0.924	0.210	0.237	0.317	0.413	0.091	0.423	0.343	0.249	0.403
1.078	0.277	0.245	0.369	0.449	$9.692 \cdot 10^{-3}$	0.449	0.343	0.29	0.47
1.232	0.348	0.24	0.422	0.470	-0.079	0.477	0.343	0.332	0.538
1.386	0.421	0.22	0.475	0.477	-0.172	0.507	0.343	0.373	0.605
1.54	0.494	0.187	0.528	0.467	-0.267	0.538	0.343	0.414	0.672
1.694	0.564	0.138	0.581	0.441	-0.361	0.57	0.343	0.456	0.739
1.848	0.629	0.075	0.633	0.399	-0.453	0.604	0.343	0.497	0.806
2.002	0.686	$-1.078 \cdot 10^{-3}$	0.686	0.342	-0.539	0.639	0.343	0.539	0.874

Рис. 3. Кинематические характеристики точки M Рис. 4. Траектория точки M и графики скорости и полного ускорения в среде Mathcad

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арсланбекова, С. А.** Использование прикладных программ как составляющая цифровизации образования / С. А. Арсланбекова, Ф. Н. Галлямов, Э. Ф. Мурзина // Конструирование стратегических приоритетов развития образования как ответ на вызовы третьего тысячелетия: материалы III Всерос. науч.-практ. конф. – Уфа, 2022. – С. 330–334.

2. **Нафиков, М. З.** Теоретическая механика. Раздел кинематика. Конспект лекций: учебно-методическое пособие по направлениям подготовки бакалавров: 110800 «Агроинженерия», 140100 «Теплотехника и теплоэнергетика» / М. З. Нафиков. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2011. – 67 с.

3. Российская Федерация. Об утверждении федерального образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия». – 2017. – С. 8.

4. **Загиров, И. И.** Повышение интенсивности и эффективности усвоения общетехнических дисциплин студентов инженерных специальностей / И. И. Загиров // Инновационные методы преподавания в высшей школе: материалы Междунар. науч.-метод. конф. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2011. – С. 59–60.

УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛЫ»

Т. Ю. ОРЛОВА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Для работы со студентами, интересующимися математикой, в Белорусско-Российском университете организован математический кружок.

Ранее были рассмотрены системы упражнений для математического кружка по темам «Матрицы» [1], «Производная» [2], «Интегрирование» [3], «Векторы» [4]. Продолжая тему работы математического кружка, приведу подборку задач по теме «Пределы».

1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f_1(g_1(f_2(g_2(x))))}{x^3}$, если $f_1(x) = x - x^2$; $f_2(x) = x + x^2$;

$g_1(x) = x - x^3$; $g_2(x) = x + x^3$. (Internet Mathematics Olympiad for Students, университет Ариель, Израиль.)

Рассмотрим функции

$$f_2(g_2(x)) = g_2 + g_2^2 = x + x^3 + (x + x^3)^2 = x + x^3 + x^2 + o(x^3),$$

где $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$.

Аналогично

получаем

$$g_1(f_2) = f_2 - f_2^3 = x + x^2 + o(x^3),$$

$$f_1(g_1) = g_1 - g_1^2 = x - 2x^3 + o(x^3).$$

Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f_1(g_1(f_2(g_2(x))))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + 2x^3 - o(x^3)}{x^3} = 2.$

2. Последовательность (a_n) задана равенствами $a_1 = \sqrt{13}$; $a_2 = \sqrt{13 + \sqrt{13}}$; $a_3 = \sqrt{13 + \sqrt{13 + \sqrt{13}}}$; Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (XII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике, Беларусь.)

$a_2 = \sqrt{13 + \sqrt{13}} = \sqrt{13 + a_1}$, ..., $a_n = \sqrt{13 + a_{n-1}}$. Следовательно, $a_n^2 = 13 + a_{n-1}$. Так как $a_{n-1} \rightarrow a_n$ при $n \rightarrow \infty$, решив квадратное уравнение, принимая во внимание, что $a_n > 0$, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{53}}{2}$.

На занятии по данной теме, кроме разобранных выше, можно рассмотреть со студентами следующие задачи.

1. Найти пределы функций или последовательностей:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x - \sin x)}{\ln(x - \cos x)}$. [5]. Ответ: 1;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x+1)) - \cos(\ln x))$. [5]. Ответ: 0;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\cos x} - 1}{\cos x - 1}$. [5]. Ответ: 1;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}} \right) - 1}{x}$. Ответ: -1;

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a^2 + \left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right)}{n}$. [5]. Ответ: $a^2 + a + \frac{1}{3}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2018}{1 - x^{2018}} - \frac{1514}{1 - x^{1514}} \right)$. Ответ: 252;

ж) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$. Ответ: $\sqrt{\pi}$.

2. Найти n из уравнения $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+3x)\dots(1+(2n+1)x) - 1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx} = \frac{7}{3}$. [5]. Ответ: 6.

3. Решить уравнение $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1975}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{1976}$. Ответ: 1976.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Матрицы» / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 58–62.
2. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Производная» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 73–76.
3. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Интегрирование» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 80–83.
4. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Векторы» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 76–79.
5. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 171 с.

УДК 378

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ КУРСАНТОВ – БУДУЩИХ ОФИЦЕРОВ НАШЕЙ СТРАНЫ

С. Н. ПАСТУШОНОК

Военная академия Республики Беларусь
Минск, Беларусь

Естественно-научное образование даёт обучающимся научное знание о неживой и живой природе, о средствах и методах её познания, формирует у них целостное знание, теоретическое мышление.

Образованный человек проявляет неподдельный интерес к естественным наукам, таким как физика, химия, астрономия, биология и т. д.

Естественно-научные дисциплины являются теоретической базой военного образования в современных условиях, поскольку при их изучении у курсантов вырабатываются ориентиры, установки и ценности разумного отношения к природе, обществу и конкретному человеку.

От людей науки требуется высочайшая ответственность за результаты своей деятельности. Поэтому особенно важными являются образованность, профессиональная компетентность, умение свободно ориентироваться в стремительном

потоке растущей научной, технической и социально-политической информации.

Сегодня общество овладело такими мощными силами, действие которых грозит человечеству самоуничтожением. Коренные необратимые изменения в ходе эволюционных процессов могут произойти в связи с проведением научных исследований, в ходе которых осуществляется проникновение в тончайшие механизмы генетического управления живыми системами. Многие открытия и достижения физики могут использоваться как во благо, так и во вред человечеству. Само существование человека становится зыбким. Многие глобальные проблемы, в частности экологический кризис, подтверждают это.

К глобальным проблемам современности относятся также проблемы ресурсов, продовольствия, здоровья людей, проблемы войны и мира и т. д.

Именно глобальные проблемы требуют особой ответственности за результаты деятельности людей науки, развитие сотрудничества между странами и народами, что является объективной предпосылкой будущего цивилизации, будущего человека.

Поэтому и встают вопросы о направленности развития общества и об ответственности за последствия этого развития. А именно знания позволяют предвидеть ход событий, результаты деятельности человека.

Актуальность проблем практико-ориентированного естественно-научного образования будущих офицеров нашей страны обусловлена ведущей ролью естественных наук в развитии военной техники и технологий, в познании природы, в улучшении качества жизни.

Современная эпоха предъявляет новые требования к естественно-научному образованию, которое должно быть не просто суммой знаний отдельных дисциплин (физики, химии, биологии и т. п.), а основываться на междисциплинарном синтезе наук, быть дифференцированным в зависимости от профиля подготовки специалистов, соблюдать преемственность между своими уровнями и ступенями, обеспечивать непрерывный процесс обучения.

Обучение курсантов Военной академии идёт по пути подготовки высококвалифицированных специалистов, готовых не только воспроизводить полученные в вузе знания, но и применять на практике профессиональные умения и навыки, творчески решать поставленные перед ними задачи.

Программа курса физики на всех факультетах Военной академии как части подготовки специалистов несёт в себе практико-ориентированный подход, позволяющий подготовить будущего офицера более компетентным и квалифицированным, способным решать самые разнообразные и очень сложные задачи на современном этапе информационного развития общества.

Практико-ориентированное образование предполагает обучение, представляющее собой целенаправленный процесс взаимосвязанной деятельности курсантов и преподавателей кафедры по передаче и усвоению практико-значимых

знаний, формированию базовых профессиональных умений и навыков, освоению физических методов исследования, методик, позволяющих эффективно осваивать и эксплуатировать военно-технические устройства.

Классическая модель образования, основу которой составляют лекционные курсы, практические и лабораторные занятия, направленные на закрепление знаний, полученных на лекциях, несостоятельна. На смену ей могут быть выдвинуты новые модели, характеризующиеся высокой степенью индивидуализации обучения и усиления самостоятельной работы курсантов.

Для этого в Военной академии отводятся часы для самоподготовки, на которых курсанты прорабатывают материал лекций, готовятся к практическим занятиям, к проведению лабораторного практикума, оформляют рабочие тетради, отвечают на контрольные вопросы по лабораторной работе, знакомятся с экспериментальными установками, используемыми при достижении целей, поставленных перед каждой лабораторной работой. Список рекомендуемой литературы предлагается курсантам преподавателями кафедры. Консультации, проводимые преподавателями кафедры физики и общетеоретических дисциплин, направлены на преодоление проблем, возникающих при освоении изучаемого материала.

Практико-ориентированное естественно-научное образование предполагает также организацию и проведение на кафедре военно-научной работы с курсантами. Разрабатывается тематика докладов с преломлением решения военных задач и осуществляется руководство работами курсантов на военно-научных конференциях. Курсанты готовят материал и презентации докладов, выступают на военно-научных конференциях. Оказывается помощь и содействие в подготовке и публикации тезисов докладов.

Ежегодно проводятся межвузовские олимпиады по физике между курсантами военных факультетов вузов Республики Беларусь. Курсанты Военной академии имеют возможность посещать кружок «Решение нестандартных физических задач», руководитель которого доктор физико-математических наук, профессор А. К. Сойка.

Осуществляется внедрение в образовательный процесс инновационных технологий организации и проведение выездных внеаудиторных практико-ориентированных занятий по физике. Так, например, такие занятия осуществлены для курсантов факультета связи и АСУ в Центре управления наноспутниками и Отраслевой лаборатории прикладных космических технологий БГУ, наземном комплексе управления спутником Белинтерсат-1 (пос. Станьково) с целью практического ознакомления курсантов с современными системами спутниковой связи, физическими принципами их организации, опытом разработки и эксплуатации, программно-аппаратным и информационным обеспечением.

Внедряются инновационные технологии в образовательный процесс путем значительного увеличения доли элементов информационной среды в системе

обучения. Используются эффективные и интересные технологии, например, технология проблемного обучения.

Можно предложить курсантам множество проблемных ситуаций, связанных с решением специфических задач для разных военных специальностей и способных активизировать мышление, познавательную деятельность, обеспечив тем самым прочность приобретаемых знаний.

Так, читая лекцию на тему: «Волновые свойства света. Интерференция света», можно перед курсантами поставить следующие вопросы: «Как сделать самолёты «невидимыми»? Как осуществить противорадиолокационную маскировку других военных объектов?».

Изучая тему «Поляризация света», можно предложить курсантам объяснить одно из интересных практических применений поляроида на автотранспорте в качестве защиты водителей от слепящего действия фар встречных автомашин.

Изложенное выше подтверждает важность практико-ориентированного обучения как важнейшей составляющей в подготовке будущих офицеров.

УДК 519.11

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. М. РЕВЯКИН, И. В. БАРДУШКИНА, А. М. ТЕРЕЩЕНКО

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Москва, Россия

Изучение алгоритмов на графах в высших учебных заведениях включает среди прочих жадный алгоритм. Жадный алгоритм (greedy algorithm) – метод решения оптимизационных задач, он на каждом шаге делает локально наилучший выбор в надежде, что итоговое решение будет оптимальным. Важно донести до студента, что каждую задачу дискретной оптимизации на конечном множестве можно решить полным перебором всех вариантов. Однако на практике число возможных вариантов конечно и чрезвычайно велико, поэтому полный перебор всех вариантов требует столь большого времени, что практически невозможен даже на самых быстродействующих электронно-вычислительных машинах. Жадный алгоритм получает ответ за рекордно малое число действий.

Пусть S – конечное множество, каждому элементу a которого приписан неотрицательный вес $w(a)$, $a \in S$. Весом подмножества $A \subseteq S$ называется сумма весов его элементов. Пусть I – некоторое семейство подмножеств множества S . Задача состоит в выборе в I подмножества максимального (или минимального) веса.

Описание жадного алгоритма.

Шаг 1. Упорядочить множество S по убыванию весов так, чтобы $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \dots \geq w(a_n)$.

Шаг 2. $A = \emptyset$, $i = 1$.

Шаг 3. Если $A \cup \{a_i\} \in I$, то $A = A \cup \{a_i\}$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если $i = n$, то конец, иначе $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

Очевидно, что выходом жадного алгоритма является максимальное по включению множество из I . Однако оно может оказаться не максимального веса. Например, если $S = \{a, b, c, d\}$, $I = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = 3$, $w(c) = w(d) = 2$, то жадный алгоритм найдёт множество $\{a, c\}$ с весом 6, хотя $\{b, c, d\}$ имеет вес 7.

Рассмотрим примеры использования жадного алгоритма.

Задача о расписании. Пусть дано n заданий. Известен срок завершения каждого задания, а также его стоимость. Нужно максимизировать прибыль. Пример применения жадного алгоритма: выгодно делать самые «дорогие задания», а другие можно и не выполнять – тогда прибыль будет максимальна.

Составления числа из разрядов. Из десятичных разрядов числа нужно составить наибольшее возможное число. Например, для цифр 2, 3, 9, 3, 4 и 2 ответом будет 943322.

Нахождения самого длинного пути между вершинами в сети (задача такси-ста). Если «жадный таксист» на каждом перекрестке будет выбирать дорогу наибольшей длины, то выбранный им маршрут часто окажется не самым длинным.

Размен монет. Разменять сумму X монетами с номиналами x_1, x_2, \dots, x_n , выбрав наименьшее число монет. Например, разменять сумму в 6 рублей монетами с номиналами 4, 3 и 1. Жадное решение: взять 5, потом 1, потом опять 1. Оптимальное решение: взять 3 и 3. Заметим, что жадный алгоритм работает оптимально для размена любой суммы монетами с номиналами $\{10, 5, 2, 1\}$, $\{4, 2, 1\}$ и не оптимально с номиналами $\{25, 15, 1\}$.

Задача о назначениях. Требуется распределить трех претендентов на четыре должности так, чтобы суммарная эффективность назначения была максимальной. Результаты тестирования эффективности работы претендентов на каждой должности по 10-балльной шкале сведены в табл. 1.

Жадный алгоритм назначает претендента А на должность Х, затем Б на должность Т и, наконец, претендента В на должность У или Z. Таким образом, получено назначение с суммарной эффективностью 22. Полученный ответ неверный, т. к. суммарная эффективность назначения А на У, Б на Т, В на Х больше, и равна 23.

Табл. 1

Претендент	Должность			
	X	Y	Z	T
A	8	7	7	6
Б	7	7	5	8
В	8	6	6	7

Задача о рюкзаке. Вор пробрался на склад, в котором хранятся три вещи весом 10, 20 и 30 кг стоимостью 60, 100 и 120 у. е. соответственно. Вор максимально может унести 50 кг. Требуется максимизировать прибыль вора. Если поступать здесь жадно и выбирать самую ценную вещь (т. е. 6 у. е. за 1 кг первой штуки, 5 у. е. за 1 кг второй и 4 у. е. за 1 кг третьей), то вор должен взять первую вещь, потом останется место для второй вещи, однако оптимальное решение составляет вторая и третья вещь.

Оптимизация линейной функции. Найти максимальное значение линейной функции $f = 4x - 3y - 6z + 2t$, где вектор аргументов (x, y, z, t) – одна из перестановок чисел $(2, 3, 4, 5)$. Воспользуемся жадным алгоритмом: коэффициент при x максимальный среди всех коэффициентов линейной функции f и равен 4. Поэтому положим $x=5$. Следующий по величине – коэффициент 2 при переменной t , поэтому $t=4$. Следующий по величине коэффициент равен -3 при y , поэтому $y=3$, а $z=2$. Получаем $f=7$. Можно перебрать все 24 перестановки и убедиться, что действительно найдено максимальное значение.

Возникает вопрос: «Когда можно гарантировать получение подмножества максимального веса, решая задачу с помощью жадного алгоритма?».

Теорема (Радо – Эдмондс) [1]. Пусть I – система подмножеств множества S , удовлетворяющая условиям: (i1) $\emptyset \in I$; (i2) (наследственности) если $A \subseteq B$ и $B \in I$, то $A \in I$. Тогда найденное жадным алгоритмом множество $A \in I$ всегда имеет наибольший вес, если выполняется условие: (i3) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$ такое, что $B \cup \{a\} \in I$. Напротив, если для пары (S, I) , удовлетворяющей условию наследственности (i2), не выполняется свойство (i3), то найдется такая неотрицательная действительная функция $w(a)$, определенная на множестве S , что найденное жадным алгоритмом $A \in I$ не будет самым тяжелым среди всех подмножеств I .

Матроидом $M = (S, I)$ на множестве S называется система I подмножеств конечного множества S , если: (i1) $\emptyset \in I$; (i2) если $A \subseteq B$ и $B \in I$, то $A \in I$; (i3) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$ такое, что $B \cup \{a\} \in I$.

Таким образом, наличие матроидной структуры служит гарантом того, что найденный жадным алгоритмом ответ является оптимальным.

Свойство (i3) в определении матроида является обязательным для получения правильного ответа жадным алгоритмом. Поэтому исследователи ослабляют условие (i2), получая различные обобщения матроидов, на которых жадный алгоритм дает правильные ответы. Как правило, такие обобщения называют *гридоидами* [1, 2].

Возвращаясь к примерам, отметим, что алгоритм Краскала находит остов минимального веса – базу в циклическом матроиде графа минимального веса [3]. В задаче о назначении отсутствует матроидная структура, но ее можно сформулировать как задачу на пересечении двух матроидов. В задаче оптимизации линейной функции имеем дело с матроидом разбиения [2].

В задаче о размене монет для суммы 6 и разменного множества $\{4, 3, 1\}$ имеем частичные размены не более чем по три монеты: $\{4, 1, 1\}$, $\{3, 3, 1\}$, $\{3, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{4, 1\}$, $\{3, 1\}$, $\{3, 3\}$, $\{1, 1\}$, $\{4\}$, $\{3\}$, $\{1\}$. Они не образуют матроид, т. к. условие (i3) нарушается для $\{4, 1, 1\}$ и $\{3, 3\}$. Жадный алгоритм для этого разменного множества не работает.

Примеры корректного использования жадных алгоритмов изложены в [4]. Заметим также, что с помощью жадного алгоритма можно быстро получить ответ, а затем проверить его корректность. Это полезно при решении различных тестов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Edmonds, J.** Matroids and the greedy algorithm / J. Edmonds // Math. Programming. – 1971. – Vol. 1, № 2. – P. 127–136.
2. **Revyakin, A. M.** Matroids / A. M. Revyakin // J. Math. Sci. – 2002. – Vol. 108, № 1. – С. 71–130.
3. **Ревякин, А. М.** Математические методы моделирования в экономике: учебное пособие / А. М. Ревякин, И. В. Бардушкина. – Москва: МИЭТ, 2013.
4. **Исаченко, А. Н.** Матроиды в математическом моделировании экономических систем / А. Н. Исаченко, А. М. Ревякин // Экономические и социально-гуманитарные исследования. – 2015. – № 1 (5). – С. 13–18.

УДК 37.091.3:51

ОБ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В 2021 г. в Белорусско-Российском университете открыта новая специальность «Прикладная математика», профиль «Разработка программного обеспечения». Согласно учебному плану, подготовка студентов осуществляется по классическим математическим требованиям. Изучаются отдельно математические дисциплины, одной из которых является «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Одними из основных целей дисциплины являются: формирование уровня математической культуры, достаточного для понимания и усвоения последующих курсов по математике; развитие логического и алгоритмического мышления; развитие навыков исследовательской работы; умение самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Дисциплина «Обыкновенные дифференциальные уравнения» изучается в третьем семестре. На нее выделено 68 аудиторных часов, из которых 34 лекционных и 34 практических. Кроме того, согласно учебному плану, предусмотрено написание курсовой работы по данной дисциплине. При этом темы курсовых работ, задания к ним и сроки (этапы) выполнения выдаются на третьей неделе семестра. В этой связи возникли вопросы, связанные с выполнением работы. Понятно, что для ее выполнения необходимы знания основных понятий и положений дисциплины, типов уравнений и методов их интегрирования. Так, например, такая тема курсовой работы, как «Уравнение Бесселя», предполагает знания теоремы о структуре общего решения такого уравнения и методики его решения с помощью степенных рядов, а темы с различными приложениями дифференциальных уравнений требовали умения решать задачу Коши для различных типов уравнений, умения выбирать фундаментальную систему решений и т. д. В этой связи пришлось немного «штурмовать» лекционный материал в начале семестра, а практическую часть дисциплины и контрольные мероприятия сместить в конец семестра.

Как показала практика, такой подход не повлиял на качество изучения дисциплины. Во-первых, студенты в предыдущих двух семестрах детально изучили дифференциальное и интегральное исчисления (математический анализ) в объеме 272 аудиторных часов, т. е. основу для изучения дифференциальных уравнений [1]. Во-вторых, это смещение даже оказалось достаточно полезным и плодотворным, поскольку интегрирование определенных типов уравнений на

одном занятии не вызывает затруднений, а вот, например, при выполнении индивидуальных заданий или контрольных работ одновременно по различным типам уравнений вызывало определенные затруднения по установлению типа уравнений и выбору метода интегрирования. Такое смещение лекционных и практических занятий, как показала практика, привело к приобретению устойчивых навыков по определению типов уравнений и выбору метода решения, поскольку на одном занятии решались задачи на различные типы уравнений.

Замечу также, что изучение таких уравнений, как уравнение в полных дифференциалах, поиск интегрирующего множителя, а также уравнений, требующих понижения порядка, не вызывало затруднений, как это бывает у студентов технических специальностей.

В конце семестра, когда выполнение курсовых работ подходило к завершению, на практических занятиях выделялось время для того, чтобы студенты знакомили друг друга с содержанием своей работы, т. е. делали доклады с последующим их обсуждением. Обсуждение проходило в форме вопросов со стороны аудитории и ответов докладчика. Это вызывало определенную заинтересованность и даже соревновательность среди студентов. Доклады поощрялись рейтинговыми баллами. Считаю, что такая форма занятий привела к расширению кругозора студентов и более широкому знакомству с типами уравнений и их приложениями, которые встречаются в различных областях научно-технической деятельности.

Однако следует отметить, что студенты не умеют задавать корректно вопросы, а докладчики четко формулировать ответы. Конечно, этому надо учиться и учить. Данная ситуация наблюдалась также на защитах курсовых работ. Многие студенты не сумели кратко и четко изложить суть своей работы, ее содержание и сделать соответствующие выводы. Кроме того, ситуацию усложняла еще и временная ограниченность доклада. Хочу отметить также, что некоторые студенты, как это водится в традициях студенческой учебы и жизни, выполнение курсовой работы отложили на потом. Это привело к временному цейтноту при сдаче на проверку работы по графику и соответственно пострадало качество ее написания. При этом также отмечу, что литература, которая имелась в библиотеке университета по дифференциальным уравнениям и в интернете, написана строгим научным языком и не очень адаптирована для чтения и понимания студентом. Это усугубляло самостоятельное ее изучение, а времени, как всегда, не хватает.

Кроме того, как оказалось не все студенты имеют одинаковые технические возможности по оформлению курсовой работы, т. е. не у всех есть персональные компьютеры. Много вопросов возникало также с владением текстовым редактором Word и встроенным в него редактором формул MathType и даже такими вопросами, как выравнивание номеров формул по правому краю. Приходилось обучать и этому.

Про экзамен по дисциплине. Экзаменационный билет содержал четыре пункта. Один теоретический вопрос, на который требовался устный ответ, и три задачи. Одной из этих задач была простая задача на составление дифференциального уравнения и его решение. Такого рода задачи были связаны с геометрическими приложениями дифференциальных уравнений и геометрическим смыслом производной. К сожалению, часть студентов не справилась с ней. В дальнейшем вопросу по составлению дифференциальных уравнений следует уделить больше внимания. Решение остальных двух задач не вызвало затруднений по определению типа уравнения и выбору метода решения, поскольку на практических занятиях этому уделялось много внимания.

Экзамен письменно-устный. Проходил в два этапа. На первом этапе, одновременно, все в одинаковых условиях, решали практические задачи в течение почти двух академических часов. Затем студенты оставляли свои ответы на столах и выходили из аудитории. Тем самым они имели возможность повторить теоретический вопрос билета и проконсультироваться с товарищем по решению практических задач. Далее поочередно проходила беседа с каждым студентом, с объяснением им решенных задач и заслушивался ответ на теоретический вопрос билета. Как замечено и при защитах курсовых, студенты не могут свободно изъясняться, не умеют четко формулировать предложения, имеется путаница в понятиях. Для выявления знаний приходилось задавать уточняющие вопросы.

Хочу отметить одну особенность. При решении на экзамене нормальных систем двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами студенты почему-то пользовались методом Эйлера, который требует решения задачи на собственные значения и собственные векторы, а не более простым методом исключения.

В целом, в группе присутствовала атмосфера учебы и интереса к предмету, и цели, изложенные выше, считаю достигнутыми, а успешное освоение дисциплины позволит студентам овладеть основами других разделов математики, в частности, уравнениями в частных производных, численными методами решения дифференциальных уравнений и другими естественно-научными дисциплинами, поскольку приложения обыкновенных дифференциальных уравнений огромны.

Замечу также, что постоянное внимание к учебным делам студентов куратора группы, старшего преподавателя кафедры «Высшая математика» Александра Николаевича Бондарева, способствовало поддержанию атмосферы учебы и доброжелательных отношений в группе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романенко, А. А. О подготовке студентов по математическому анализу специальности «Прикладная математика» / А. А. Романенко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 79–81.

УДК 372. 851

О ПОДГОТОВКЕ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ
В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Л. А. РОМАНОВИЧ, И. В. КАБЕТОВА

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Успешность обучения математике учащихся средней школы зависит от профессиональной подготовки будущего учителя математики. В современном мире практически каждый ученик имеет компьютер с доступом в интернет, что открывает массу возможностей для организации обучения. В настоящее время вопрос о разработке и внедрении электронных образовательных ресурсов (ЭОР) в общий образовательный процесс весьма актуален. Учреждения высшего и специального образования, школы используют в работе элементы дистанционного обучения. В связи с этим актуален вопрос о подготовке необходимых для полноценного функционирования всей дистанционной системы обучения электронных образовательных ресурсов приемлемого качества и систематизации учебных материалов в эффективные образовательные комплексы.

Кафедра математики МГУ имени А. А. Кулешова проводит целенаправленную систематическую работу в направлении получения студентами опыта создания и апробации электронных средств обучения. Такой опыт способствует развитию профессиональных компетенций будущих учителей математики. На примере создания ЭОР по дисциплине «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» проанализируем основные достоинства и недостатки образовательной среды Moodle и трудности, с которыми мы столкнулись в процессе работы.

Цель работы состояла в актуализации и систематизации материалов по дисциплине «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости», преобразованию их к формату электронного образовательного ресурса.

Задачи работы.

1. Создание единого электронного ресурса, объединяющего в себе учебные материалы, функционирующего на базе системы Moodle.

2. Разработка практических и тестовых заданий для контроля знаний студентов, позволяющих организовать самообразование.

3. Диагностика проблем и перспектив образовательных ресурсов, функционирующих на платформе образовательной системы Moodle.

Гипотеза данной работы – популяризация и развитие электронных образовательных ресурсов будет способствовать повышению качества образования, а также расширению рынка образовательных услуг.

Работа представляет собой электронный образовательный ресурс, функционирующий на базе образовательной платформы Moodle.

Moodle – система управления курсами, также известная как виртуальная обучающая среда. Представляет собой свободное веб-приложение, предоставляющее возможность создавать сайты для онлайн-обучения. Платформа предоставляет пространство для совместной работы учителей и студентов [1].

Данная платформа показывает себя весьма перспективной в организации образования зарубежных стран. Платформа позволяет интегрировать в образование иностранных студентов, помогает отстающим студентам и способствует включению в общий образовательный процесс учащихся с ОПФР. Тем не менее представленная система не способна полностью заменить классическую очную систему получения знаний, но может отлично её модернизировать, позволяя студентам увеличить объём и качество получаемых знаний за счёт самообразования на дому.

Решение для выполнения работы на платформе было принято за счёт функциональности и доступности платформы. Moodle предоставляет возможность загрузки и взаимодействия с мультимедийными материалами, а также разрешает редактировать и оформлять каждую страницу ресурса, создавать тестовые задания и организовывать контроль за учебной группой.

ЭОР состоит из семи разделов: «Элементы векторной алгебры»; «Метод координат на плоскости»; «Прямая на координатной плоскости»; «Кривые второго порядка»; «Метод координат в пространстве»; «Плоскость и прямая в пространстве»; «Поверхности второго порядка. Многогранники».

Каждый раздел состоит из теоретического материала, примеров решения конкретных задач, заданий для самостоятельного выполнения и контроля знаний, состоящего из тестовых вопросов различного уровня сложности.

Теоретический раздел включает в себя весь необходимый минимум информации по дисциплине «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости», в том числе полный объём теорем и определений по данному разделу геометрии. В ходе нашей работы было принято решение о дополнении курса видеоуроками. Специально подготовленные видео содержат в себе теоретический материал, блок-схемы и примеры решения конкретных задач, видеоряд сопровождается специально записанной дикторской озвучкой. Видеоурок способствует более эф-

фективному усвоению информации за счёт не только визуального, но и слухового восприятия материала. Видео представляют собой краткое объяснение темы с использованием наглядных примеров в виде анимированных изображений построений. Тестовые и практические задания позволяют студентам закрепить усвоенный материал, а также могут выступать инструментом осуществления контроля рабочей деятельности студентов со стороны преподавателя, что положительно сказывается на общей успеваемости учебной группы и формировании у студентов культуры самообразования.

Система имеет множество положительных преимуществ. Главным достоинством системы Moodle является бесплатное распространение. Имеется множество инструментов для создания электронных курсов. Можно свободно загружать видеолекции, прикреплять файлы, тестовые задания и многое другое.

Платформа снабжена текстовым чатом для связи с преподавателем или другими членами курса. Большим плюсом является функциональность редактора тестов, которая обеспечивает широкую вариативность и разнообразие создаваемых тестов.

При создании ЭОР были выявлены и проблемы. Все они связаны с технической составляющей платформы. Система Moodle не позволяет загружать материалы большого размера, что требует введения ограничений в качестве звука и видео. При оформлении теоретического материала мы столкнулись с проблемой несовершенства работы редактора формул, например, отсутствие знака системы уравнений, трудности с записью матриц, невозможность записи двузначных индексов.

В заключение стоит сказать, что создание ЭОР на базе системы Moodle является достаточно перспективным направлением в современном образовании. Несмотря на мелкие технические недочёты система всё же выделяется своей функциональностью и простотой обращения в сравнении с другими платформами. Система полностью бесплатна, хорошо оптимизирована, широко распространена и не имеет особых системных требований, что делает её самой привлекательной на рынке образовательных услуг.

Разработанные материалы прошли апробацию. Наблюдение и беседы со студентами, принимавшими участие в апробации, результаты выполнения ими тестовых заданий, проявленный интерес позволяют сделать вывод о том, что созданный ЭОР можно использовать при изучении аналитической геометрии.

Предложенный ЭОР подойдёт для обучения студентов физико-математических специальностей. Интеграция подобных ЭОР в систему образования является большим шагом к обеспечению глобальной общедоступности образования и следующим эволюционным шагом в развитии образования. Развитие электронных ресурсов и перевод известных пособий в цифровой вид в будущем может обеспечить доступность информации для образования и самообразования, что

послужит толчком к самообразованию населения, а следовательно, послужит причиной роста уровня жизни в нашей страны.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мясникова, Т. С.** Система дистанционного обучения Moodle / Т. С. Мясникова, С. А. Мясников. – Харьков, 2008. – 232 с.

УДК 378.016:51

О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ РОЛИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

И. Ф. СОЛОВЬЕВА

Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь

*«Следя за хаосом случайности,
закономерность извлечем. Благодаря
чему, в реальности кого-то, может
быть, спасем. Предупредим о неудаче
и спрогнозируем успех. И счастье
сделаем возможным, ведь шанс
обязан быть у всех».*
И. Бойцева

Теория вероятностей – это достаточно большой раздел высшей математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, дискретные и непрерывные случайные величины, их свойства, их характеристики и действия над ними. Теория вероятностей возникла еще в Средние века. Ее появлению способствовали первые попытки объяснения с помощью математического анализа азартных игр, таких как рулетка, карты, кости, орлянка и других игр со случайными исходами.

Для создания теории вероятностей предпосылками послужили проблемы, постоянно возникающие в процессе этих игр. Понятно, что каждый игрок имел желание выиграть. Но далеко не всегда игра оканчивалась успешно. В игру включались далеко не простые люди, а достаточно грамотные и умеющие думать. Самые первые работы в области теории вероятностей появились еще в XVII в. Б. Паскаль и П. Ферма открыли вероятностные закономерности, возникающие при бросании игральных кубиков-костей. Это был первый шаг к открытию новой теории. Его поддержали многие ученые того времени, в том числе Я. Бернулли, который уже в начале XVIII в. выпускает в свет свою монографию

«Искусство предположений». Здесь он предлагает классическое определение вероятности случайного события, как отношение числа равновероятных исходов, связанных с данным событием, к общему числу исходов.

Область применения теории вероятностей начинает быстро расширяться.

Идут годы, и теория вероятностей представляет собой самостоятельную с обширными приложениями математическую науку, пользующуюся у студентов всех вузов огромным уважением и успехом.

Учение – это очень сложный и трудоемкий процесс. Заинтересовать студентов таким сложным предметом, как высшая математика, конечно, не просто. В качестве примера легко привести лекцию по высшей математике студентам заочного отделения любой специальности, в конце или даже в середине которой на вопрос преподавателя: «Что легче: учиться или работать?», ответ всегда однозначный: «Конечно, легче работать». Однако есть в курсе высшей математики такая дисциплина, которая нравится всем студентам дневного и заочного обучения. Конечно, это теория вероятностей. О ней студенты спрашивают, ее они ждут, она им интересна, ведь она так часто встречается во многих жизненных проблемах.

Каждому человеку, независимо от того, преподаватель он или студент, рабочий или инженер всегда нужна определенность. Он во всем ищет причину и старается ее объяснить. В этом суть человека. Мы живем в мире, где происходят случайные события, и часто очень трудно обнаружить в нем закономерности.

В Белорусском государственном технологическом университете учатся будущие инженеры и экономисты, а им без математики никак не обойтись, ведь она является фундаментом для таких предметов, как физика, теоретическая механика, сопротивление материалов и, конечно, предметов по специальности [1].

Подготовка высококвалифицированных инженеров-технологов, инженеров лесного хозяйства, экономистов, работников коммерческих служб, инженеров химического производства должна совершаться на самом высоком уровне. Белорусский государственный университет осуществляет подготовку студентов вышеназванных специальностей, почти ежегодно добавляя к ним новые, пользующиеся спросом специальности. Например, в 2022 учебном году была открыта новая специальность «Мехатронные системы и оборудование деревоперерабатывающих производств». Теория вероятностей для студентов данной специальности и остальных технических специальностей изучается в третьем семестре, когда основные математические темы уже усвоены. Из опыта преподавания хочется подчеркнуть интерес студентов к этой теме. Они с удовольствием решают задачи на бросание монеты, игральной кости, проверяя при этом теоретическое решение задачи и осуществляя данный опыт на практике, т. е. тут же в аудитории. Студенты искренне радуются, когда все совпадает. А когда студентам нравится данная наука, то и успехи в ее изучении повышаются. Всегда оценки на экзамене получаются чуть выше оценок по высшей математике первого и второго семестров.

Основным понятием теории вероятностей является сама вероятность, практически имея то же определение, которое когда-то предложил Я. Бернулли. В математике вероятность дает числовую оценку вероятности того, что произойдет загаданное нами случайное событие.

На сегодняшний день теория вероятностей занимает одно из первых мест по прикладному значению из всех математических дисциплин.

На кафедре высшей математики в Белорусском государственном технологическом университете преподаватели всегда стараются помочь студенту учиться. Наряду с учебниками, методическими пособиями, самостоятельными и контрольными работами на кафедре разработаны и уже несколько лет применяются рабочие тетради. Их цель – повышение эффективности обучения студентов. Внедрение рабочей тетради в учебный процесс обеспечивает развитие самостоятельного мышления у студентов; усвоение теоретических знаний; практические навыки решения типовых задач; аккуратность и организованность студентов [1].

На кафедре существует рабочая тетрадь по теории вероятностей. В ней предлагаются теоретические и практические задания для каждого студента, приведены основные понятия теории вероятностей, формулы и пояснения к ним. А во введении мы постарались изложить, как же возникла теория вероятностей, какие азартные игры способствовали ее возникновению. А так как в техническом вузе преобладают инженерные специальности, на которых учится большинство ребят, которым очень близки и знакомы эти игры, то интерес к предмету, конечно, возрастает [2].

У современных студентов много проблем именно по высшей математике, потому что в нее входят абстрактные понятия и образы; уровень математической подготовки первокурсников ожидает желать лучшего и, конечно, большой объем нового материала для непривыкших к самостоятельной работе студентов пугает их на всех этапах обучения.

Но к началу изучения теории вероятностей картина меняется. Студенты с удовольствием воспринимают новые понятия, задают вопросы из жизни, предлагают свои задачи, взятые из их конкретных жизненных ситуаций.

Особенно хочется отметить, что рабочие тетради также внедрены в наши ЭУМК, что очень полезно и для студентов заочного отделения, которые также подписаны в СДО и пользуются открытым доступом к лекционным и практическим материалам.

На кафедре высшей математики для всех студентов составлены учебно-методические разработки, рабочие тетради, учебные пособия, материалы по всем темам, в том числе и ЭУМК, чтобы помочь студентам освоить теорию вероятностей и применять ее для себя.

Как когда-то сказал А. Пуанкаре: «Нет ни одной естественной науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные методы», т. е. теория вероятностей нужна, значима и интересна всем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Волк, А. М.** Организация научной и учебной деятельности по высшей математике для будущих инженеров / А. М. Волк, И. Ф. Соловьева // Научная деятельность как путь формирования профессиональных компетентностей будущего специалиста (НПК-2021): материалы Междунар. науч.-практ. конф., Сумы, 9 дек. 2021 г. – Сумы: Цёма С. П., 2021. – С. 17–18.
2. **Соловьева, И. Ф.** От высшей математики к механике, информатике и мехатронике в техническом университете / И. Ф. Соловьева // Качество образовательного процесса: проблемы и пути развития: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 26 апр. 2022 г. – Минск: БГУИР, 2022. – С. 31–32.

УДК 378. 016

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК КОМПОНЕНТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Решение задач (научных и практических), определяемых условиями и особенностями современного мира, возможно с применением соответствующих уровню развития этого мира методов исследования и, в частности, математических методов. Математика, расширяя области своего практического применения как в различных видах деятельности человека, так и в других науках, может быть эффективно используема с точки зрения своего содержания и методов специалистами, имеющими прочные теоретические знания и сформированные осознанные практические навыки. Это актуализирует проблему повышения качества математической подготовки будущих специалистов, включая и специалистов технического профиля.

Математика как учебная дисциплина в техническом вузе призвана выявлять существенные связи реальных явлений и процессов производственной (будущей профессиональной) деятельности студентов, отражать свои прикладные возможности через содержание курса при реализации эффективных методов и средств обучения, развивать у обучающихся навыки математического исследования прикладных проблем. Будущие специалисты должны иметь сформированные представления о математике как науке, понимать и применять ее идеи и методы, важнейшим из которых является математическое моделирование, владеть математическим языком как универсальным языком науки.

Это способствует реализации целей обучения математике в техническом вузе. Одной из них является приобретение студентами навыков построения и исследования математических моделей, работа с которыми обеспечивает формирование математической культуры студента как компонента его профессиональной культуры, включающей системные и обобщенные знания, умения, навыки и приемы решения (исследования) математически формализованных задач, самоконтроль, культуру устной и письменной математической речи и др. [1].

Прикладной аспект математики позволяет реализовать воспитательные цели обучения математике: способствует формированию мотивации обучающихся, профессионально значимых качеств личности и профессиональных компетенций в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов высшего образования [2]. Рассматривая метод математического моделирования в контексте формирования профессиональных умений студентов технического вуза, мы тем самым представляем их деятельность с точки зрения решения важной методической проблемы применения теоретических знаний и сформированных навыков для решения профессиональных задач.

Математическое моделирование как компонент математической подготовки студентов технического вуза позволяет осуществлять прикладную направленность обучения с точки зрения ее мировоззренческой и социально-педагогической функций [3]. При этом решаются также такие методические проблемы, как отбор математического содержания курса, эффективно и убедительно иллюстрирующего прикладную значимость изучаемого материала, и разработка методических рекомендаций к организации процесса обучения с отобранным содержанием. Укажем некоторые из них: определение необходимого уровня овладения содержанием; выявление условий работы с прикладным материалом, в частности, его презентация; отражение взаимосвязи курса математики с другими дисциплинами; подбор и составление прикладных (профессионально-ориентированных и практико-ориентированных) задач, удовлетворяющих требованию приоритетности математического знания перед прикладным: задачи должны обеспечить усвоение математического содержания.

Все математические понятия представляют собой особые модели реальных процессов (матрицы, интегралы и т. д.) окружающей действительности. Изучение таких моделей позволяет студентам учиться переходить от них к конкретным реальным ситуациям. Так, например, математический аппарат аналитической геометрии позволяет решать ряд экономических задач, связанных с расчетами пространственных характеристик объектов. Приведем пример одной из них. Предприниматель приобрел дорогостоящую нить, свернутую в клубок в форме шара, диаметром 0,6 м. Толщина нити 0,2 мм. Было решено для продажи перемотать нить на катушки, вмещающие 100 м. Сколько потребуется таких катушек? [4, с. 55–56]. Решение предложенной задачи основано на применении из-

вестных студентам фактов курса школьной стереометрии, что позволяет использовать эту прикладную задачу на этапе мотивации изучения вопросов кривых и поверхностей второго порядка.

Методы решения задач, разработанные в математике, такие как методы решения уравнений, вычисления интегралов, исследования функций и другие, позволяют истолковывать и раскрывать потенциал моделирования в формировании умений и навыков, необходимых студентам в их будущей профессиональной деятельности. Однако в силу ограниченности времени на изучение математики в техническом вузе преподавателю приходится рассматривать отдельные вопросы теории математического моделирования, в частности, этапы этого процесса, на примере решения нескольких задач. При этом наиболее значимым с точки зрения методики обучения решению прикладных задач является первый этап – перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов (построение математической модели). Именно этот этап вызывает наибольшие трудности у студентов, поэтому предлагаемые задачи для установления и отработки последовательности действий при построении модели не должны быть перегружены терминологией другой предметной области и должны использовать математическую теорию, которую несложно актуализировать. В дальнейшем задачи усложняются, а их решение возможно с учетом идей уровневой дифференциации. Основное внимание при обучении математике в техническом вузе уделяется второму этапу моделирования – решению прикладной задачи внутри модели, т. к. большинство решаемых на занятиях задач уже формализованы. Интерпретация полученного результата в рамках исходной задачи или перевод результата решения на язык исходной задачи представляет третий этап моделирования, его осуществление, как правило, констатируется устно или же записывается в свернутом виде, на исследование полученного результата времени не остается (это можно делать в виде дополнительного домашнего задания для отдельных студентов).

Раскрытие значимости математического моделирования и реализация его дидактических функций как компонента прикладной математической подготовки студентов технического вуза, обучение построению математических моделей предложенных задач, формирование алгоритма их решения возможно на разных этапах организации учебно-познавательной деятельности студентов при освоении содержания дисциплины (введение новых понятий, обобщение и систематизация учебного материала и др.).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марченко, В. М.** О развитии личностных качеств студентов при изучении математических дисциплин / В. М. Марченко, И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова // Труды БГТУ. – 2014. – № 8 (172). – С. 43-47.

2. **Старовойтова, Е. Л.** Воспитательный потенциал математического знания в техническом вузе / Е. Л. Старовойтова // Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Борисоглебск, 15–16 окт. 2020 г. – Москва: Перо, 2020. – С. 706–713.

3. **Терешин, Н. А.** Прикладная направленность школьного курса математики. Книга для учителя / Н. А. Терешин. – Москва: Просвещение, 1990. – 96 с.

4. **Абчук, В. А.** Экономико-математические методы. Элементарная математика и логика. Методы исследования операций / В. А. Абчук. – Санкт-Петербург: Союз, 1999. – 320 с.

УДК 378. 016:51

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: АКТИВИЗАЦИЯ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Е. Л. СТАРОВОЙТОВА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Требования к подготовке студентов, определяемые образовательными стандартами высшего образования, могут быть удовлетворены только при условии стремления студентов к познанию, активном, осознанном и самостоятельном приобретении ими знаний, умений и навыков. Интенсификация и активизация процесса обучения в высшей школе предполагает создание дидактических и психологических условий осмысления учения, требует новых технологических решений, использования новых образовательных технологий, способствующих эффективному решению проблемы качества образования.

Не утрачивает своей актуальности проблема повышения качества математической подготовки студентов технического вуза. Математические знания, востребованные сегодня практически во всех сферах деятельности человека, могут быть качественно сформированы только при условии личной заинтересованности в них студента, понимании им значимости этих знаний в будущей профессиональной деятельности, осознании необходимости умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний.

Практика математической подготовки студентов в техническом вузе показывает, что большинство из них воспринимают математику как чисто абстрактную дисциплину, не испытывают потребности в получении теоретических математических знаний и не осознают необходимость их практического использования при изучении специальных дисциплин. Пассивность студентов при изучении математики делает актуальной проблему активизации учебно-познавательной деятельности обучающихся.

Активизация познавательной деятельности студентов предполагает конкретную деятельность преподавателя, направленную на отбор содержания, выбор методов, средств и форм обучения с целью развития познавательного интереса, повышения активности, творчества, самостоятельности студентов в освоении образовательных программ по подготовке к профессиональной деятельности. Все компоненты методической системы обучения должны обеспечивать эффективность обучения как в процессе учебных занятий, так и раскрывать возможности использования форм внеаудиторной работы со студентами.

Представим некоторые методические аспекты возможного варианта решения проблемы активизация учебно-познавательной деятельности студентов технического вуза, являющейся одним из фундаментальных базовых компонентов их профессиональной деятельности. Исследования по этой проблеме позволяют установить ее обусловленность синтезом развитых до определенного уровня знаний, умений и навыков профессиональной деятельности, а также ценностных отношений, мотивов учебной и профессиональной деятельности как компонентов структуры учебно-познавательной деятельности [1].

Применительно к обучению студентов вузов учебно-познавательная деятельность рассматривается в педагогическом аспекте с точки зрения организации их деятельности. В этом случае деятельность понимается как «специфический вид человеческой активности, направленной на творческое преобразование, совершенствование действительности и самого себя» [2, с. 551]. Так как учебно-познавательная деятельность рассматривается нами применительно к обучению математике, то необходимо особо отметить концепцию обучения математике как обучения определенного рода мыслительной деятельности. «Обучение математике есть дидактически целесообразное (обоснованное) сочетание обучения математическим знаниям и познавательной деятельности по приобретению этих знаний, т. е. специфической для математики познавательной деятельности» [3, с. 51].

Активизация учебно-познавательной деятельности студентов способствует эффективному решению целей математического образования будущих инженеров при учете следующих требований: основой активных мыслительных и практических действий студентов должен стать содержательный блок дисциплины; обеспечивать направленную активность на овладение знаниями и алгоритмами способов деятельности должны средства активизации, выбор которых осуществляется в соответствии с конкретной целью каждой ступени познания, воздействуя на каждый компонент учения. При организации активной познавательной деятельности студентов на лекциях и практических занятиях по математике необходимо учитывать уровни активности: активность воспроизведения, активность интерпретации и творческая активность [4].

Начальный этап обучения студентов в вузе связан с необходимостью освоения ими новых способов познавательной деятельности, поэтому методически

значимым является смещение приоритетов образования в сторону внимания к личности студента, его интересам, потребностям и индивидуальным особенностям. Это требует создания условий организации обучения математике по формированию эффективных навыков и приемов учебно-познавательной деятельности и самостоятельной работы. В практике преподавания это выражается в более четкой структурированности учебного процесса и технологичности его организации. Необходимо применение новых форм и методов в практике обучения математике, в частности, применение активных методов обучения при организации самостоятельной работы по предложенному преподавателем плану в виде методического предписания [5].

Эффективная и целесообразная организация всех этапов учебных занятий требует, в частности, методического обеспечения актуализации опорных знаний для их внутрипредметного применения с помощью соответствующих методических приемов, реализуя идеи преемственности в обучении математике.

Обеспечение мотивационной направленности обучающихся, развитие интереса к математическим знаниям как основы формирования профессиональных компетенций требует нахождения баланса фундаментальной и профессиональной направленности математической подготовки, формирование содержания такой подготовки для различных направлений инженерного образования. Включение студентов в контекст будущей профессиональной деятельности означает использование в содержании обучения математике профессионально значимых знаний, показывающих связь математической теории с будущей работой.

При обучении математике требуются также учет методических аспектов индивидуализации и дифференциации обучения, организации самостоятельной аудиторной и внеаудиторной работы студентов, которые при соответствующем методическом обеспечении обладают огромными возможностями активизации учебно-познавательной деятельности студентов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Насырова, Э. Ф.** Модульно-рейтинговая и проектная технологии формирования профессиональной компетентности учителя технологии и предпринимательства: монография / Э. Ф. Насырова. – Шадринск: Шадринский Дом Печати, 2008. – 140 с.
2. **Немов, Р. С.** Психология: в 2 кн. Кн. 1: Общие основы психологии / Р. С. Немов. – Москва : Просвещение, 1994. – 576 с.
3. **Столяр, А. А.** Педагогика математики: учебное пособие для пединститутов / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.
4. **Коробий, Е. Б.** Активизации учебно-познавательной деятельности студентов как педагогическая проблема / Е. Б. Коробий // Теория и практика общественного развития. – 2014. – № 3. – С. 141–144.
5. **Старовойтова, Е. Л.** Некоторые методические аспекты обучения математике студентов технического вуза в адаптационный период / Е. Л. Старовойтова // Качество подготовки

специалистов в техническом университете: проблемы, перспективы, инновационные подходы: материалы V Междунар. науч.-метод. конф. – Могилев: МГУП, 2020. – С. 83–84.

УДК 378.016:51

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ КАК ДИДАКТИЧЕСКОЕ СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Т. С. СТАРОВОЙТОВА

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Математическое образование является важнейшей составляющей фундаментальной подготовки студентов высшей школы. Исходя из такого понимания, определяются принципы, цели и содержание математического образования в техническом вузе. В процессе обучения математике реализуются цели образования, воспитания и развития студентов в соответствии с образовательными стандартами высшего образования при учете специфики математики как учебной дисциплины.

Эффективность обучения определяется как содержанием учебной дисциплины, так и способом деятельности по его освоению. Это определяет ряд методических проблем при организации учебно-познавательной деятельности студентов. Применительно к обучению математике студентов технического вуза будем учитывать концепцию обучения математике как обучения определенного рода мыслительной деятельности. «Обучение математике есть дидактически целесообразное (обоснованное) сочетание обучения математическим знаниям и познавательной деятельности по приобретению этих знаний, т. е. специфической для математики познавательной деятельности» [1, с. 51].

Для осознанного усвоения студентами программного материала курса математики, повышения их заинтересованности в получении глубоких и прочных знаний по предмету необходимо при организации учебно-познавательной деятельности предоставить каждому студенту возможность реализовать себя в познании с учетом собственных интересов и способностей, ценностных ориентаций и опыта. И. С. Якиманская отмечает, что изложение знаний должно быть направлено не только на расширение их объема, структурирование, интегрирование, обобщение предметного содержания, но и на преобразование субъектного (индивидуального) опыта ученика, который проявляется в избирательности к познанию мира (содержанию, виду и форме его предъявления), устойчивости этой избирательности, способах проработки учебного материала, эмоционально-личностном отношении к объектам познания [2].

Реализовать указанные требования возможно в условиях дифференциации обучения, позволяющей анализировать его с точки зрения личностного подхода. При этом дифференциация обучения может не только базироваться на учете индивидуальных особенностей учащихся, но и быть нацеленной на развитие этих особенностей как основу становления личности. В этом случае дифференциация обучения выступает как средство личностно-ориентированного образования.

Проблема дифференциации в математической подготовке студентов может быть успешно и эффективно решена только при системном рассмотрении всех компонентов методической системы обучения (целей, содержания, форм, методов и средств обучения). Так как дифференциация обучения необходимо предполагает разделение студентов по отдельным типологическим группам с учетом их индивидуальных образовательных особенностей, то можно говорить о компонентах педагогической системы обучения и характеризовать уровневую дифференциацию как один из видов дифференциации обучения.

Формирование типологических групп студентов основано на данных психолого-педагогических исследований, например [3]. В практике обучения математике в техническом вузе это может быть сделано, например, по результатам самостоятельной работы, проведенной на первом практическом занятии. Работа включает несколько простых заданий школьного курса математики, а результаты ее выполнения позволяют преподавателю оценить базовый уровень математической подготовки каждого студента и предоставить ему возможность усвоения математического содержания дисциплины на желаемом уровне, но не ниже уровня государственного стандарта. Студент работает по индивидуальной образовательной траектории, имеет возможность перехода на более высокий уровень при изучении других вопросов курса. Уровни называются по-разному, например, пороговый, продвинутый, высокий, или уровень 1, уровень 2, уровень 3, или базовый, повышенный, продвинутый и др. Дифференциации обучения осуществляется в условиях открытости уровней усвоения материала и результатов обучения для студентов, градации уровня требований и уровня обучения, возможности последовательного продвижения студента по уровням обучения при соответствии контроля и оценки принятому уровневому подходу.

Формы и методы обучения определяются в зависимости от результата распределения студентов по типологическим группам и, естественно, от сложности и объема изучаемого материала (тема, раздел, модуль и т. д.). Основным средством реализации уровневой дифференциации являются дифференцированные разноуровневые задачи (задания). Для их решения на первом уровне (низшем) требуются умения применять в знакомой ситуации известные факты, стандартные приемы, распознавать математические объекты и свойства, применять известные алгоритмы и навыки вычислений (самый низший уровень). Для второго

уровня предлагаются нетипичные задачи, но знакомые студентам или выходящие за рамки известного лишь незначительно; задачи третьего уровня требуют творчества в выборе математического аппарата, интегрируют знания из разных разделов курса, разрабатывается алгоритм решения. Работа с разноуровневыми задачами позволяет формировать у обучающихся умение применять знания, фиксировать степень овладения этим умением, судить о качестве усвоения учебного материала и управлять процессом учения.

Дифференциацию процесса обучения можно соотносить либо с отбором форм, методов и приемов обучения, либо с содержанием образования, либо с выделением мобильных групп студентов, нацеленных на решение не только образовательных задач, но и на личностное развитие обучающихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Столяр, А. А.** Педагогика математики: учебное пособие для пединститутов / А. А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.
2. **Якиманская, И. С.** Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – 2-е изд. – Москва: Сентябрь, 2000. – 112 с.
3. **Капинос, А. Н.** Уровневая дифференциация при обучении математике / А. Н. Капинос // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 31–40.

УДК 004.421.2:06:519.67

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ SYMPY

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Современный образовательный процесс невозможен без применения систем компьютерной математики (СКМ) для решения учебных и научно-исследовательских задач, что изменяет технологии обучения студентов и меняет их отношение к изучению математических, технических и других дисциплин [1–5].

Коммерческие СКМ, такие как Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, достаточно дороги, и не каждый пользователь или учебное заведение может приобрести системы с высокой стоимостью индивидуальной лицензии. В образовательном процессе возможно приобретение недорогой подписки на веб-сервис СКМ, либо для замены коммерческого программного обеспечения, использование бес-

платных СКМ, например, Maxima, Scilab, Octave, Smath Studio, SymPy. Со сравнительным анализом СКМ – Maple, Mathematica, Matlab и SymPy можно ознакомиться в [6].

В данной статье приведены примеры использования бесплатной библиотеки SymPy, написанной на языке Python, для аналитического решения дифференциальных уравнений.

Функция dsolve находит аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений различных типов [7]: dsolve(equation,y(x)), где equation – дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции y(x).

Функция checkodesol(eqn,y) проверяет правильность полученного аналитического решения задачи.

Задача 1. Найти аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения Бернулли $xy'(x) + y(x) = x^3 y(x)^2$.

Python – документ.

```
from sympy.plotting import plot
from sympy import *
x,z = symbols('x,z'); y = symbols('y', cls=Function)
# Уравнение Бернулли
eqn = Eq(x*diff(y(x), x) + y(x), y(x)**2*x**3)
print(' Уравнение Бернулли ')
pprint(eqn); z = dsolve(eqn, y(x))
print("----- Решение уравнения Бернулли")
pprint(z); print(); print("----- Проверка")
print(checkodesol(eqn,z))
```

Результат вычисления

<p>Уравнение Бернулли</p> $x \cdot \frac{d}{dx}(y(x)) + y(x) = x^3 \cdot y^2(x)$ <p>----- Решение уравнения Бернулли</p> $y(x) = \frac{2}{x \cdot (C_1 - x^2)}$ <p>----- Проверка</p> <p>(True, 0)</p>
--

Задача 2. Найти решение задачи Коши: $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x + e^{-x} \sin 2x$; $y(0) = 1,25$; $y'(0) = 1$. Построить график функции y(x).

Python – документ.

```

from sympy.plotting import plot
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=symbols("x"); y=symbols('y', cls=Function)
eqn=Eq(y(x).diff(x,2)+2*y(x).diff(x)+y(x), sin(2*x)*exp(-x)+cos(2*x))
print('***** Исходное дифференциальное уравнение *****')
pprint(eqn); print()
zk=dsolve(eqn, y(x), ics={y(0):1.25,y(x).diff(x).subs(x,0):1})
print("----- Решение задачи Коши"); pprint(zk);
print("----- Проверка"); print(checkodesol(eqn,zk))
# Построение графика решения
Ys = lambdify(x, zk.rhs, 'numpy'); t = np.linspace(0, 10, 100)
plt.title('Решение задачи Коши', fontsize=14)
plt.xlabel('Переменная x', fontsize=12); plt.ylabel('Функция y', fontsize=12)
plt.plot(t, Ys(t),linewidth=2); plt.grid(True)

```

Результат вычисления

```

***** Исходное дифференциальное уравнение *****

$$y(x) + 2 \cdot \frac{d}{dx}(y(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = \cos(2 \cdot x) + e^{-x} \cdot \sin(2 \cdot x)$$

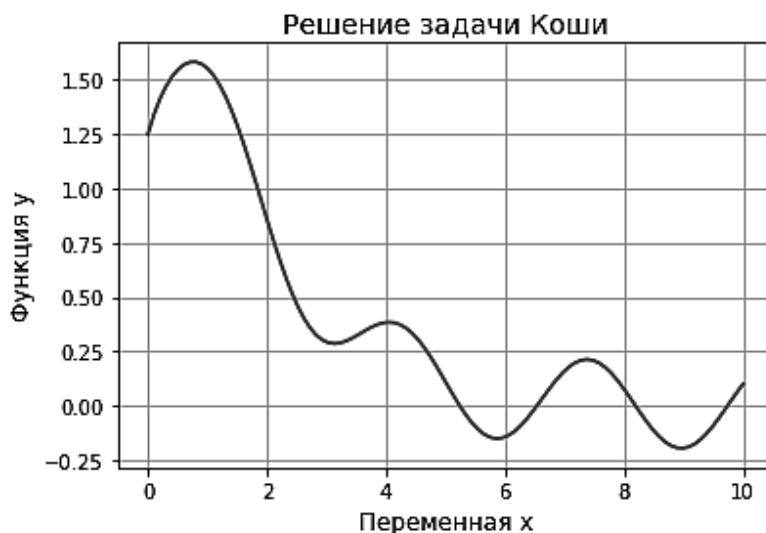
----- Решение задачи Коши

$$y(x) = \left( 2.55 \cdot x - \frac{\sin(2 \cdot x)}{4} + 1.37 \right) e^{-x} + \frac{4 \cdot \sin(2 \cdot x)}{25} - \frac{3 \cdot \cos(2 \cdot x)}{25}$$

----- Проверка
(True, 0)

```

График функции $y(x)$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
2. **Воронич, В. Е.** Применение системы MathCad для расчетов переходных процессов в курсе электротехники / В. Е. Воронич, Г. Ч. Шушкевич // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: сб. тез. докл. Респ. науч.-практ. конф. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2016. – С. 6–8.
3. **Горский, А. В.** О возможностях использования систем компьютерной математики в учебном процессе / А. В. Горский // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2017. – № 3 (95). – Ч. 1. – С. 90–99.
4. **Шушкевич, Г. Ч.** Применение облачных технологий Wolfram Cloud для решения дифференциальных уравнений / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании : материалы VI Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – Москва: Научный консультант, 2019. – С. 724–730.
5. **Шушкевич, С. В.** Построение регрессионной модели в системе компьютерной математики Mathcad / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 120–124.
6. Сравнительный анализ универсальных математических пакетов: Matlab, Maple, Mathematica и высокоуровневого языка программирования Python [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://the-unl.com/sravnitelnyy-analiz-universalnykh-matematicheskikh-paketov-matlab-maple-mathematica-i-vysokourovnevoy-yazyka-programmirovaniya-python-27>.
7. ODE. User Functions [Electronic resource]. – Mode of access: <https://docs.sympy.org/latest/modules/solver/ode.html>.

УДК 004.421.2:06:519.67

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В СРЕДЕ MATHCAD

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Компьютерное моделирование является важнейшим способом познавательной, учебной и практической деятельности студентов. Его рассматривают и как метод научного познания, и как самостоятельный вид деятельности. В компьютерное моделирование входят: построение математической модели с учетом оговоренных допущений и рамок ее применимости, разработка методов расчета сформулированной математической задачи, создание компьютерной программы, проведение вычислительного эксперимента, обработка результатов расчетов и формулировка выводов [1]. Применение систем компьютерной математики существенно облегчает и расширяет возможности проведения аналитических и численных вычислений, визуализацию и хранение данных на всех этапах компьютерного моделирования. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает студенту понимание сути исследуемых процессов и явлений, изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных [2, 3].

Задача. Пусть в пространстве R^3 находится тонкостенная цилиндрическая трубка кругового сечения радиуса a и длины L . Боковая поверхность трубки S заряжена до потенциала V , а оба основания трубки Γ_n, Γ_v , заземлены. Оценить потенциал электростатического поля внутри и вне данной трубки для разных значений переменных, построить эквипотенциальные линии внутри цилиндра. Физические величины измеряются в системе СИ.

Математическая постановка задачи. Для решения задачи в точке $O \in R^3$ введем декартовы $\{x, y, z\}$ и цилиндрические $\{r, z, \varphi\}$ координаты, связанные соотношением

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq r < \infty$; $-\pi \leq \varphi \leq \pi$; $-\infty < z < \infty$.

Нижнее круговое основание трубки Γ_n расположено на плоскости Oxy с центром в точке O . Образующие трубки параллельны оси Oz .

Потенциал U поля удовлетворяет уравнению Лапласа [4]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

граничным условиям на основаниях трубки, условию на боковой поверхности:

$$U(M)|_{M \in \Gamma_n} = 0; \quad U(M)|_{M \in \Gamma_b} = 0; \quad U(M)|_{M \in S} = V, \quad (2)$$

и условию на бесконечности

$$U(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где M – произвольная точка R^3 .

Используя метод разделения переменных и учитывая независимость потенциала U от переменной φ [4], решение поставленной граничной задачи (1)–(3) можно представить в виде $V(r, z) = V_1(r, z) + V_2(r, z)$:

$$V_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{I_0(\pi n r / L)}{I_0(\pi n a / L)} \sin(\pi n z / L), \quad \rho \leq a;$$

$$V_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{K_0(\pi n r / L)}{K_0(\pi n a / L)} \sin(\pi n z / L), \quad \rho \geq a,$$

где $b_n = \int_0^L V(z) \sin(\pi n z / L) dz$; $I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно нулевого порядка.

MathCad – документ.

1. Исходные данные.

L - длина цилиндрической трубки,

a - радиус основания трубки,

$V(z)$ - заданный потенциал на боковой поверхности

$$\underline{\underline{L}} := 1 \quad \underline{\underline{a}} := 0.5 \quad \underline{\underline{V}}(z) := -4 \cdot z^2 + 4 \cdot z \quad b(n) := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L V(z) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot z \cdot \pi}{L}\right) dz$$

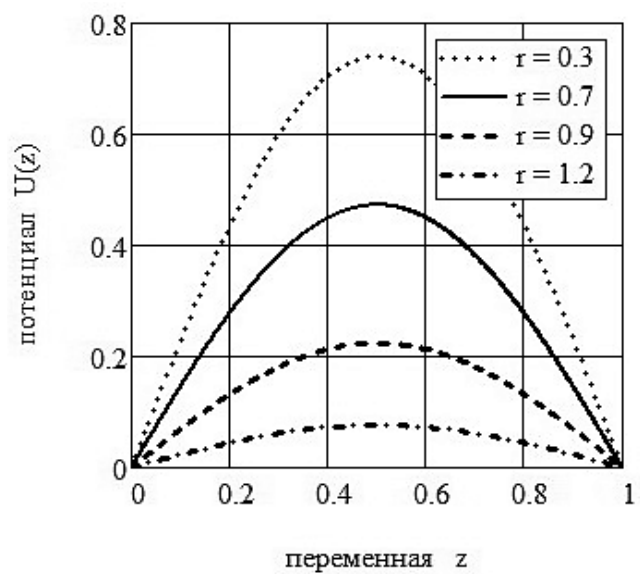
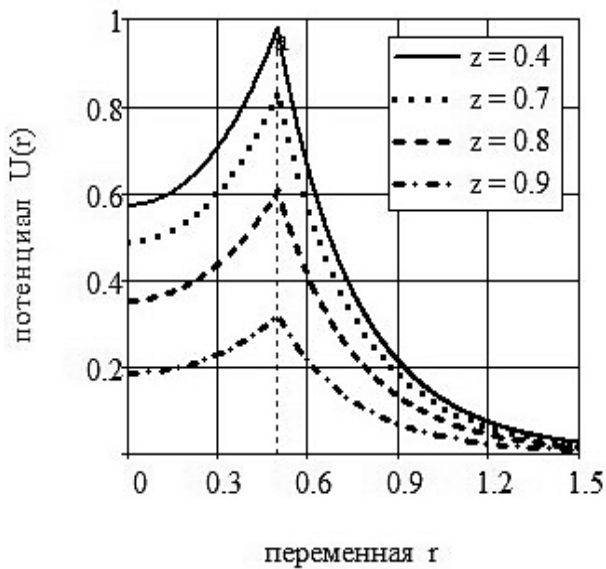
2. Подпрограмма – функции для вычисления потенциалов.

$$a1(n,r,z) := b(n) \cdot \frac{I_0\left(\frac{\pi \cdot n \cdot r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\pi \cdot n \cdot a}{L}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot z}{L}\right) \quad b1(n,r,z) := b(n) \cdot \frac{K_0\left(\frac{\pi \cdot n \cdot r}{L}\right)}{K_0\left(\frac{\pi \cdot n \cdot a}{L}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot z}{L}\right)$$

$U1(r,z) := \left \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ S \leftarrow a1(n,r,z) \\ R \leftarrow 1 \\ \text{while } R > 0.0001 \\ \quad \left \begin{array}{l} n \leftarrow n + 1 \\ R \leftarrow a1(n,r,z) \\ S \leftarrow S + R \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$	$U2(r,z) := \left \begin{array}{l} n \leftarrow 1 \\ S \leftarrow b1(n,r,z) \\ R \leftarrow 1 \\ \text{while } R > 0.0001 \\ \quad \left \begin{array}{l} n \leftarrow n + 1 \\ R \leftarrow b1(n,r,z) \\ S \leftarrow S + R \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$
--	--

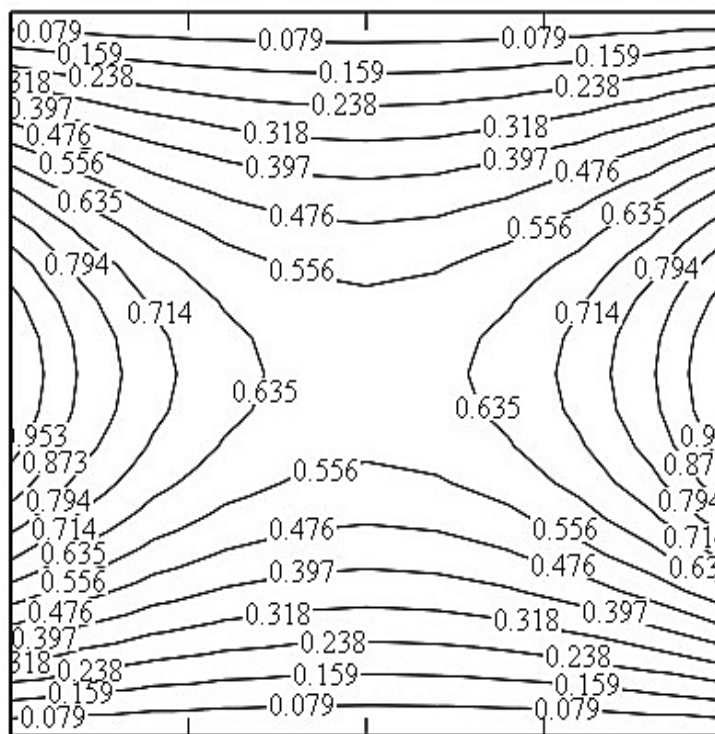
$U(r,z) := \text{if}(r \leq a, U1(r,z), U2(r,z))$

3. Графики потенциала $V(r, z)$ для некоторых значений z (слева) и r (справа).



4. Построение эквипотенциальных линий внутри цилиндрической трубки.

$$i := 0, 1 \dots 10 \quad j := 0, 1 \dots 20 \quad r_i := 0.1 \cdot i - 0.5 \quad z_j := 0.05 \cdot j \quad U_{i,j} := U(r_i, z_j)$$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.
2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
3. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – Москва: Научный консультант, 2018. – С. 525–530.
4. **Шушкевич, Г. Ч.** Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.

УДК 004.42

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

А. И. ЯКИМОВ, А. А. ЗАЙЦЕВ, Е. И. САВИЦКИЙ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

В соответствии с учебным планом специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» изучается дисциплина «Теория графов», включающая теоретическую и практическую часть. Для реализации концепции непрерывной подготовки по программированию предложено использовать язык программирования Python и набор библиотек, реализующих алгоритмы теории графов: алгоритмы поиска в глубину, нахождения кратчайшего пути, поиска сильных компонент связности и т. д. Такие алгоритмы помещены в специальные библиотеки Python, для доступа к которым необходимо знать основы языка.

Методические рекомендации для предварительного изучения языка Python содержат следующие вопросы.

1. Синтаксис (например, Python не содержит операторных скобок, вместо этого блоки выделяются отступами: пробелами или табуляцией, а вход в блок из операторов осуществляется двоеточием).
2. Типы данных (базовые типы: bool, int, float, complex и str) и структуры данных (списки (lists), кортежи (tuples) и словари (dictionaries)).
3. Строки (обособляются кавычками двойными «"» или одинарными «'»).
4. Модули (math – один из важнейших в Python, предоставляет обширный функционал для работы с числами).
5. Операторы (If, While, For).
6. Функции (например, функция print(), которая выводит некоторое значение на консоль).
7. Классы (внутренние переменные и внутренние методы классов начинаются с двух знаков нижнего подчеркивания «__», например, «__myprivatevar»).
8. Подключение библиотек (подключить модуль можно с помощью инструкции import с указанием названия модуля).

Библиотека networkx (свободное программное обеспечение, распространяемое под BSD-лицензией) создана на языке Python и предназначена для работы с графами и другими сетевыми структурами. Основные возможности библиотеки: классы для работы с неориентированными, ориентированными и взвешенными графами; узлом может быть временная последовательность, текст, изображение, XML; сохранение / загрузка графов в/из наиболее распространённых форматов файлов хранения графов; встроенные процедуры для создания графов базовых

типов; методы для обнаружения подграфов, клик и К-дольных графов; получение таких характеристик графа, как степени вершин, высота графа, диаметр, радиус, длины путей, центр и т. д.; визуализация сети в виде 2D- и 3D-графиков.

Библиотека `matplotlib` – это библиотека двумерной графики для языка программирования Python, с помощью которой можно создавать высококачественные рисунки различных форматов [1].

Фрагмент Python-программы применения алгоритма Флойда с использованием библиотеки `networkx` и `matplotlib`.

```
#библиотека для использования алгоритма Флойда
import networkx as nx
#библиотека для визуализации графа
import matplotlib.pyplot as plt
#матрица смежности вершин
edges = [(1, 2, {'weight': 4}), (1, 3, {'weight': 2}), (2, 3, {'weight': 1}), (2, 4, {'weight': 5}), (3, 4, {'weight': 8}), (3, 5, {'weight': 10}), (4, 5, {'weight': 2}), (4, 6, {'weight': 8}), (5, 6, {'weight': 5})]
#нагрузки на ребрах
edge_labels = {(1, 2): 4, (1, 3): 2, (2, 3): 1, (2, 4): 5, (3, 4): 8, (3, 5): 10, (4, 5): 2, (4, 6): 8, (5, 6): 5}
G = nx.Graph()
#добавление вершин в граф
for i in range(1, 7):
    G.add_node(i)
#добавление ребер с нагрузками
G.add_edges_from(edges)
#позиционирование узлов без пересечений ребер
pos = nx.planar_layout(G)
#построение графа G (with_labels = True - видимость меток узлов)
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_size = 1300, node_color = 'yellow', font_size = 18)
#построение связей с указанием веса ребер
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels=edge_labels, font_size=18)
#визуализация графа (рисунок 1)
plt.show()
#применение алгоритма Флойда
fw = nx.floyd_warshall(G, weight='weight')
#вывод кратчайших путей
results = {a: dict(b,) for a, b in fw.items()}
print(results)
```

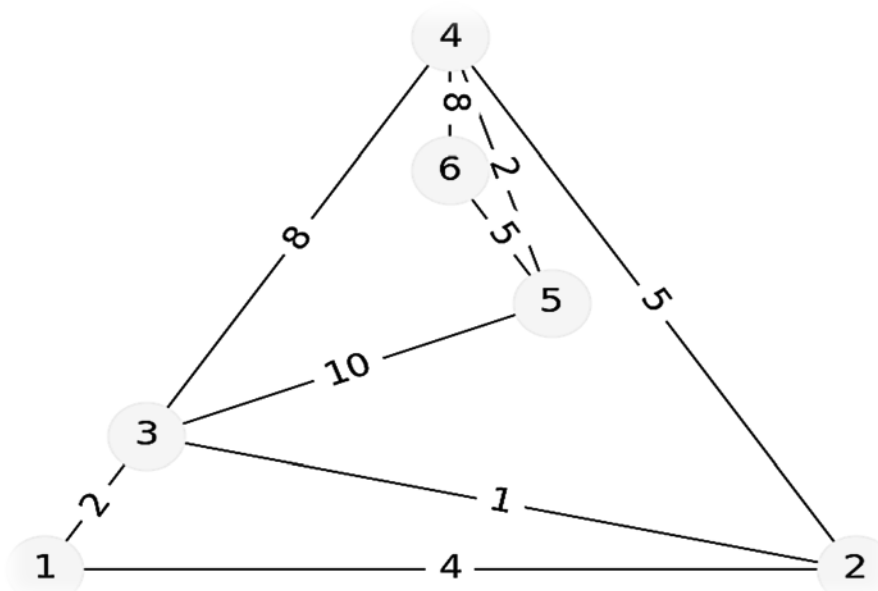


Рис. 1. Визуализация графа

В последнее время при визуализации данных применяется библиотека `graphviz`, которая используется для создания деревьев решений и эффектов блок-схем. Движок диаграмм использует язык описания графов DOT, который представляет собой текстовое описание структуры графа: вершины, их связи, группы и атрибуты для их визуального оформления [2].

Для углубленного развития навыков по языку программирования Python предложено прохождение дополнительно обучающего курса на образовательной интернет-платформе Stepik с получением сертификата [3].

На последующих практических занятиях предлагается реализовать операции удаления вершин, удаления ребра, дополнения графа, объединения графов, композиции графов и основных алгоритмов теории графов в виде отдельных программных модулей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шабанов, П. А.** Научная графика в Python [Электронный ресурс] / П. А. Шабанов // [github.com](https://github.com/whitehorn/Scientific_graphics_in_python/blob/master/P1%20Chapter%201%20Pyplot.ipynb). – Режим доступа: https://github.com/whitehorn/Scientific_graphics_in_python/blob/master/P1%20Chapter%201%20Pyplot.ipynb. – Дата доступа: 15.01.2023.
2. Использование библиотеки `graphviz` в Python [Электронный ресурс] // [russianblogs.com](https://russianblogs.com/article/58061468970/). – Режим доступа: <https://russianblogs.com/article/58061468970/>. – Дата доступа: 15.01.2023.
3. Программирование на Python [Электронный ресурс] // [stepik.org](https://stepik.org/course/67/syllabus). – Режим доступа: <https://stepik.org/course/67/syllabus>. – Дата доступа: 15.01.2023.

УДК 004.42

ТЕХНОЛОГИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

А. И. ЯКИМОВ, А. А. ПЕТРОВА, Д. В. МИКАЛУЦКИЙ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

С целью повышения эффективности образовательного процесса по учебной дисциплине «Теория графов» предложена технология организации командной самостоятельной работы.

Перед группой студентов была поставлена задача разработки отчета по теме «Представление и реализация деревьев». Тема довольно обширная, поэтому остановились на построении бинарных деревьев поиска и способах обхода дерева. Для выполнения этой работы необходимо было самостоятельно найти, ознакомиться и изучить информацию по теме, а также выполнить анализ для представления в учебном процессе.

Был определен руководитель команды, задачи которого заключались в организации работы группы, контроле выполнения работы, объединении работ всех участников, составлении плана презентации материалов отчета. Также в обязанности руководителя входило консультирование участников при возникновении разного рода вопросов.

Был определен перечень вопросов, подлежащих разработке: теоретическое описание алгоритмов; пример реализации алгоритмов на практике; тестовые вопросы по алгоритмам; контрольные вопросы; индивидуальные задания; вспомогательный материал; реализация алгоритмов на C#; реализация алгоритмов на Python.

Проанализировав этот план, были подобраны лучшие кандидаты для реализации каждого раздела отчета. Кандидаты были подобраны с учётом интересов и умений членов группы. Участники были оповещены о распределении вопросов, принимались все предложения и возражения. После этого руководителем было составлено окончательное распределение работ.

Благодаря самостоятельной работе студенты учились работать в команде, помогали друг другу. Эта работа научила распределять своё время, а также представлять информацию в виде презентаций.

Данная работа помогла получить опыт публичных выступлений, т. к. после завершения работ результаты докладывались с презентациями. Руководитель работы приобрел навыки организации работы, научился находить компромисс

между участниками группы, решать проблемы разного рода, а также ориентировать участников на конечный результат.

Считаем, что идея командной управляемой самостоятельной работы – это способ обучения, способствующий саморазвитию студентов, получению новых умений и навыков, а также сплочению коллектива.

Научное издание

**Преподавание математики в высшей школе
и работа с одаренными студентами
в современных условиях**

**Teaching mathematics in higher education
and working with gifted
students in contemporary context**

Материалы Международного научно-практического семинара

(Могилев, 23 февраля 2023 года)

Печатается в авторской редакции

Редакторы *И. В. Голубцова, А. А. Подошевка*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать 15.02.2022. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 7,63. Тираж 10 экз. Заказ № 172.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.