МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное учреждение высшего профессионального образования
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Материалы международного научно-практического семинара

Могилев, 22 февраля 2018 г.

Могилев 2018

УДК 378.14:51
ББК 74.58:22.1
П 72

П 72 **Преподавание** математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы междунар. науч.-практ. семинара / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол. : И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – 26 с. : ил.

ISBN 978-985-492-203-4.

В сборнике представлены материалы научно-практического семинара, традиционно проводимого в рамках международной Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике

УДК 378.14:51
ББК 74.58:22.1

ISBN 978-985-492-203-4

Научное издание

Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях

Материалы международного научно-практического семинара

Могилев, 22 февраля 2018 г.

Печатается в авторской редакции
Технический редактор И. В. Брискина
Компьютерная верстка И. В. Брискина

Подписано в печать 19.02.2018 г. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,58. Тираж 30 экз. Заказ № 166.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.91

О ДОСТИЖЕНИЯХ СТУДЕНТОВ В РЕШЕНИИ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. АСТАШОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносов
Москва, Россия

Научные результаты студенческих работ являются существенным вкладом в качественную теорию дифференциальных уравнений. Предметом исследования этих работ является дифференциальное уравнение типа Эмдена-Фаулера высокого порядка

$$y^{(n)} + p(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) \mid y \mid^k \operatorname{sgn} y = 0, \qquad (1)$$

$n > 2$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$, $p \in C\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ и его частный случай

$$y^{(n)} + p_0 \mid y \mid^k \operatorname{sgn} y = 0, \qquad (2)$$

$n > 2$, k, $p_0 \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$. Асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка со степенной нелинейностью изучалось в работах российских и зарубежных математиков с середины 20-го века. Библиографические ссылки на основные работы в этом направлении можно найти в [1, 2]. Тем не менее, ряд вопросов, связанных с исследованием асимптотического и качественного поведения решений этого уравнения до сих пор остается неисследованным. Приведем некоторые результаты, полученные студентами.

1. О существовании решений с заданным числом нулей (В. В. Рогачев) [3].

Для уравнения (2) изучается задача о существовании решений с заданным числом нулей на заданном отрезке, интервале или полуинтервале при различных значениях *n* и *k*.

Теорема 1.1. *При* $n = 3,4$, *для любых* $k \in (1,\infty)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $a<b$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на отрезке* $[a,b]$ *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 1.2. *При* $n = 3$ *для любых* $k \in (1,\infty)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $a<b$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на полуинтервале* $(a,b]$, *равное нулю в точке* b *и имеющее на этом полуинтервале ровно* m *нулей, а также решение, имеющее на этом полуинтервале счетное число нулей*.

Теорема 1.3. *При* $n = 3$ *для любых* $k \in (0,1)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $a < b$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на отрезке* $[a,b]$, *рав-*

4-й раунд. 2 задачи на 30 минут

9. В треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *BC* отмечены соответственно точки *K* и *M* так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{BM}{MC} = 2$. Отрезки *AM* и *CK* пересекаются в точке *T*. Прямая *BT* пересекает сторону *AC* в точке *N*. Найдите площадь треугольника *ANT*, если площадь треугольника *AKT* равна 20 кв. см.

10. Найдите наименьшее значение $x^2 + y^2 + z^2$, если $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

5-й раунд. 3 задачи на 30 минут

11. Дан равносторонний треугольник периметра *3n*. Каждая сторона разбита на *n* равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Сколько получилось треугольников со стороной 2?

12. Через середину диагонали единичного куба провели плоскость, перпендикулярную этой диагонали. Вычислите площадь полученного сечения куба.

13. Пусть $g(x,y)$– числовая функция от двух аргументов. Известно, что

1) $\forall x,y \quad (x+y)g(x,y) = g(x^2,y^2)$;

2) $\forall x,y,z \quad g(x,y) = g(x+z,y+z)$;

3) $g(1,0) = 0$.

Найдите все функции *g* с такими свойствами.

В [1] приводятся сведения о командных олимпиадах, проводящихся в рамках суперфиналов международной Интернет-олимпиады по математике в Израиле. Именно они послужили отправной точкой для командных олимпиад в Южно-Уральском государственном университете. Дополнительные сведения о математических олимпиадах ЮУрГУ можно найти в [2–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Эвнин, А. Ю.** Олимпиада в форме командной игры / А. Ю. Эвнин // Математика в высшем образовании. – 2015. – № 13. – С. 81–94.

2. **Эвнин, А. Ю.** Математический конкурс в ЮУрГУ / А. Ю. Эвнин. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 86 с. : ил.

3. **Эвнин, А. Ю.** Задачи математического конкурса в ЮУрГУ / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. – 2015. – № 4 (76). – С. 26–52.

4. **Эвнин, А. Ю.** Математический конкурс в ЮУрГУ 2012–2016 гг. / А. Ю. Эвнин. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2017. – 176 с. : ил.

5. **Эвнин, А. Ю.** Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг. / А. Ю. Эвнин. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с. : ил.

6. **Эвнин, А. Ю.** Командные математические олимпиады в ЮУрГУ / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. – 2017. – №2 (82). – С. 7–26.

вырастает до 320 баллов. Так что даже последний раунд может кардинально изменить положение участников.

Всем командам предлагается один и тот же набор задач, но результаты подводятся по разным номинациям: школьники, первый курс, второй курс, третий-четвертый курс, магистранты и аспиранты.

В 2012 г. в олимпиаде приняли участие 18 команд, в 2013 и 2014 гг. – по 41 команде, в 2015 г. 52 команды, в 2016 и 2017 гг. – по 50 команд. Помимо студентов ЮУрГУ в олимпиадах принимали участие представители других вузов и лицеев.

В 2015 г. у олимпиады появился спонсор – компания Orange Apps. За счёт спонсоров приобретаются кубки и медали для награждения победителей и призёров.

Приведём задачи олимпиады, состоявшейся 28 октября 2017 г.

1-й раунд. 2 задачи на 20 минут

1**.** В олимпиаде участвовало 100 студентов. Они решали 4 задачи. Никто не решил все четыре задачи. Первую задачу решили 90 участников олимпиады, вторую – 80, третью – 70, четвёртую – 60. Сколько человек одновременно решили первую и вторую задачу?

2. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ – правильный 12-угольник. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать 7 векторов с нулевой суммой?

2-й раунд. 3 задачи на 30 минут

3. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \max(\sin x, \sin y)\,dxdy,$ где D задаётся неравенствами $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi.$

4. Найдите 4-ю с конца цифру в десятичной записи числа $\dfrac{2017}{2^{2017}}.$

5. Сверните сумму

$\operatorname{tg}1\cdot\operatorname{tg}2 + \operatorname{tg}2\cdot\operatorname{tg}3 + \operatorname{tg}3\cdot\operatorname{tg}4 + \ldots + \operatorname{tg}(n-1)\cdot\operatorname{tg}n.$

3-й раунд. 3 задачи на 30 минут

6. Имеется длинный забор. Том Сойер хочет покрасить его, соблюдая такое условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок понадобится Тому для выполнения этой работы?

7. Вычислите $\dfrac{1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{8^2}-\dfrac{1}{9^2}+\ldots}{1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}-\dfrac{1}{8^2}+\dfrac{1}{9^2}-\ldots}.$

8. Пусть a, b, c, d – натуральные числа. Найдите наименьшее возможное значение их суммы, если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{7}{10}.$

ное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей, а также решение, имеющее на этом отрезке счетное число нулей, и ненулевое решение, имеющее на этом отрезке континуум нулей.

Аналогичные результаты получены при $n=4$. Обобщение этих результатов на уравнение (1) произвольного порядка в случае $k \in (0,1)$ опубликовано в [4].

2. О свойствах решений уравнения (1) второго порядка (Т. А. Корчемкина).

Рассматривается уравнение (1) второго порядка, где функция $p(x,u,v)$ знакопостоянна, непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам.

Теорема 2.1 [4]. *Пусть в уравнении (1) $n=2$, $k>1$ функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по последним двум аргументам, отрицательна, ограничена и отделена от нуля. Тогда для любых конечных значений x_*, x^* таких, что $x_* < x^*$, существует решение уравнения (1), определенное на $\left(x_*, x^*\right)$ и имеющее вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.*

В [5] приведена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений уравнения как в случае регулярной, так и в случае сингулярной $(0<k<1)$ нелинейности. В [6] также исследовано поведение решений в случае неограниченного потенциала *p*, найдены необходимые или достаточные условия существования “*black hole*” решений, то есть решений, удовлетворяющих условиям, $0 < \lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$, $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty.$

Теорема 2.2 [6]. *Пусть в уравнении (1) $n=2$ и существуют такие значения $u_0>0$, $v_0>0$, что при $u_0>0$, $v_0>0$, функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по последним двум аргументам, отрицательна и отделена от нуля в случае $k>1$ (в случае $0<k<1$ функция $\dfrac{p(x,u,v)}{|v|}$ отделена от нуля), и справедливо неравенство $p(x,u,v) \ge g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой, причём $\int\limits_{v_0}^{+\infty} \dfrac{v\,dv}{g(v)} < +\infty.$ Тогда любое максимально продолженное решение с начальными данными $u>u_0$, $v>v_0$ является black hole решением.*

Для уравнения (1) при $n=2$ с положительным потенциалом *p* в [7] доказана колеблемость всех решений и получены оценки отношения значений решения в последовательных экстремумах, а также оценено отношение значений производной в последовательных нулях решения. В [8] приведены результаты о поведении колеблющихся решений вблизи правой границы области определения при различных условиях на потенциал.

3. О существовании решений с нестепенным поведением уравнения (2) (М. Васильев).

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении (2)* $n = 15,\ p_0 < 0$. *Тогда существует такое* $k \in (1,\infty)$, *что уравнение (2) имеет решение* $y(x) = p_0^{\frac{1}{1-k}}(x - x^*)^{-\alpha} h\left(\ln\left(x - x^*\right)\right),\ x \to x^* - 0,\ x^* \in \mathbb{R}$, *где* h *– некоторая периодическая функция.*

Ранее этот результат был получен в [10] для $n = 12$, и в [11] для $n = 13,14$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кигурадзе, И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – Москва : Наука, 1990. – 180 с. : ил.

2. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: науч. изд. под ред. И. В. Асташовой. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – С. 22–288.

3. **Astashova, V. I.** On the number of zeros of oscillating solutions of the third- and fourth-order equations with power nonlinearities / **V. I. Astashova**, V. V. Rogachev // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 205, no. 6. – P. 733–748.

4. **Рогачев, В. В.** On existence of solutions to higher-order singular nonlinear Emden-Fowler type equation with given number of zeros on prescribed interval / В. В. Рогачев // Functional Differential Equations. – 2016. – Vol. 23. – pp. 141–151.

5. **Korchemkina, T.** On Existence of Solutions with Prescribed Domain to Second-Order Emden-Fowler type Differential Equations / T. Korchemkina // Functional Differentional Equations. – 2016. – Vol.23. – pp. 19–26.

6. **Dulina, K.** On Asymptotic Behavior of Solutions to Second-Order Regular and Singular Emden-Fowler Type Differential Equations with Negative Potential / K. Dulina, K. T. Korchemkina // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2016). – 2016. – pp. 71–76.

7. **Дулина,** К. М. О поведении решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности / К. М. Дулина, Т. А. Корчемкина // Дифференциальные уравнения. Т. 52. – 2016. – № 11. – С. 1574–1576.

8. **Дулина,** К. М. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с положительным потенциалом / К. М. Дулина, Т. А. Корчемкина // Дифференциальные уравнения. Т. 51. – 2015. – №11. – С. 1547–1548.

УДК 378

КОМАНДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ В ЮЖНО-УРАЛЬСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

А. Ю. ЭВНИН
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)»
Челябинск, Россия

Большой интерес у студентов вызывают командные олимпиады, в которых заметную роль играет умение участников команд работать в коллективе.

В Южно-Уральском государственном университете в 2012–2017 гг. проводилась командная олимпиада (организуемая Институтом естественных и точных наук на базе кафедры прикладной математики и программирования)

Основной контингент участников олимпиады составляют студенты первых и вторых курсов. Наряду с ними состязаются старшекурсники и даже аспиранты. Вне конкурса выступают школьники лучших лицеев и гимназий Челябинска. При таком широком спектре участников нужна гибкая схема проведения олимпиады.

Олимпиада состоит из пяти туров (раундов). В каждом туре участникам предлагается решить две или три задачи. Этим достигаются сразу две цели:

– оказывается возможным предлагать задачи более широкой тематики, оставляя шанс показать хороший результат более молодым участникам (в каждом блоке должна быть задача, доступная школьникам и студентам первого курса). Впрочем, были случаи, когда продвинутые школьники решали задачи, связанные с матрицами и интегралами;

– усиливается командный характер олимпиады. Если на заданный промежуток времени предлагается для решения всего одна задача, то один сильный «игрок» может решить судьбу всей игры. В случае же нескольких задач, которые нужно решить за тот же промежуток времени, усилий только одного участника команды, скорее всего, окажется недостаточным для победы (если в соревнованиях участвуют достаточно подготовленные и относительно равные по силам команды).

Задачи проверяются сразу после окончания раунда. Текущие результаты команд выводятся на экран в каждой из трёх аудиторий, где проходит олимпиада. Баллы за каждую задачу вычисляются по формуле $\frac{960}{n+1}$, где n – число команд, решивших эту задачу. Например, если задачу решили 23 команды, они получат за неё по 40 баллов. А если всего две, то стоимость

С помощью производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ можно выразить предельные издержки производства и приближенно охарактеризовать дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.) Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 200 ед.

Если известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии, то среднее время, затрачиваемое на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{ср.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx \ .$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить объем u продукции, произведенной за время [0;T], если известна функция описывающая изменение производительности некоторого производства с течением времени:

$$u = \int_0^T f(t)dt \ .$$

Пример. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $f(t) = -0{,}00625t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (ден. ед. / ч.), где t – время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти величину объема продукции (в стоимостном выражении) за рабочий день.

– Примеры функций нескольких переменных в экономике: многофакторные функции полезности – логарифмическая функция, функция постоянной эластичности.

– Задачи экономики, приводящие к дифференциальным уравнениям. Примеры использования дифференциальных уравнений в моделях экономической динамики.

Пример. Обозначим через M величину фондов фирмы в натуральном или стоимостном выражении. Фонды – это оборудование, помещения и т.д., они изнашиваются, стареют. Обозначим выбытие фондов через коэффициент выбытия μ. Инвестиции I – вложение денег, увеличивают фонды с коэффициентом пропорциональности ρ, тогда получим дифференциальное уравнение: $\dfrac{dM}{dt} = -\mu M + \rho I$.

9. **Korchemkina, T.** On oscillation of solutions to second-order Emden–Fowler type Differential equations with positive potential / T. Korchemkina // Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems, Брно, Чешская Республика, 10–13 января 2017г.

10. **Асташова, И. В.** положительных решениях с нестепенной асимптотикой уравнения типа Эмдена-Фаулера двенадцатого порядка / И. В. Асташова, С. Вьюн // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения : сб. тр. межунар. миниконф. – Москва : МЭСИ, 2013. – С. 95–129.

11. **Astashova, I.** On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to emden-fowler type higher-order equations / I. Astashova // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. – 2013. – № 2013:220. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-220. – P. 1–15.

УДК 372.8

К ВОПРОСУ ОБ АКТУАЛЬНОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

А. М. БУТОМА
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

Одной из важнейших целей проведения математической олимпиады является развитие интереса учащихся к математике. Участников олимпиады привлекает возможность добровольного участия в соревновании, в котором они могут проверить свои математические умения и способности решать нестандартные задачи.

Любой участник олимпиады желает добиться лучших результатов. Для этого ему необходимо читать дополнительную литературу, более подробно изучать отдельные вопросы различных разделов математики. Тем самым развиваются способности к анализу решения задач, поиску нешаблонных решений, повышается результативность занятий математикой.

Проведение олимпиад любого уровня позволяет выявить учащихся, имеющих интерес и склонности к занятиям математикой, что весьма важно для решения вопроса о подготовке математических и научно-исследовательских кадров. Участвуя в математических соревнованиях, учащийся более объективно определяет свое отношение к математике как к предмету будущей профессии.

Подбор к олимпиаде нестандартных заданий, требующих применения особых приемов решения задач, предполагает наличие хороших математических навыков и от самого учителя математики. Поэтому проведение олимпиад по математике является также одним из средств, мотивирующим повышение профессиональной квалификации учителя.

Таким образом, математическая олимпиада – одна из форм реализации всех явных и скрытых возможностей интеллекта, поскольку решение олимпиадных задач оказывает существенное воздействие на развитие умений применять свои знания в нестандартных ситуациях, грамотно использовать сложный математический аппарат.

При этом реализуются следующие цели:

– расширяется математический кругозор учащихся;

– развивается интерес к изучению математики;

– учащиеся привлекаются к научно-исследовательской деятельности.

А также решаются задачи:

– развивается нестандартное мышление участников олимпиады,

– воспитываются самостоятельность, целеустремленность, трудолюбие, сила воли, стремление к победе.

С учетом указанных целей и задач в 2017 г. в рамках VIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике была проведена и математическая олимпиада школьников [1]. В математическом соревновании, проводимом в форме личного первенства, участвовали представители лицеев и гимназий г. Могилева. Участникам олимпиады было предложено 15 заданий повышенной сложности, на решение которых отводилось 1,5 ч. Задания, предложенные школьникам, являлись частью заданий, предназначенных для участников Международной студенческой олимпиады MathOpen Belarus. Тем не менее, несмотря на сложность заданий, все школьники показали достойный результат. Первое и второе места в этой олимпиаде соответственно заняли учащиеся лицея Белорусско-Российского университета Иван Чибисов и Роман Слабодчиков, третье место завоевал представитель гимназии №1 г. Могилева Матвей Станкевич.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.

УДК 378.147 : 51

ПРОФЕССИОНАЛЬНО ЗНАЧИМАЯ ВАРИАТИВНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Г. В. ФЕДЯЧЕНКО, Л. В. ВАРФОЛОМЕЕВА, С. А. СКРЫГАН
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

Порядок изложения материала в курсе математики должен соответствовать как критерию внутрипредметной целостности, так и критерию междисциплинарного обеспечения. При детализации программы курса математики (для экономических дисциплин) проводилось выяснение потребностей в конкретных знаниях, умениях и навыках, получаемых студентами при изучении отдельных разделов курса математики. Анализ учебной, методической и специальной литературы показал, что в разделы курса математики могут быть включены вопросы, касающееся применения математики в решении задач дисциплин спецциклов и в профессиональной деятельности экономистов (профессионально значимая вариативная составляющая). Включение подобных вопросов в материал лекций, практических занятий и заданий для самостоятельной работы способствует повышению интереса студентов к математике, поскольку актуализируются профессиональные мотивы, студенты получают знания и умения по применению изученного математического материала в специальной подготовке. Это позволяет избежать формального изложения курса математики, расширяет возможности междисциплинарных связей.

Отметим, что отбираемый материал не должен требовать глубокого знания специальных вопросов по нескольким причинам:

– во-первых, использование профессионально значимого материала должно удовлетворять критерию времени;

– во-вторых, математика изучается на первом курсе, когда специальные знания студентов еще не являются глубокими и всесторонними, а все примеры и задания должны быть им доступны;

– в-третьих, преподаватель математики, не имеющий экономического образования, должен свободно комментировать предлагаемые студентам примеры и приложения.

Приведём пример профессионально ориентированных вопросов, которые возможно включить в соответствующие разделы программы курса высшей математики.

– Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике. Предельные издержки. Эластичность функции, ее геометрическая интерпретация. Экономическая интерпретация теоремы Ферма. Экономический смысл определенного интеграла. Использование понятия определенного интеграла в экономике.

Рассмотрим несколько задач, которые предлагались для решения участникам математического кружка.

Пример 1. Найти $f^{(2018)}(2)$, если $f(x)=(x-2)^2\ln(3x+2)$.

Очевидно, прямой подход (взять производную функции 2018-го порядка) здесь неприменим. Студент должен, проанализировав ситуацию, понять, в какой записи функции используются производные высших порядков. Вспомнив про ряд Тейлора, можно решить задачу довольно быстро.

Ответ: $-\dfrac{3^{2016}\cdot 2018!}{2016\cdot 8^{2016}}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha+\sqrt{z}=\sqrt{2(x+y+z)},\\ 5(x+y)+4\sqrt{z}=1, \quad \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Опять же, решить систему стандартными методами вряд ли получится (или, решение будет очень громоздким). В то же время, если увидеть некоторую связь с элементами векторной алгебры, и ввести в рассмотрение векторы $\vec{a}=(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z})$ и $\vec{b}=(\sin\alpha,\cos\alpha,1)$, задача с технической точки зрения решается быстро.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{25}\sin^2\alpha;\dfrac{1}{25}\cos^2\alpha;\dfrac{1}{25}\right)$.

Пример 3. Сколько существует различных невырожденных матриц третьего порядка, элементами которых являются числа "0" или "1"?

В решении этой задачи также поможет векторный аппарат. Рассмотрим единичный куб. Задача свелась к нахождению количества различных упорядоченных троек некомпланарных векторов, соединяющих вершины этого куба, которые в свою очередь смогут образовать невырожденные матрицы третьего порядка.

Ответ: 174.

Таким образом, для организации математического кружка в техническом вузе мы считаем приоритетным углубленное изучение тем, включённых в учебную программу курса, а не изучение новых разделов математики.

УДК 37.091.3:51

ОБ ИЗМЕНЕНИИ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНЫХ ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ НА ЧЕТЫРЕХЛЕТНЕЕ ОБУЧЕНИЕ В БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Л. В. ВАРФОЛОМЕЕВА, А. А. РОМАНЕНКО, Г. В. ФЕДЯЧЕНКО
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

С 2017–2018 учебного года осуществлен переход на четырехлетний срок обучения в Белорусско-Российском университете на специальностях Промышленное и гражданское строительство (ПГС) и Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (ПДМ). Согласно новому учебному плану изменилось число семестров для изучения математики с четырех до трех и количество аудиторных (лекционных и практических) часов для ПГС с 386 до 234, а для ПДМ с 390 до 254, т.е. разность составляет около 150 ч, а в процентном отношении, сокращение составляет порядка 40 %.

В связи с этим, возникли вопросы, связанные с содержанием новых учебных программ, расчасовки по основным изучаемым темам, с методикой изложения, поскольку 40% материала предыдущих учебных программ надо исключить. Изначально, на вопрос, что исключить, возникал ответ – приложения, поскольку в конце изучения каждого раздела математики идут различные приложения математики к задачам, напрямую связанным с инженерной деятельностью. Очевидно, что такое механическое выбрасывание учебного материала нецелесообразно, поскольку приложения во многом помогают понять суть и значение математических методов в инженерной деятельности. Кроме того, рассмотренные приложения на математических занятиях позволят глубже понять содержания спецпредметов, которые, в конечном итоге, составят суть инженерной подготовки. Поэтому при составлении новых учебных программ по математике сделан упор на сокращение доказательств теоретических положений, но не на сокращение приложений, а в лекционном курсе предполагается многие теоретические положения давать справочно, но со ссылками на соответствующую литературу, в которой обоснованы данные положения. Студент, при необходимости, самостоятельно познакомится с их обоснованием. Кроме того, на кафедре создан учебно-методический комплекс, в котором даны такие обоснования. Комплекс размещен на учебном сайте университета и включает в себя курс лекций, методические указания для практических занятий, варианты индивидуальных и самостоятельных работ.

Приведем некоторые примеры обсуждаемых сокращений.

Так при изучении систем линейных алгебраических уравнений не следует уделять много времени матричному методу решения невырожденных систем и решению систем по формулам Крамера, поскольку это частные случаи. Причем доказательство невырожденности и само решение достаточно трудоемко для систем уравнений больше трех. Метод Гаусса универсален и эффективен тем, что позволяет доказывать совместность, и в случае совместности, легко находить решения в случае произвольных систем. При этом изучение алгоритма Гаусса можно начинать при изучении матриц, определителей и ранга матрицы, на примерах приведения матриц к трапециевидной (треугольной) форме с помощью элементарных преобразований.

При изучении темы «Векторы» координатные представления известных произведений векторов необходимо давать справочно, а больше внимания уделить следствиям из них и различным приложениям.

При изучении темы «Кривые второго порядка на плоскости» нужно опустить вывод канонических уравнений. После определений кривых на словах пояснить, как их получить, записать канонические уравнения, сделать рисунки кривых, объяснить смысл параметров входящих в уравнения, как строить по известным уравнениям и перечислить основные свойства кривых.

При изучении темы «Непрерывность функций» опустить теоремы о непрерывности суммы, разности, произведений и частного двух функций, а также непрерывности сложной и обратной функций. Обязательно сформулировать теорему о непрерывности элементарных функций в своей естественной области определения. Студенты со школы уже имеют интуитивное представление о непрерывности функций. В результате будет больше времени на классификацию точек разрыва. Привести теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши с поясняющими рисунками.

При изучении темы «Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной», после определения производной, и ее геометрического смысла, вывод таблицы производных показать на двух–трех примерах. Правила дифференцирования привести без доказательств, больше уделять времени на практику по нахождению производных. После введения понятия дифференциала функции и его геометрического смысла, учить студентов записывать формально дифференциал произвольной функции и определять функцию, дифференциал от которой известен (как подготовка к интегралам). Из теорем о дифференцируемых функциях привести только теорему Лагранжа, постулятивно – правило Лопиталя. Больше времени уделять приложениям производных: исследованию на монотонность, нахождению локальных и глобальных экстремумов, полному исследованию функций и построению графиков.

Операция интегрирования очень сложно дается студентам, а для некоторых остается загадкой. После изучения основных приемов и методов интегрирования, а также правил интегрирования рациональных дробей, изучаются конкретные типы интегралов и рекомендованные подстановки, за-

УДК 510

КОНЦЕПЦИЯ КРУЖКА ПО УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Т. Ю. ОРЛОВА, С. Ф. ПЛЕШКУНОВА
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

Главная задача высшей школы – подготовить высококвалифицированных специалистов, помочь молодым людям максимально раскрыть свои способности, которые они впоследствии успешно и творчески смогут реализовать в своей профессиональной деятельности.

Однако в настоящее время существует проблема неоднородности студенческой академической группы, как по уровню общеобразовательной подготовки, так и по степени мотивации к учебе. В студенческой среде всегда находятся способные и талантливые молодые люди, которых не устраивает традиционная, в чем-то консервативная система обучения, часто ориентированная только на усвоение изложенного в учебных пособиях и лекциях преподавателя материала.

Предположим, студенту нравится математика, или он участвовал в предметных олимпиадах, будучи ещё школьником. Как поддержать его интерес к этой науке в университете? Именно для этих целей в ВУЗах создаются кружки для углубленного изучения различных учебных дисциплин.

В нашем ВУЗе мы организовали кружок по углубленному изучению математики. При разработке плана работы кружка перед нами стоял вопрос: стоит ли предлагать студентам материал, не входящий в курс математики технического университета, или же целесообразнее решать более сложные и интересные задачи на базе изучаемых по программе тем.

Выбрав техническую специальность, студент предполагал, что будущая профессия в большей мере охватывает практическое применение его знаний, умений и навыков. Даже увлекаясь математикой в школе, вряд ли он собирался дополнительно учить те разделы математики, которые предлагаются в специализированных математических ВУЗах, из которых выходят математики-теоретики. Тем более, на изучение новых математических разделов надо большое количество времени, сил и желания, которых им зачастую не хватает.

Поэтому, чтобы поддержать интерес к математике, и в то же время не перегружать студентов дополнительным материалом, на кружке им предлагаются задачи, для решения которых не требуются неизвестные им формулы и теоремы, но необходимы глубокие знания изученных тем, а также творческое и логическое мышление.

Успешное применение рабочей тетради по элементарной математике натолкнуло авторов на идею создания рабочей тетради по математическому анализу, целью которой была помощь студентам и уменьшение трудностей при изучении дисциплины. Несоответствие между объемом изучаемого материала и количеством времени, отведенным на его изучение, требует жесткого отбора информации и подбора задач на лекциях и семинарах. Организация практических занятий также имеет недостатки. Только несколько человек можно вызвать к доске в течение одного практического занятия. Поэтому, пока один из студентов работает у доски, другие чаще всего занимаются механическим переписыванием, что не позволяет усвоить материал на требуемом уровне. Таким образом, в ходе практического занятия между преподавателем и всей группой не осуществляется непрерывная обратная связь. Студенты, как и школьники, стали фанатами компьютера. Легкость в получении информации в Паутине и нежелание что-то запоминать привело к тому, что новая информация долго не задерживается в их голове, поэтому требуется неоднократное повторение материала, на которое не предусмотрено аудиторных часов.

«Практикум по математическому анализу» состоит из модулей. В начале каждого модуля приведены теоретические материалы. Задания в каждом модуле расположены в порядке повышения уровня: от самых простых, стандартных заданий до нестандартных, олимпиадных заданий для студентов, увлекающихся математикой. В конце каждого модуля имеются задания для диагностики [2], позволяющие сопоставлять планируемые и полученные результаты. Использование рабочих тетрадей при подготовке к контрольным работам, отработке пропущенных занятий доказало свою эффективность и смогло обеспечить помощь в организации самостоятельной работы студента по изучению математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попова, И. Г.** Рабочие тетради по математике / И. Г. Попова, А. В. Шишова, В. Л. Цыганов // Высшее образование в России. – 2014. – № 12. – С. 141–144.

2. **Суховиенко, Е. А.** Теоретические основы информационных технологий педагогической диагностики: [монография] / Е. А. Суховиенко. – Челябинск : Челябинский гос. пед. ун-т, 2004. – 212 с. : ил.

помнить которые для студентов очень сложно. В этой связи, целесообразно свести в таблицу основные методы интегрирования, часто встречающиеся типы интегралов и рекомендованные подстановки, и научить студентов пользоваться этой таблицей. Пример такой таблицы имеется в [1]. Кроме того, следует познакомить студентов со справочниками по таблицам интегралов и электронными ресурсами Internet, которыми студенты охотно пользуются. Это сэкономит время.

Определенный интеграл, его свойства и вычисление не занимают много времени. Приложения определенного интеграла огромны и, как видно из самих приложений, важны для будущего инженера. Им следует уделить больше внимания. Следует особо отметить задачи по нахождению координат центра масс. Так студенты строительного факультета не смогли ответить на вопрос о причинах возможного падения подъемных кранов. После изучения темы по нахождению координат центра масс плоских материальных фигур и правил вычисления координат центра масс сложных, состоящих из фигур с известными координатами центра масс, мы смоделировали башенный строительный кран, состоящий из прямоугольных форм, с изменяющейся длиной стрелы, различными плотностями поднимаемого груза и противовеса. Изменяя параметры модельного расчетного крана, студенты самостоятельно смогли ответить на поставленный ранее вопрос. При изучении темы «Кратные интегралы», не следует вводить понятия тройного интеграла, поскольку для реальных приложений можно обойтись двойным интегралом.

В учебном процессе почти всегда рассматриваются прикладные задачи, которые решаются аналитически. В реальных приложениях не всегда можно обойтись чистой аналитикой, т.е. требуются численные методы. Но, к сожалению, в учебных планах четырехлетнего обучения отсутствуют лабораторные работы по численным методам.

Некоторые приемы и примеры сокращенного изложения других тем по математике можно найти в [2].

Приведенные рассуждения по содержанию учебных программ по математике для четырехлетней подготовки инженеров следует рассматривать как вариант, также как и приведенные приемы и примеры изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Герасимович, А. И.** Математический анализ : справ. пособие / Н. А. Рысюк. – Минск : Выэйшая школа, 1989. – 109 с .: ил.

2. **Варфоломеева, Л. В.** О преподавании некоторых тем по математике при подготовке инженеров в Белорусско-Российском университете / Л. В. Варфоломеева, А. А. Романенко, Г. В. Федяченко / Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 13–14.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ VIII ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

VIII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1] состоялась 23 февраля 2017 г. В соревновании приняли участие 46 студентов и аспирантов из 21 вуза Беларуси, Ирана, Польши, России, Таджикистана, Узбекистана и Чехии. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Решения заданий участниками не предоставлялись, жюри проверяло лишь ответы. Все задания имели открытую форму, ответом в каждом задании было некоторое точное действительное число. При подсчёте количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Санкт-Петербургского государственного университета Будимир Баев, давший 25 правильных ответов. Второе место, также с 25 правильными ответами, занял студент университета имени Адама Мицкевича в Познани (Польша) Войтех Ваврув. Третьим стал студент Московского технологического университета Евгений Кичак, давший 20 правильных ответов.

Наиболее сложными заданиями восьмой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1 и 2. Каждое из этих заданий выполнили лишь по три участника.

Задача 1 [2, С. 422]. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину A и середины рёбер BB_1 и B_1C_1. Найдите отношение объёмов частей, на которые сечение разделило призму (объёма части, содержащей ребро AA_1, к объёму части, содержащей ребро CC_1).

Решение. Строим сечение. Пусть M и N – середины рёбер BB_1 и B_1C_1 (рис. 1). Находим точки $S=(MN)\cap(CC_1)$ и $P=(SA)\cap(A_1C_1)$. Сечение – четырёхугольник $AMNP$.

Объём призмы обозначим через V, а объём части, содержащей ребро CC_1, – V_1. Сам способ построения сечения подсказывает, как можно выразить V_1 через V. Построим точку $L=(MN)\cap(BC)$. Для того чтобы

http://library.by/portalus/modules/shkola/readme.php?subaction=showfull&id=1193919939&archive=1196814847&start_from=&ucat=& (свободный доступ). – Дата доступа: 09.02.2018.

2. **Косенкова, М. В.** Построение математической модели функционирования системы регионального образования в виде многокритериальной задачи оптимального управления и исследование признаков оптимальности ее решения [Электронный ресурс] / М. В. Косенкова, Е. А. Николаева, С. В. Злобина. – Режим доступа : http://cyberleninka.ru/article/n/postroenie-matematicheskoy-modeli-funktsionirovaniya-sistemy-regionalnogo-obrazovaniya-v-vide-mnogokriterialnoy-zadachi-optimalnogo. – Дата доступа: 09.02.2018.

УДК 378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТУДЕНТАМИ ПЕРВОГО КУРСА

Н. В. МУРАВЬЕВА
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)»
Челябинск, Россия

Курс математического анализа является фундаментальным для инженерных специальностей, так как для успешного освоения профессиональных дисциплин необходимо знание математики. Недостаточный уровень математической подготовки первокурсников отрицательно влияет не только на изучение математического анализа и других математических дисциплин, но и снижает мотивацию к дальнейшему обучению.

Каждый сентябрь на протяжении десяти лет проводится входное тестирование у студентов первого курса. Входное тестирование носит диагностический характер и нацелено на оценку уровня знания школьной математики. Каждый год тестирование подтверждает низкий уровень математической подготовки. Учитывая создавшуюся ситуацию, было разработано учебно-методическое пособие «Элементарная математика. Практикум для студентов первого курса». Рабочая тетрадь состоит из заданий, сгруппированных по темам. В начале каждой темы приведены сведения справочного характера. Задания в теме расположены в порядке повышения уровня сложности. Рабочая тетрадь [1] является индивидуальным пособием, которое позволяет вести диалог с каждым студентом. Пропуски или многоточие заставляют студента постоянно думать, работать вместе с преподавателем, возвращаться к материалу, данному в начале темы, делать собственные выводы и наблюдения.

УДК 517.9 : 372.8

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ МНОГОУРОВНЕВОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. Г. КОЗЛОВ
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

Для перехода на принципиально иную организацию учебного процесса, реализующую новые цели, в нашей стране была внедрена система многоуровневого высшего образования [1]. Отличительной особенностью бакалавриата (первой ступени высшего образования) от моноуровневой системы, является сокращение по времени образовательных программ обучения, из-за чего происходит трансформация приоритетов – научная профессионализация уходит на второй план в пользу прикладной.

Концепция оптимизации качества подготовки студентов в системе многоуровневого образования базируется на теории оптимального управления. Специфическим свойством задач оптимизации является многоуровневый характер ее сбалансированных показателей, исследуя которые, можно определить эффективность уровня текущих знаний, как отдельного студента, так и группы обучаемых [2].

Пусть $x_1(t)$ – объем знаний, полученных студентом к моменту времени *t*, $x_2(t)$ – умения и навыки, $y(t)$ – доля времени, используемая на накопление знаний.

Получим задачу оптимального управления

$$J(y) = -\int_0^T x_1(t)\,dt \to \min,$$

с динамическими ограничениями:

$$x_1'(t) = x_2(t)y(t),\ x_2'(t) = (1 - y(t))x_1(t)x_2(t),$$

граничными условиями:

$$x_1(0) = p_0,\ \ x_2(0) = q_0,$$

и ограничениями на управление:

$$0 < y(t) < 1,\ t \in [0, T].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Митяева, А. М.** Особенности многоуровневой системы в современном ВУЗЕ [Электронный ресурс]: электрон. данные. – Минск: Белорусская цифровая библиотека LIBRARY.BY, 01 ноября 2007. – Режим доступа :

найти V_1, нужно из объёма пирамиды $SALC$ вычесть объём пирамид $SPNC_1$ и $MALB$. А эти объёмы легко выразить через объём призмы.

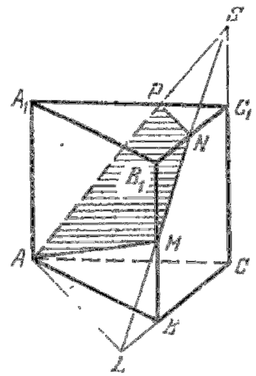

Рис. 1. Сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMN

Высоту призмы обозначим H, площадь основания – Q, объёмы пирамид $SALC$, $SPNC_1$ и $MALB$ соответственно V_2, V_3, V_4.

Поскольку M и N – середины рёбер, то $|BL| = \frac{1}{2}|BC|$, а $|CL| = \frac{3}{2}|BC|$. Отсюда следует, что $S_{ALC} = \frac{3}{2}Q$. Далее, имеем $|SC_1| = \frac{1}{2}|CC_1|$, $|SC| = \frac{3}{2}|CC_1|$. Значит, высота пирамиды $SALC$ равна $\frac{3}{2}H$. Находим $V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}H\cdot S_{ALC} = \frac{3}{4}HQ$, т.е. $V_2 = \frac{3}{4}V$.

Пирамида $SPNC_1$ гомотетична пирамиде $SALC$ с коэффициентом $k = \frac{1}{3}$ ($|SC_1| : |SC| = 1:3$), отсюда следует, что $V_3 = k^3V_2 = \frac{1}{36}V$.

Поскольку M – середина ребра BB_1, то высота пирамиды $MALB$ равна $\frac{1}{2}H$, а из того, что $|BL| = \frac{1}{2}|BC|$, следует, что $S_{ALB} = \frac{1}{2}Q$. Значит, $V_4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot\frac{1}{2}Q = \frac{1}{12}HQ = \frac{1}{12}V$.

Теперь находим $V_1 = V_2 - V_3 - V_4 = \dfrac{23}{36}V$. Объём отсеченной части призмы, содержащей ребро AA_1, равен $V - V_1 = \dfrac{13}{36}$, а отношение объёмов частей равно $13 : 23$.

Ответ: $\dfrac{13}{23}$.

Правильные ответы в задании 1 смогли дать Будимир Баев (Санкт-Петербургский государственный университет), Эрчимэн Избеков (Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, г. Якутск) и Александр Оверченко (Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск).

Задача 2 [3, С. 282]. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx$.

Решение. Функция $x \mapsto \varphi\left(x\right) = \dfrac{x - \sin x}{x^3\left(x^2+4\right)}$, $D_\varphi = \left(-\infty, +\infty\right)$ — чётная, в силу чего

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + i\left(e^{ix}-1\right)}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx. \quad (1)$$

Действительно,

$$i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечётная, поэтому равенство (1) справедливо.

Тогда исходный интеграл равен

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3\left(x^2+4\right)}\,dx = \pi i\left(\operatorname*{res}_{2i}\frac{z + i\left(e^{iz}-1\right)}{z^3\left(z^2+4\right)} + \frac{1}{2}\operatorname*{res}_{0}\frac{z + i\left(e^{iz}-1\right)}{z^3\left(z^2+4\right)}\right) =$$

$$\pi i\left(\frac{i\left(e^{-2}+1\right)}{32} - \frac{i}{16}\right) = \frac{\pi}{32}\left(1 - e^{-2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{32e^2}$.

Правильные ответы в задании 2 дали Евгений Кичак (Московский технологический университет), Равиль Хайруллин (Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск) и Александр Янков (Остравский университет, г. Острава, Чехия).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 3 и 4, правильные ответы в которых дали соответственно 33 и 32 участника.

Задача 3. На доске написаны двадцать чисел: $1, 2, \ldots, 19, 20$. Макс и Мин по очереди ставят перед любым из этих чисел знак $+$ или $-$. Мин стремится минимизировать модуль получившейся суммы. Какую наибольшую по модулю сумму сможет обеспечить себе Макс, независимо от игры Мина?

Ответ: 10.

Задачу 3 прислал в оргкомитет олимпиады победитель Открытых олимпиад Белорусско-Российского университета по математике 2010 и 2013 гг. Андрей Ефремов (Белорусский государственный экономический университет, г. Минск). Задача составлена на основе похожей задачи, приведенной в приложении к журналу «Квант» № 2 / 2007 [4, С. 38].

Задача 4 [5, С. 152]. Найдите наименьшее чётное положительное число a, такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ — на 5, $a+3$ — на 7, $a+4$ — на 11, $a+5$ — на 13.

Ответ: 788.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 22–24.
2. Пособие по математике для поступающих в вузы / А. Д. Кутасов [и др.] ; под. ред. Г. Н. Яковлева. – Москва : Наука, 1981. – 608 с. : ил.
3. **Боярчук, А. К.** Справочное пособие по высшей математике. Т. 4. Функции комплексного переменного: теория и практика / А. К. Боярчук. – Москва : Едиториал УРСС, 2001. – 352 с. : ил.
4. **Васильев, Н. Б.** Избранные олимпиадные задачи. Математика / Н. Б. Васильев, А. П. Савин, А. А. Егоров. – Москва : Бюро Квантум, 2007. – 160 с. : ил.
5. **Горбачев, Н. В.** Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В Горбачев. – Москва : МЦНМО, 2004. – 560 с. : ил.