

УДК 621.833

А.Т. Скойбеда, д-р техн. наук, проф., oleson@tut.by

(Беларусь, Минск, БНТУ),

С.Н. Хатетовский, канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой, oleson@tut.by,

П.Н. Громыко, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, oleson@tut.by

(Беларусь, Могилев, БРУ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ В ЗАЦЕПЛЕНИИ КОЛЕС ПРЕЦЕССИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрено решение проблемы определения силы в зацеплении колес прецессионной передачи типа $K-H-V$ с центральным колесом, имеющим прямые зубья. Показано, что эта сила переменна, зависит от кинематики прецессионной передачи и инерционных свойств сателлита и выходного вала, что позволяет найти ресурсы для оптимизации ее значения.

Ключевые слова: прецессионная передача, эвольвентное зацепление, силовой расчет.

При разработке механических передач и приводов приходится решать проблемы обеспечения прочности и долговечности проектируемых механизмов. Для увеличения экономического эффекта от внедрения разработки также стремятся снизить массу и размеры указанных механизмов. Эти, а также ряд других проблем, связаны с задачей определения сил в зацеплении колес, входящих в состав проектируемых механических передач и приводов. Определение сил в зацеплении позволяет выявить запасы по прочности и жесткости зубчатых колес и, тем самым, добиться указанного выше эффекта.

Для большинства зубчатых передач разработаны и широко используются методики расчета сил в зацеплении, однако встречаются особые случаи, требующие уточнения существующих методик. Одним из таких случаев является прецессионная передача. В данной работе рассматривается один из ее вариантов – тип $K-H-V$ [1, 2].

Прецессионную передачу типа $K-H-V$ можно рассматривать как систему тел, включающую центральное колесо 1, сателлит 2, входной вал 3 и выходной вал 4 (рис. 1).

Входной вал 3 установлен в двух подшипниковых опорах E и K , которые представлены на рисунке в виде шарнирно-неподвижных опор. Входной вал 3 и сателлит 2 взаимодействуют друг с другом посредством подшипниковой опоры A , представляющей собой также шарнирно-неподвижную опору. Сателлит 2 соединен с выходным валом 4 при помощи шарнира Гука O и при этом находится в зацеплении с неподвижным центральным колесом 1 (точка B – точка контакта начальных окружностей колес). Выходной вал 4 установлен в двух подшипниковых опорах C и D , представленных в виде шарнирно-неподвижных опор. Опоры C , D , E

и K , а также точка B являются внешними связями, в то время как опора A и шарнир Гука O – внутренними. Центральное колесо, рассматриваемое в данной работе, имеет прямые зубья с эвольвентным профилем.

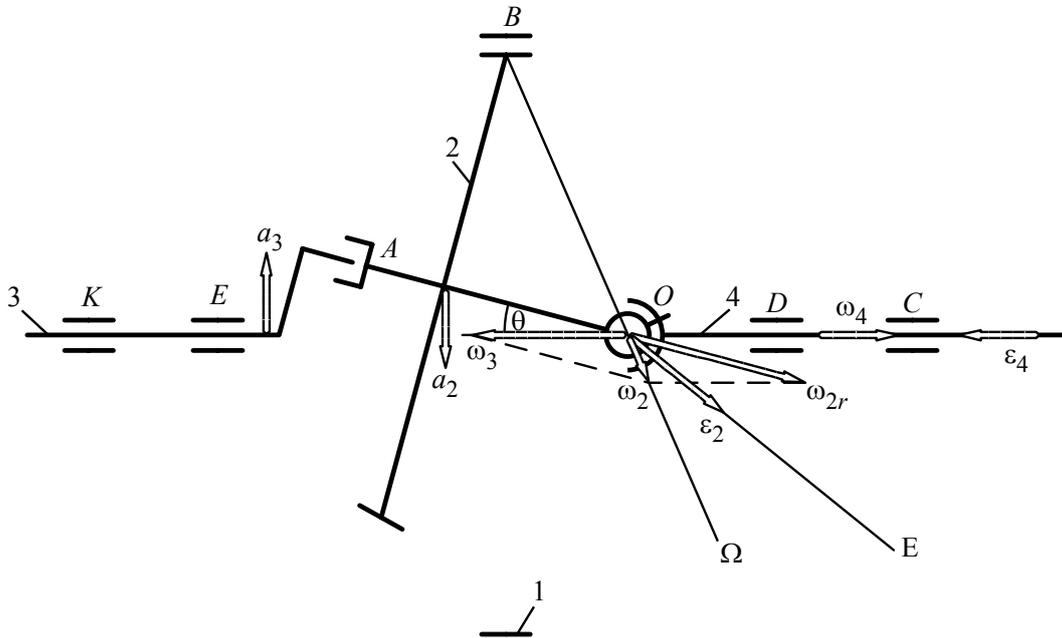


Рис. 1. Структурная схема прецессионной передачи типа К–Н–V

Рассмотрим кинематику прецессионной передачи.

Входному валу сообщается постоянная угловая скорость $\bar{\omega}_3$, в результате чего его центр масс получает нормальное ускорение

$$a_3 = \omega_3^2 \cdot h_3,$$

где h_3 – расстояние от указанного центра масс до горизонтальной оси вращения.

Сателлит совершает сферическое движение, которое представлено как совокупность двух вращений: вокруг горизонтальной оси и вокруг наклонной оси OA , составляющей с первой угол нутации $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Угловая скорость сателлита

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_{2r},$$

где $\bar{\omega}_{2r}$ – угловая скорость сателлита вокруг наклонной оси OA .

Вектор $\bar{\omega}_2$ направлен вдоль мгновенной оси вращения $B\Omega$ сателлита, проходящей через точку O – центр прецессии. Сателлит вращается с угловым ускорением сферического движения:

$$\varepsilon_2 = \omega_3 \cdot \omega_{2r} \cdot \sin \theta,$$

направление которого соответствует направлению мгновенной оси ускорений OE .

Центр масс сателлита имеет ускорение

$$a_2 = \omega_3^2 \cdot h_2,$$

где h_2 – расстояние от указанного центра масс до горизонтальной оси вращения.

Выходной вал вращается с переменной угловой скоростью $\dot{\omega}_4$, причем угловое ускорение $\ddot{\epsilon}_4$ также переменное и зависит от шарнира Гука.

Оси $B\Omega$, OE , жестко связаны с наклонной осью OA .

Рассмотрим силовые зависимости.

Прецессионную передачу, представляющую собой механическую систему, удобно расчленить в точках A , B и O , в результате чего получается три твердых тела: сателлит, входной вал и выходной вал. Ниже рассмотрен в отдельности сателлит (рис. 2).

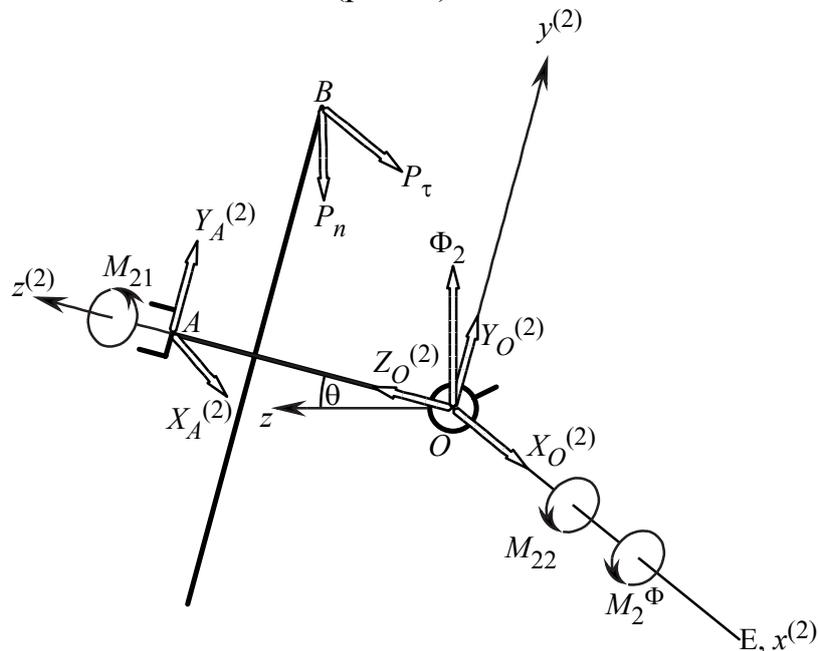


Рис. 2. Схема сателлита

Центральное колесо воздействует на сателлит силой P , которая раскладывается на две составляющие, т. е. P_n и P_τ , расположенные соответственно по направлению оси центрального колеса и перпендикулярно плоскости, в которой лежит входной вал, в сторону вращения сателлита. Найдём силу P .

Составляющие связаны между собой выражением:

$$P_n = P_\tau \cdot \operatorname{tg} \alpha_{r_1},$$

где α_{r_1} – угол профиля центрального колеса на начальном радиусе r_1 .

Угол профиля центрального колеса на радиусе r_1 находится по формуле

$$\alpha_{r_1} = \arccos \frac{r_b}{r_1},$$

где r_b – основной радиус центрального колеса:

$$r_b = \frac{m \cdot z_1 \cdot \cos \alpha}{2},$$

где m – модуль; α – угол профиля нормального исходного контура, Z_1 – количество зубьев центрального колеса.

Даламберовы силы инерции приводятся к главному вектору:

$$\Phi_2 = m_2 \cdot a_2,$$

где m_2 – масса спутника, и к паре сил с главным моментом, который найдем следующим образом:

$$\vec{M}_2^\Phi = -\frac{d\vec{L}_{20}}{dt},$$

где \vec{L}_{20} – кинетический момент спутника относительно центра прецессии.

По формуле Бура

$$\frac{d\vec{L}_{20}}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{L}}_{20}}{dt} + \vec{\omega}_2 \times \vec{L}_{20},$$

где $\frac{d\tilde{\vec{L}}_{20}}{dt}$ – частная производная в системе координат $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, которая жестко связана с спутником и которая, очевидно, равна 0.

Система $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ выбрана таким образом, чтобы ось $Oz^{(2)}$ являлась главной центральной осью инерции спутника, а плоскость $Oy^{(2)}z^{(2)}$ – плоскостью материальной симметрии, поэтому

$$I_{2xy} = I_{2zx} = I_{2yz} = 0.$$

При этом, учитывая симметрию спутника относительно оси $Oz^{(2)}$ и его равномерное вращение вокруг осей системы $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, получаем

$$\vec{L}_{20} = I_{2x} \cdot \omega_{2x} \cdot \vec{i}^{(2)} + I_{2y} \cdot \omega_{2y} \cdot \vec{j}^{(2)} + I_{2z} \cdot \omega_{2z} \cdot \vec{k}^{(2)},$$

где I_{2x} , I_{2y} , I_{2z} – моменты инерции спутника относительно осей $Ox^{(2)}$, $Oy^{(2)}$ и $Oz^{(2)}$ соответственно; ω_{2x} , ω_{2y} , ω_{2z} – проекции угловой скорости спутника.

Проецируем на оси системы координат $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$:

$$\omega_{2x} = \omega_{3x} + \omega_{2rx};$$

$$\omega_{2y} = \omega_{3y} + \omega_{2ry};$$

$$\omega_{2z} = \omega_{3z} + \omega_{2rz},$$

где ω_{3x} , ω_{3y} , ω_{3z} – проекции угловой скорости входного вала; ω_{2rx} , ω_{2ry} , ω_{2rz} – проекции угловой скорости сателлита вокруг оси OA .

Проекции угловой скорости входного вала:

$$\begin{aligned}\omega_{3x} &= 0; \\ \omega_{3y} &= -\omega_3 \cdot \sin \theta; \\ \omega_{3z} &= \omega_3 \cdot \cos \theta.\end{aligned}$$

Проекции угловой скорости сателлита вокруг оси OA :

$$\begin{aligned}\omega_{2rx} &= 0; \\ \omega_{2ry} &= 0; \\ \omega_{2rz} &= \omega_{2r}.\end{aligned}$$

Со стороны выходного вала на сателлит действуют силы, передаваемые при помощи муфты Гука. Это неизвестные заранее составляющие реакции \vec{R}_O , т. е. $X_O^{(2)}$, $Y_O^{(2)}$ и $Z_O^{(2)}$, а также две пары сил с моментами первого и второго порядков, соответственно M_{21} и M_{22} .

Так называемый момент первого порядка M_{21} найдем из уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{2r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{2r}} = Q,$$

где T - кинетическая энергия системы, складывающаяся из кинетических энергий T_2 , T_3 и T_4 сателлита, входного вала и выходного вала соответственно; Q - обобщенная сила; φ_{2r} - угол поворота сателлита относительно кривошипа.

Кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{I_2^* \cdot \dot{\varphi}_{2r}^2}{2},$$

где I_2^* - приведенный момент инерции сателлита относительно мгновенной оси вращения.

Кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{I_3^* \cdot \dot{\varphi}_{2r}^2}{2},$$

где I_3^* - приведенный момент инерции входного вала относительно его оси вращения.

Кинетическая энергия

$$T_4 = \frac{I_4 \cdot \dot{\varphi}_4^2}{2},$$

где I_4 - момент инерции выходного вала относительно его оси вращения;
 φ_4 - угол поворота выходного вала.

Выразим угловую скорость $\dot{\varphi}_4$:

$$\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_{2r} \cdot u_{42r},$$

где φ_3 - угол поворота входного вала; u_{42r} - передаточное отношение при неподвижном кривошипе, которое определяется по известной формуле

$$u_{42r} = \frac{d\varphi_{4r}}{d\varphi_{2r}} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi_{2r}},$$

где φ_{4r} - угол поворота выходного вала при остановленном кривошипе.

Между φ_3 и φ_{2r} существует следующая связь:

$$\dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_{2r} \cdot u_{12r},$$

где $u_{12r} = \frac{Z_2}{Z_1}$ - передаточное отношение при остановленном кривошипе,

где Z_2 - количество зубьев сателлита.

При этом

$$T_4 = \frac{I_4 \cdot (u_{42r} - u_{12r})^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2}{2}.$$

После упрощения получим

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot (I_4 \cdot u_{42r}^2 - I_4^* \cdot u_{42r} + I_4^{**}) \cdot \dot{\varphi}_2^2,$$

где $I_4^* = 2 \cdot I_4 \cdot u_{12r}$ - первый приведенный момент инерции; $I_4^{**} = I_4 \cdot u_{12r}^2$ - второй приведенный момент инерции.

Определяем производные уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{2r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{2r}} = -\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot I_4 \cdot u_{42r}^3 - I_4^* \cdot u_{42r}^2) \cdot \frac{\sin^2 \theta \cdot \sin 2 \cdot \varphi_{2r}}{\cos \theta} \cdot \dot{\varphi}_{2r}.$$

Определяем обобщенную силу

$$\begin{aligned} Q &= \frac{M_3 \cdot \delta \varphi_3 + M_4 \cdot \delta \varphi_4}{\delta \varphi_{2r}} = \frac{M_3 \cdot \delta \varphi_3 + M_4 \cdot (\delta \varphi_3 + \delta \varphi_{2r} \cdot u_{42r})}{\delta \varphi_{2r}} = \\ &= -(M_3 + M_4) \cdot u_{12r} + M_4 \cdot u_{42r}. \end{aligned}$$

Величина $M_3 + M_4 = M_1$, где M_1 - момент, прикладываемый к сателлиту со стороны центрального колеса, поэтому

$$Q = -M_1 \cdot u_{12r} + M_4 \cdot u_{42r}.$$

С учетом того, что $M_{21} = -M_1 \cdot u_{12r}$, получаем

$$Q = M_{21} + M_4 \cdot u_{42r}.$$

Уравнение кинестатики сателлита

$$-P_\tau \cdot r_2 + M_{21} = 0,$$

где r_2 - начальный радиус сателлита.

Из данного уравнения определяем силу P_τ и другую составляющую P_n искомой силы P , действующей в зацеплении рассматриваемой прецессионной передачи.

Сила, действующая в зацеплении колес прецессионной передачи, зависит от кинематики передачи, в частности от кинематики шарнира Гукка. В отличие от силы в эвольвентном зацеплении данная сила переменна, что, несомненно, налагает определенные особенности на проектирование прецессионной передачи. В частности, следует учитывать ее изменение при расчете передачи на долговечность. При этом данная сила зависит также от инерционных свойств сателлита и выходного вала. Последний факт позволяет оптимизировать значение силы и добиться требуемых значений характеристик прецессионной передачи.

Список литературы

1. Скойбеда А. Т. Коническо-цилиндрические прецессионные редукторы (КЦПР). Минск.: БГПА, 2001. 189 с.
2. Компьютерное моделирование планетарных прецессионных передач: монография / под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. П. Н. Громыко. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2007. 271 с.

A. T. Skoibeda, S. N. Khatetovsky, P. N. Gromyko

DEFINITION OF FORCE IN GEAR MESH OF PRECESSION TRANSMISSION

The solving of problem of definition of force in gear mesh of K-H-V precession transmission with straight-toothed central gear is considered. It is revealed, that force is variable and depends on kinematics of precession transmission and inertia properties of satellite and output shaft. It allows resources for optimization of force to be found.

Key words: precession transmission, involute gearing, force calculation.

Получено 18.10.11